

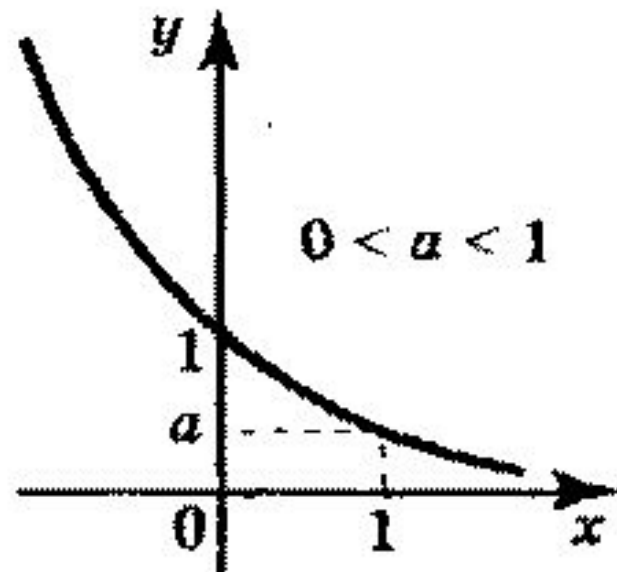
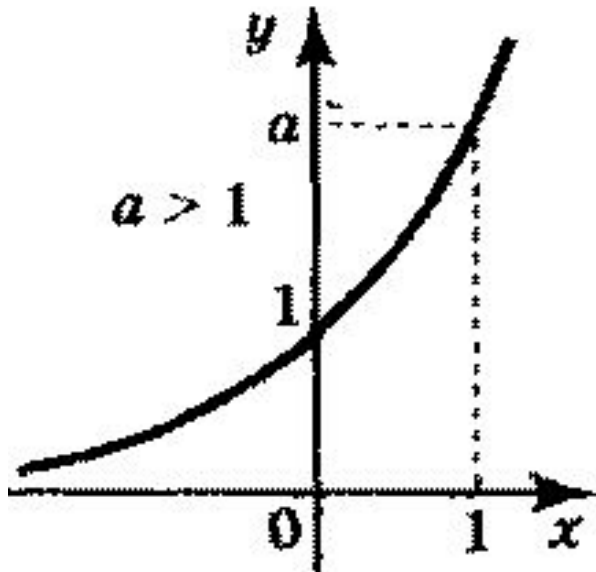
# Решение показательных неравенств

# План урока

- 1. Неравенства вида  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ .
- 2. Неравенства вида  $a^{f(x)} > b$ ,  $a > 0$ .
- 3. Неравенства вида  $a^{f(x)} > b^{g(x)}$ .
- 4. Решение показательных неравенств методом замены переменной.
- 5. Решение неравенств, содержащих однородные функции относительно показательных функций.
- 6. Графическое решение показательных неравенств

Функцию вида  $y=a^x$ , где  $a>0$  и  $a\neq 1$  называют **показательной функцией**

$$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$



# Первое замечание

**Сравните:**

Показательная функция	Степенная функция
$y = a^x$ ( $a > 0, a \neq 1$ ) Аргумент $x$ содержится в показателе степени	$y = x^r$ Аргумент $x$ содержится в основании степени
$y = 3^x, y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = (2,5)^x$	$y = x^3, y = x^{1,5}, y = x^{\frac{1}{3}}, y = x^{-10}$

## Второе замечание

Обычно не рассматривают показательную функцию с основаниями:

