



Показательным уравнением называют уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.



Теорема 1.

Если $a > 1$, то равенство $a^m = a^n$ справедливо тогда и только тогда, когда $m = n$.



Теорема 3.

Если $0 < a < 1$, то равенство $a^m = a^n$ справедливо тогда и только тогда, когда $m = n$.



$a^m = a^n$, где $a > 0$, $a \neq 1$, справедливо тогда
и только тогда, когда $m = n$.



Теорема.

Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Пример 1. Решите уравнение $5^{x-1} = 125$.

Решение.

$$125 = 5^3;$$

$$5^{x-1} = 125;$$

$$5^{x-1} = 5^3;$$

$$x - 1 = 3;$$

$$x = 4.$$

Ответ: $x = 4$.

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

$$f(x) = g(x)$$

Пример 2. Решите уравнение $2^{2x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+x}$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1+x} = 2^{-1-x};$$

$$2^{2x+1} = 2^{-1-x};$$

$$2x + 1 = -1 - x;$$

$$2x + x = -1 - 1;$$

$$3x = -2;$$

$$x = -\frac{2}{3}.$$

Ответ: $x = -\frac{2}{3}$.

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = a^{-n}$$

Пример 3. Решите уравнение $4^{x^2-7x+16} = 256$.

Решение.

$$4^{x^2-7x+16} = 4^4;$$

$$x^2 - 7x + 16 = 4;$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0;$$

$$x_1 + x_2 = 7, \quad x_1 \cdot x_2 = 12;$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 4.$$

Ответ: $x_1 = 3, \quad x_2 = 4$.

Пример 4. Решите уравнение $3^{x+1} - 3^x = 54$.

Решение.

$$3^x \cdot 3 - 3^x = 54;$$

$$3^x(3 - 1) = 54;$$

$$3^x(3 - 1) = 54;$$

$$3^x = 54 : 2;$$

$$3^x = 27;$$

$$3^x = 3^3;$$

$$x = 3.$$

Ответ: $x = 3$.

Пример 5. Решите уравнение $4^x + 2^{x+1} = 80$.

Решение.

$$(2^x)^2 + 2^x \cdot 2 = 80;$$

$$2^x = y;$$

$$y^2 + 2y - 80 = 0;$$

$$y_1 + y_2 = -2, y_1 \cdot y_2 = -80;$$

$$y_1 = 8, y_2 = -10;$$

$$2^x = 8, 2^x = -10;$$

$$2^x = 8;$$

$$2^x = 2^3;$$

$$x = 3.$$

Ответ: $x = 3$.

Приёмы решения показательных уравнений:

1. **Функционально-графический** – где используются графики функций или их свойства.
2. **Уравнивания показателей** – применяются свойства степени и теоремы.
3. **Введение новой переменной.**

Пример 6. Решите уравнение $3^{2x+1} - 4 \cdot 21^x - 7^{2x+1} = 0$.

Решение.

$$3^{2x+1} = 3^{2x} \cdot 3^1;$$

$$21^x = 3^x \cdot 7^x;$$

$$7^{2x+1} = 7^{2x} \cdot 7^1;$$

$$3^{2x} \cdot 3 - 4 \cdot 3^x \cdot 7^x - 7 \cdot 7^{2x} = 0;$$

$$3 \cdot \frac{3^{2x}}{7^{2x}} - 4 \cdot \frac{3^x \cdot 7^x}{7^{2x}} - 7 \cdot \frac{7^{2x}}{7^{2x}} = 0;$$

$$\frac{3^{2x}}{7^{2x}} = \left(\frac{3}{7}\right)^{2x};$$

$$\frac{3^x \cdot 7^x}{7^{2x}} = \frac{3^x}{7^x} = \left(\frac{3}{7}\right)^x; \quad \frac{7^{2x}}{7^{2x}} = 1;$$

$$3 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{2x} - 4 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^x - 7 = 0;$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x = y;$$

$$3 \cdot y^2 - 4 \cdot y - 7 = 0;$$

$$D = 16 - 4 \cdot 3 \cdot (-7) = 100;$$

$$y_1 = \frac{4-10}{2 \cdot 3} = -1, \quad y_2 = \frac{4+10}{2 \cdot 3} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3};$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x = -1, \quad \left(\frac{3}{7}\right)^x = \frac{7}{3};$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x = \left(\frac{3}{7}\right)^{-1};$$

$$x = -1.$$

Ответ: $x = -1$.