Показательным уравнением называют уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Теорема 1.

Если $a > 1$, то равенство $a^m = a^n$ справедливо тогда и только тогда, когда $m = n$.

Теорема 3.

Если $0 < a < 1$, то равенство $a^m = a^n$ справедливо тогда и только тогда, когда $m = n$.

$a^m = a^n$, где $a > 0$, $a \neq 1$, справедливо тогда и только тогда, когда $m = n$.

Теорема.

Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Пример 1. Решите уравнение $5^{x-1} = 125$.

Решение.

$125 = 5^3$;

$5^{x-1} = 125$;

$5^{x-1} = 5^3$;

$x - 1 = 3$;

$x = 4$.

Ответ: $x = 4$.

$$\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)}}$$

$$\boxed{f(x) = g(x)}$$

Пример 2. Решите уравнение $2^{2x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+x}$.

Решение.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{1+x} = 2^{-1-x}$;

$2^{2x+1} = 2^{-1-x}$;

$2x + 1 = -1 - x$;

$2x + x = -1 - 1$;

$3x = -2$;

$x = -\frac{2}{3}$.

Ответ: $x = -\frac{2}{3}$.

$\boxed{\left(\frac{1}{a}\right)^{n} = a^{-n}}$

Пример 3. Решите уравнение $4^{x^2-7x+16} = 256$.

Решение.

$4^{x^2-7x+16} = 4^4$;

$x^2 - 7x + 16 = 4$;

$x^2 - 7x + 12 = 0$;

$x_1 + x_2 = 7, \quad x_1 \cdot x_2 = 12$;

$x_1 = 3, \ x_2 = 4.$

Ответ: $x_1 = 3, \ x_2 = 4.$

Пример 4. Решите уравнение $3^{x+1} - 3^x = 54$.

Решение.

$3^x \cdot 3 - 3^x = 54;$

$3^x(3 - 1) = 54;$

$3^x(3 - 1) = 54;$

$3^x = 54 : 2;$

$3^x = 27;$

$3^x = 3^3;$

$x = 3.$

Ответ: $x = 3.$

Пример 5. Решите уравнение $4^x + 2^{x+1} = 80$.

Решение.

$(2^x)^2 + 2^x \cdot 2 = 80;$

$2^x = y;$

$y^2 + 2y - 80 = 0;$

$y_1 + y_2 = -2,\ y_1 \cdot y_2 = -80;$

$y_1 = 8,\ y_2 = -10;$

$2^x = 8,\ \ 2^x = -10;$

$2^x = 8;$

$2^x = 2^3;$

$x = 3.$

Ответ: $x = 3.$

Приёмы решения показательных уравнений:

1. Функционально-графический – где используются графики функций или их свойства.

2. Уравнивания показателей – применяются свойства степени и теоремы.

3. Введение новой переменной.

Пример 6. Решите уравнение $3^{2x+1} - 4 \cdot 21^{x} - 7^{2x+1} = 0$.

Решение.

$3^{2x+1} = 3^{2x} \cdot 3^{1};$

$21^{x} = 3^{x} \cdot 7^{x};$

$7^{2x+1} = 7^{2x} \cdot 7^{1};$

$3^{2x} \cdot 3 - 4 \cdot 3^{x} \cdot 7^{x} - 7 \cdot 7^{2x} = 0;$

$3 \cdot \frac{3^{2x}}{7^{2x}} - 4 \cdot \frac{3^{x} \cdot 7^{x}}{7^{2x}} - 7 \cdot \frac{7^{2x}}{7^{2x}} = 0;$

$\frac{3^{2x}}{7^{2x}} = \left(\frac{3}{7}\right)^{2x};$

$\frac{3^{x} \cdot 7^{x}}{7^{2x}} = \frac{3^{x}}{7^{x}} = \left(\frac{3}{7}\right)^{x}; \quad \frac{7^{2x}}{7^{2x}} = 1;$

$3 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{2x} - 4 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{x} - 7 = 0;$

$\left(\frac{3}{7}\right)^{x} = y;$

$3 \cdot y^{2} - 4 \cdot y - 7 = 0;$

$D = 16 - 4 \cdot 3 \cdot (-7) = 100;$

$y_1 = \frac{4-10}{2 \cdot 3} = -1, \; y_2 = \frac{4+10}{2 \cdot 3} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3};$

$\left(\frac{3}{7}\right)^{x} = -1, \quad \left(\frac{3}{7}\right)^{x} = \frac{7}{3};$

$\left(\frac{3}{7}\right)^{x} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-1};$

$x = -1.$

Ответ: $x = -1.$