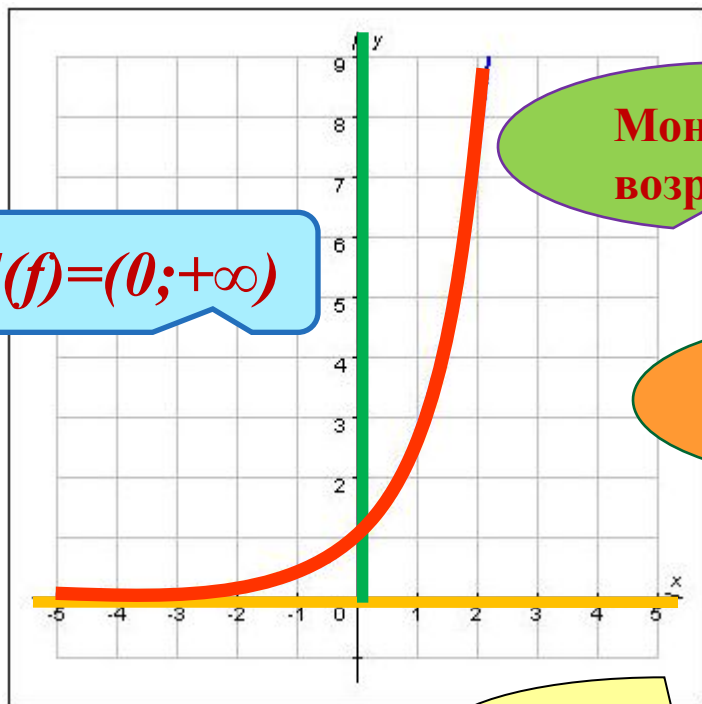
- $a=1$ , т.к.  $1^x = 1$ , т.е. показательная функция «вырождается» в постоянную функцию  $y=1$  - это неинтересно;
- если  $a=0$ , то  $0^x = 0$  для любого положительного значения  $x$ , т.е. мы получаем функцию  $y=0$ , определённую при  $x>0$ , - это тоже неинтересно;
- если  $a<0$ , то выражение  $a^x$  имеет смысл лишь при целых значениях  $x$ , а мы всё-таки предпочитаем рассматривать функции, определённые на сплошных промежутках

# Основные свойства показательной функции $y=a^x$

№	$a>1$	$0<a<1$
1	$D(f) = (-\infty; +\infty)$	$D(f) = (-\infty; +\infty)$
2	$E(f) = (0; +\infty)$	$E(f) = (0; +\infty)$
3	Возрастает	Убывает
4	Непрерывна	Непрерывна

# График показательной функции $y=a^x$

$a > 1$



$E(f) = (0; +\infty)$

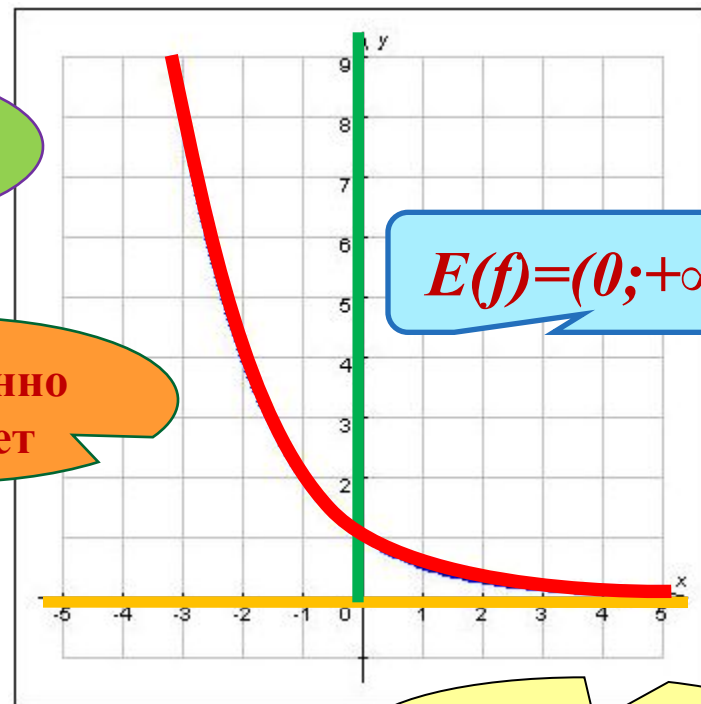
Монотонно  
возрастает

Монотонно  
убывает

рис.1

$D(f) = (-\infty; +\infty)$

$0 < a < 1$



$E(f) = (0; +\infty)$

рис.2

$D(f) = (-\infty; +\infty)$

Неравенства, содержащие переменные в показателе степени, называют **показательными**

1. Неравенства вида  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

$$a > 1 \Rightarrow (a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x))$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow (a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x))$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow (a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x))$$



## Задания ЕГЭ 2009 г.

**А-6. Решите неравенство:**  $7^{x+2,3} \leq \frac{1}{49}$ .

1.  $(-\infty; 0,3]$     2.  $(-\infty; -4,3]$     3.  $[-4,3; +\infty)$     4.  $[0,3; +\infty)$

**Решение**  
:  
 $\frac{1}{49} = \frac{1}{7^2} = 7^{-2}$

$$7^{x+2,3} \leq 7^{-2},$$

$$x + 2,3 \leq -2,$$

$$x \leq -2 - 2,3,$$

$$x \leq -4,3.$$

**Правильный  
ответ:**

2.  $(-\infty; -4,3]$

## Задания ЕГЭ 2009 г.

**А-6. Решите неравенство:**  $3^{7x-9} \leq 81^x$ .

1.  $(-\infty; 1,5]$    2.  $(-\infty; \frac{9}{8}]$    3.  $(-\infty; 1]$    4.  $(-\infty; 3]$

**Решение**

:

$$81 = 3^4,$$

$$81^x = 3^{4x},$$

$$3^{7x-9} \leq 3^{4x}.$$

$$7x - 9 \leq 4x,$$

$$7x - 4x \leq 9,$$

$$3x \leq 9,$$

$$x \leq 3.$$

**Правильный  
ответ:**

4.  $(-\infty; 3]$

## Задания ЕГЭ 2009 г.

**А-6. Решите неравенство:**  $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-5x} - 1 \leq 0$ .

1.  $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right)$    2.  $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right]$    3.  $\left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$    4.  $\left[\frac{2}{5}; +\infty\right)$

**Решение**

**:**  $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-5x} \leq 1$ .    $1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$ ,    $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-5x} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^0$ .

$$2 - 5x \geq 0,$$

$$-5x \geq -2,$$

$$x \leq \frac{2}{5}.$$

**Правильный  
ответ:**

2.  $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right]$

# Задания ЕГЭ 2006 г.

**А-9. Решите неравенство:  $2^{x^2-5x+6} \leq 4^x$ .**

1.  $[1; 6]$     2.  $[2; 3]$     3.  $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$     4.  $(-\infty; 1] \cup [6; +\infty)$

**Решение**     $4^x = 2^{2x}$ ,     $2^{x^2-5x+6} \leq 2^{2x}$ .

:

$$x^2 - 5x + 6 \leq 2x,$$

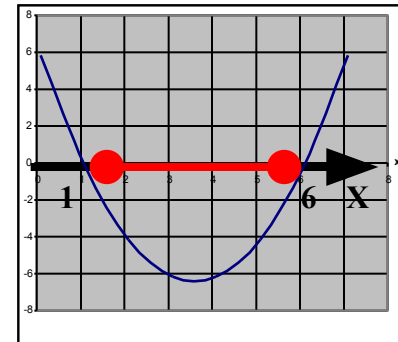
$$x^2 - 5x + 6 - 2x \leq 0,$$

$$x^2 - 7x + 6 \leq 0,$$

$$y = x^2 - 7x + 6$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0,$$

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 1.$$



**Правильный  
ответ:**

1.  $[1; 6]$

## Пример

1. Найдите область определения функции:

$$g(x) = \ln \left( 9^{1,5-0,3x} - \frac{1}{27} \right).$$

1.  $(10; +\infty)$     2.  $(-\infty; 10)$     3.  $(0; 10]$     4.  $(-\infty; 0)$

**Решение**  
:  
 $9^{1,5-0,3x} - \frac{1}{27} > 0$

**Правильный  
ответ:**

2.  $(-\infty; 10)$

## Пример

2. Найдите область определения функции:

$$f(x) = \sqrt{2^{3x+1} - 16}.$$

1.  $(1; +\infty)$     2.  $(-\infty; -1]$     3.  $(-\infty; -1)$     4.  $[1; +\infty)$

**Решение**  $2^{3x+1} - 16 \geq 0$   
:

**Правильный  
ответ:**

4.  $[1; +\infty)$

## Пример

3. Укажите множество значений функции:

$$y = 2^x + 5.$$

1.  $(5; +\infty)$     2.  $(0; +\infty)$     3.  $(-\infty; +\infty)$     4.  $(7; +\infty)$

**Решение**  
:

$$y = 2^x,$$

$$2^x > 0,$$

$$2^x + 5 > 5.$$

**Правильный  
ответ:**

1.  $(5; +\infty)$

## 2. Неравенства вида $a^{f(x)} > b$ , $a > 0$ .

а)  $b \leq 0$ , тогда

$$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow x \in D(f);$$

б)  $b > 0$ , тогда

$$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) > \log_a b \quad \text{при } a > 1;$$

$$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) < \log_a b \quad \text{при } 0 < a < 1$$



# Пример 1

Решите неравенство:  $\left(\frac{1}{2}\right)^x > -1$ .

Решение  
:  
 $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$ .

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

**Правильный  
ответ:**

$$x \in \mathbb{R}$$

## Пример 2

Решите неравенство:  $2^x > 5$ .

**Решение**

:

$$2^x > 5 \Leftrightarrow 2^x > 2^{\log_2 5} \Leftrightarrow x > \log_2 5.$$

**Правильный  
ответ:**

$$(\log_2 5; +\infty)$$

## Пример 3

Решите неравенство:  $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \geq 3.$

**Решение**  
:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3} \Leftrightarrow 3x \leq \log_{\frac{1}{2}} 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}} 3 \Leftrightarrow x \leq \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{3}.$$

**Правильный  
ответ:**

$$\left(-\infty; \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{3}\right]$$

## Пример из заданий ЕГЭ 2006 г.

Решите неравенство:  $10^{4x-5} > -0,1$ .

1.  $(-\infty; +\infty)$     2.  $(-1; +\infty)$     3.  $(-\infty; 1)$     4.  $(1; +\infty)$

**Решение**     $10^{4x-5} > 0$ .  
:

$$10^{4x-5} > -0,1, \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

**Правильный  
ответ:**

1.  $(-\infty; +\infty)$

### 3. Неравенства вида $a^{f(x)} > b^{g(x)}$

если  $a > 1$ , то :

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) \cdot \log_a b,$$

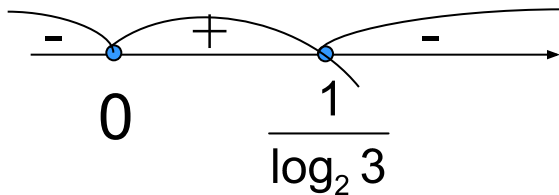
если  $0 < a < 1$ , то :

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x) \cdot \log_a b$$

## Пример

Решите неравенство:  $2^x \geq 3^{x^2}$ .

**Решение:**



$$\log_2(2^x) \geq \log_2(3^{x^2});$$

$$x \geq x^2 \cdot \log_2 3;$$

$$x - x^2 \cdot \log_2 3 \geq 0;$$

$$x(1 - x \cdot \log_2 3) \geq 0;$$

$$x \in \left[ 0; \frac{1}{\log_2 3} \right], \quad \frac{1}{\log_2 3} = \log_3 2;$$

$$x \in [0; \log_3 2]$$

**Ответ**  $[0; \log_3 2]$

:

## Решение показательных неравенств методом замены переменной

Решите неравенство:  $9^x + 27 < 12 \cdot 3^x$ .

**Решение**      $3^x = t,$       $t^2 - 12t + 27 < 0;$   
:

$$3 < t < 9;$$

$$3 < 3^x < 9;$$

$$3^1 < 3^x < 3^2;$$

$$1 < x < 2$$

**Ответ**      $(1; 2)$   
:

## Решение неравенств, содержащих однородные функции относительно показательных функций

Решите неравенство:  $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0$ .

**Решение**  $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 2^x \cdot 5^x > 0$ ;

:

$$\left(\frac{4}{25}\right)^x - 2 - \left(\frac{10}{25}\right)^x > 0; \quad \left(\frac{2}{5}\right)^x = t,$$

$$\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^x - 2 > 0; \quad t^2 - t - 2 > 0;$$
$$t < -1, t > 2.$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x > 2;$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{2}{5}} 2};$$

$$x < \log_{\frac{2}{5}} 2.$$

**Ответ**

:

$$\left(-\infty; \log_{\frac{2}{5}} 2\right)$$

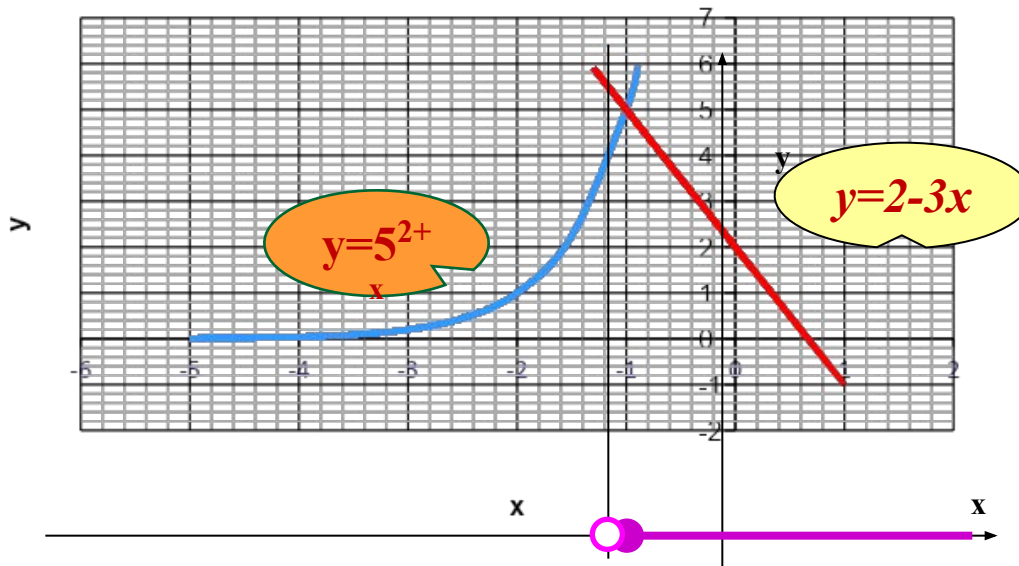


**Неравенства, в которых в одной части  
неравенства содержится показательная функция, а  
в другой - любая другая**

**Решите неравенство:  $5^{2+x} > 2 - 3x$ .**

1.  $(-\infty; +\infty)$     2.  $(1; +\infty)$     3.  $(-\infty; -1)$     4.  $(-1; +\infty)$

**Решение**     $y = 5^{2-x}$     и     $y = 2 - 3x$   
:



**Правильный**

**4.  $(-1; +\infty)$**

**ответ:**

Решите неравенство:  $5^x - 4 \leq (x - 2)^2$ .

1.  $(-1, 3]$

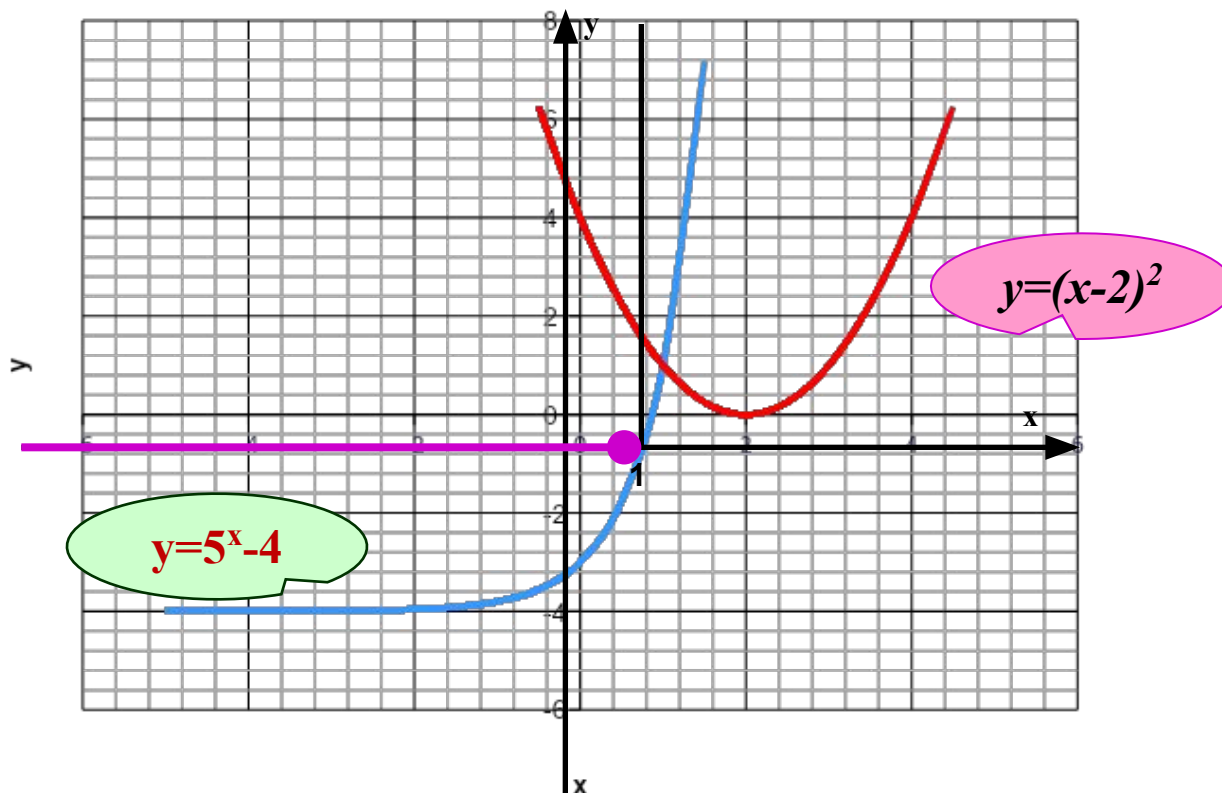
2.  $(-\infty, 1]$

3.  $[3, 7]$

4.  $[1, +\infty)$

Решение  $y = 5^x - 4$  и  $y = (x - 2)^2$ .

:



Правильный  
ответ:

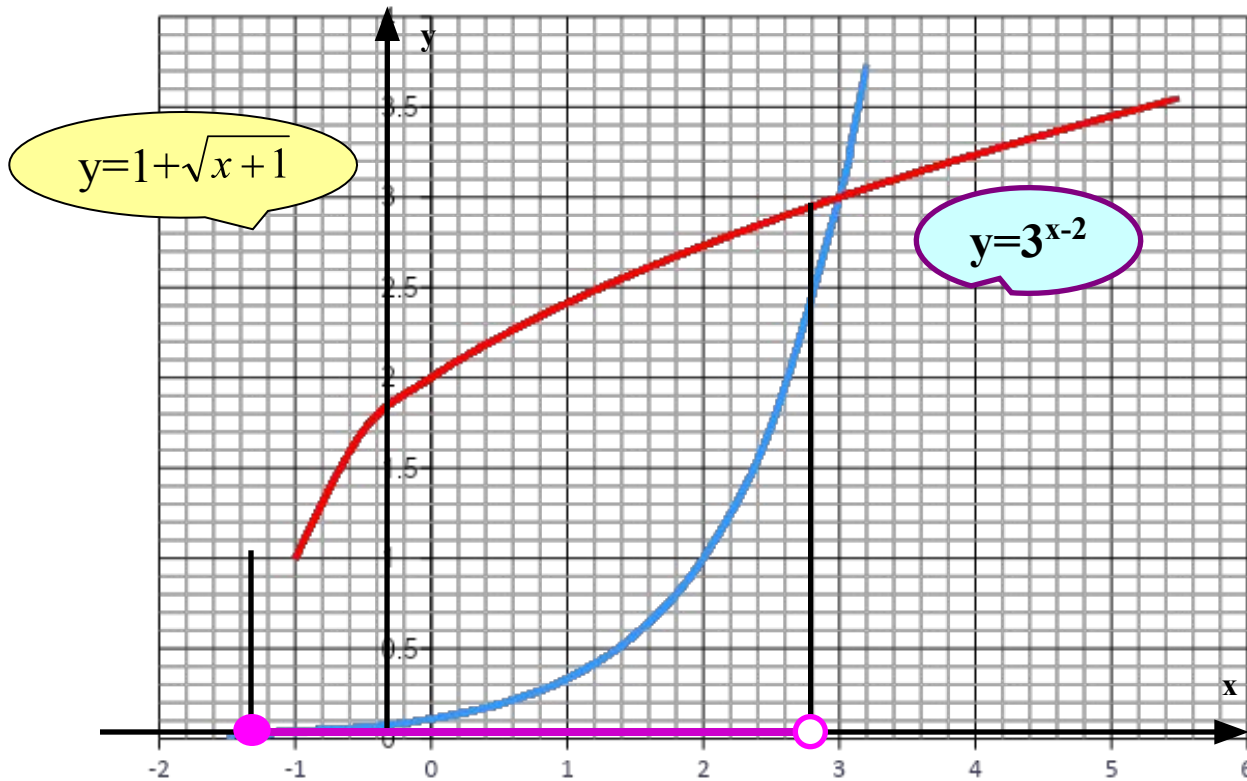
2.  $(-\infty, 1]$

Решите неравенство:  $3^{x-2} < 1 + \sqrt{x+1}$ .

1.  $(0;7)$       2.  $(-3;1)$       3.  $[-1;3)$       4.  $(3,+\infty)$

Решение  $y = 3^{x-2}$  и  $y = 1 + \sqrt{x+1}$ .

:



Правильный

3.  $[-1;3)$

ответ: