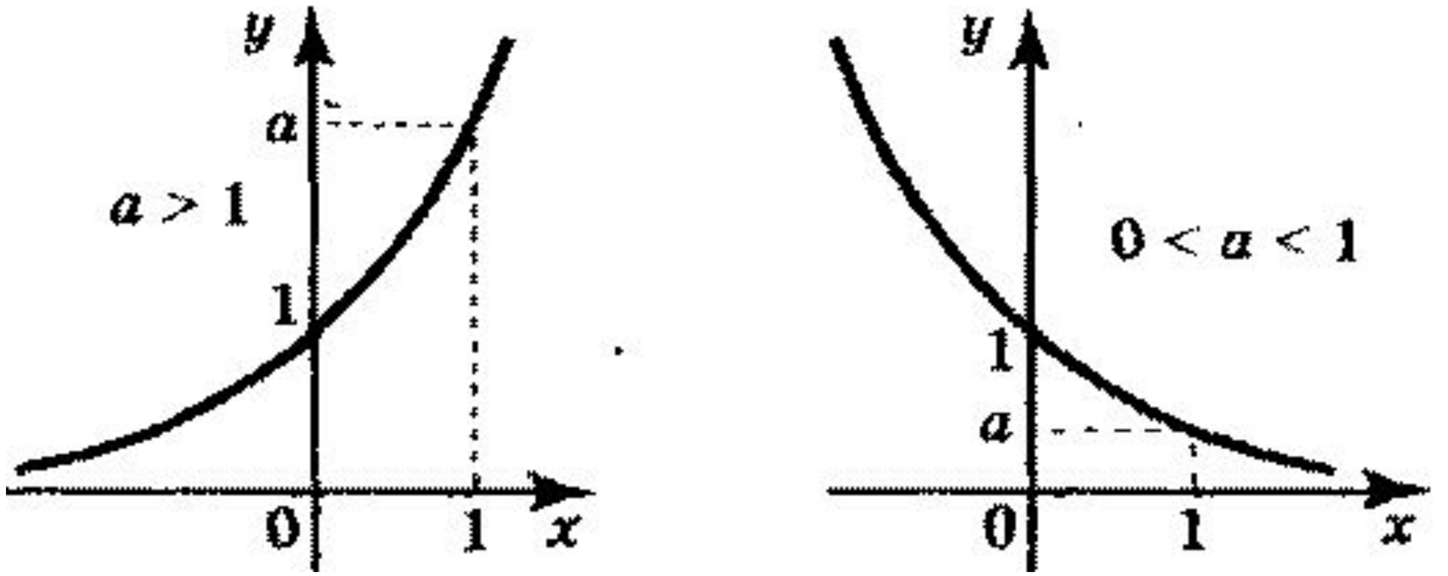
Решение показательных неравенств

План урока

- 1. Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.
- 2. Неравенства вида $a^{f(x)} > b$, $a > 0$.
- 3. Неравенства вида $a^{f(x)} > b^{g(x)}$.
- 4. Решение показательных неравенств методом замены переменной.
- 5. Решение неравенств, содержащих однородные функции относительно показательных функций.
- 6. Графическое решение показательных неравенств

Функцию вида $y=a^x$, где $a>0$ и $a\neq 1$ называют **показательной функцией**

$$y = a^x \ (a > 0,\ a \neq 1)$$



Первое замечание

Сравните:

Показательная функция	Степенная функция
$y = a^x \ (a > 0,\ a \neq 1)$ Аргумент x содержится в показателе степени	$y = x^r$ Аргумент x содержится в основании степени
$y = 3^x, y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = (2{,}5)^x$	$y = x^3, y = x^{1{,}5}, y = x^{\frac{1}{3}}, y = x^{-10}$

Второе замечание

Обычно не рассматривают показательную функцию с основаниями:

- a=1, т.к. $1^x = 1$, т.е. показательная функция «вырождается» в постоянную функцию y=1- это неинтересно;
- если a=0, то $0^x = 0$ для любого положительного значения x, т.е. мы получаем функцию y=0, определённую при x>0, - это тоже неинтересно;
- если a<0, то выражение a^x имеет смысл лишь при целых значениях x, а мы всё-таки предпочитаем рассматривать функции, определённые на сплошных промежутках

Основные свойства показательной функции $y=a^x$

№	a>1	0<a<1
1	$D(f)=(-\infty;+\infty)$	$D(f)=(-\infty;+\infty)$
2	$E(f)=(0;+\infty)$	$E(f)=(0;+\infty)$
3	**Возрастает**	**Убывает**
4	**Непрерывна**	**Непрерывна**

График показательной функции $y=a^x$

$a > 1$ $0 < a < 1$

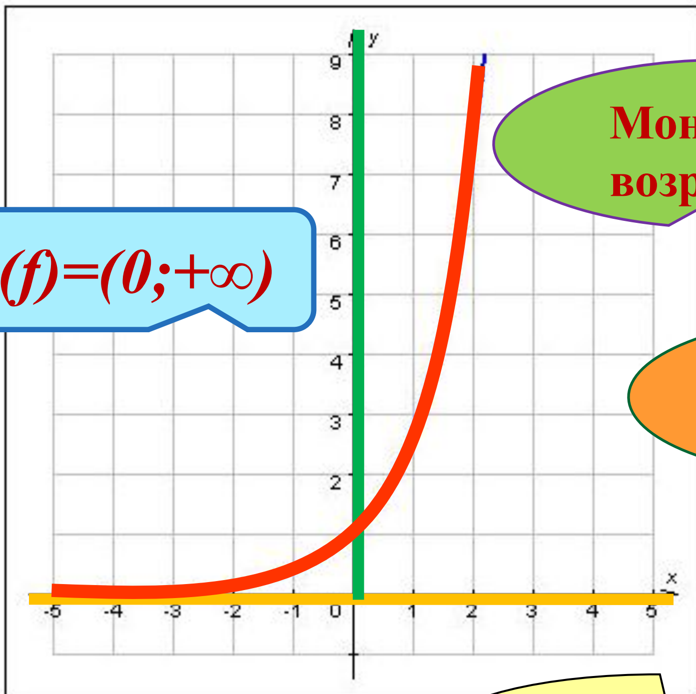


рис.1

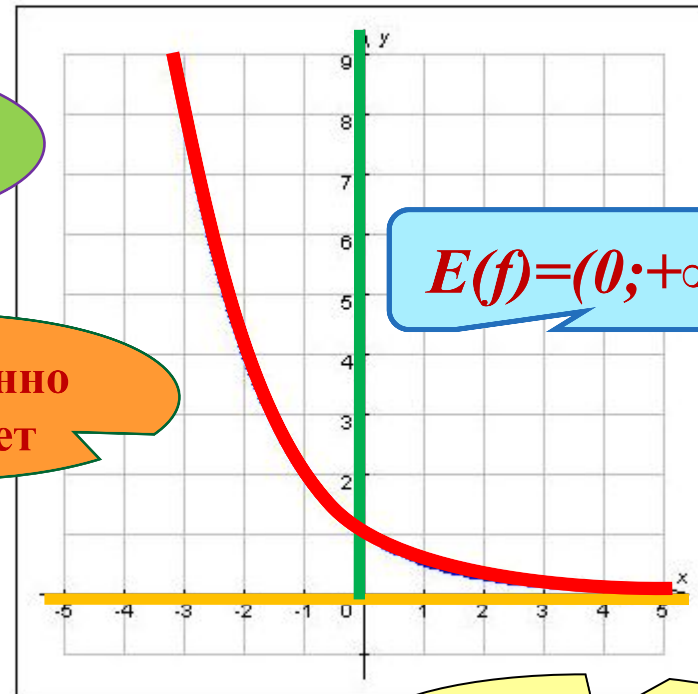


рис.2

Неравенства, содержащие переменные в показателе степени, называют **показательными**

1. Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

$$a > 1 \Rightarrow (a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x))$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow (a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x))$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow (a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x))$$

Задания ЕГЭ 2009 г.

А-6. Решите неравенство: $7^{x+2.3} \le \dfrac{1}{49}.$

1. $(-\infty; 0{,}3]$ 2. $(-\infty; -4{,}3]$ 3. $[-4{,}3; +\infty)$ 4. $[0{,}3; +\infty)$

Решение: $\dfrac{1}{49} = \dfrac{1}{7^2} = 7^{-2}$

$$7^{x+2.3} \le 7^{-2},$$

$$x + 2{,}3 \le -2,$$

$$x \le -2 - 2{,}3,$$

$$x \le -4{,}3.$$

Правильный ответ: 2. $(-\infty; -4{,}3]$

Задания ЕГЭ 2009 г.

А-6. Решите неравенство: $3^{7x-9} \leq 81^{x}.$

$1.\ (-\infty; 1{,}5] \quad 2.\ (-\infty; \frac{9}{8}] \quad 3.\ (-\infty; 1] \quad 4.\ (-\infty; 3]$

Решение:

$81 = 3^4,$

$81^x = 3^{4x},$

$3^{7x-9} \leq 3^{4x}.$

$7x - 9 \leq 4x,$

$7x - 4x \leq 9,$

$3x \leq 9,$

$x \leq 3.$

Правильный ответ: $4.\ (-\infty; 3]$

Задания ЕГЭ 2009 г.

А-6. Решите неравенство: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-5x} - 1 \le 0.$

1. $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right)$ 2. $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right]$ 3. $\left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$ 4. $\left[\frac{2}{5}; +\infty\right)$

Решение:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2-5x} \le 1. \qquad 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{0}, \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{2-5x} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{0}.$$

$$2 - 5x \ge 0,$$

$$-5x \ge -2,$$

$$x \le \frac{2}{5}.$$

Правильный ответ: 2. $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right]$

Задания ЕГЭ 2006 г.

А-9. Решите неравенство: $2^{x^2-5x+6} \le 4^x.$

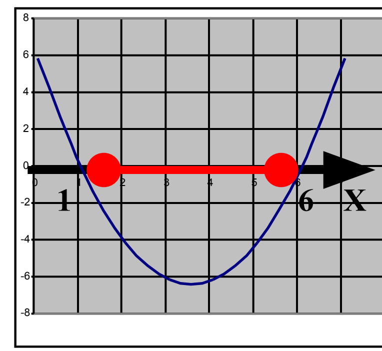
1. $[1;6]$ 2. $[2;3]$ 3. $(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$ 4. $(-\infty;1]\cup[6;+\infty)$

Решение: $4^x = 2^{2x},$ $2^{x^2-5x+6} \le 2^{2x}.$

$$x^2 - 5x + 6 \le 2x,$$

$$x^2 - 5x + 6 - 2x \le 0,$$

$$x^2 - 7x + 6 \le 0,$$



$$y = x^2 - 7x + 6$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0,$$

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 1.$$

Правильный ответ: 1. $[1;6]$

Пример

1. Найдите область определения функции:

$$g(x) = \ln\left(9^{1,5-0,3x} - \frac{1}{27}\right).$$

1. $(10; +\infty)$ 2. $(-\infty; 10)$ 3. $(0; 10]$ 4. $(-\infty; 0)$

Решение:

$$9^{1,5-0,3x} - \frac{1}{27} > 0$$

Правильный ответ: 2. $(-\infty; 10)$

Пример

2. Найдите область определения функции:

$$f(x) = \sqrt{2^{3x+1} - 16}.$$

1. $(1; +\infty)$ 2. $(-\infty; -1]$ 3. $(-\infty; -1)$ 4. $[1; +\infty)$

Решение: $2^{3x+1} - 16 \geq 0$

Правильный ответ: 4. $[1; +\infty)$

Пример

3. Укажите множество значений функции:

$$y = 2^x + 5.$$

1. $(5; +\infty)$ 2. $(0;+\infty)$ 3. $(-\infty;+\infty)$ 4. $(7;+\infty)$

Решение:

$$y = 2^x,$$

$$2^x > 0,$$

$$2^x + 5 > 5.$$

Правильный ответ: 1. $(5; +\infty)$

2. Неравенства вида $a^{f(x)}>b$, $a>0$.

а) $b \le 0$, *тогда*

$$a^{f(x)} > b \;\Leftrightarrow\; x \in D(f);$$

б) $b > 0$, *тогда*

$$a^{f(x)} > b \;\Leftrightarrow\; f(x) > \log_a b \quad \text{при} \quad a > 1;$$

$$a^{f(x)} > b \;\Leftrightarrow\; f(x) < \log_a b \quad \text{при} \quad 0 < a < 1$$

Пример 1

Решите неравенство: $\left(\frac{1}{2}\right)^x > -1.$

Решение: $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0.$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > -1 \Leftrightarrow x \in R$$

Правильный ответ: $x \in R$

Пример 2

Решите неравенство: $2^x > 5.$

Решение:

$$2^x > 5 \iff 2^x > 2^{\log_2 5} \iff x > \log_2 5.$$

Правильный ответ: $(\log_2 5; +\infty)$

Пример 3

Решите неравенство: $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \geq 3.$

Решение:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3} \Leftrightarrow 3x \leq \log_{\frac{1}{2}} 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 3 \Leftrightarrow x \leq \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{3}.$$

Правильный ответ: $\left(-\infty;\ \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{3}\right]$

Пример из заданий ЕГЭ 2006 г.

Решите неравенство: $10^{4x-5} > -0{,}1.$

1. $(-\infty;\ +\infty)$ 2. $(-1;+\infty)$ 3. $(-\infty;1)$ 4. $(1;+\infty)$

Решение: $10^{4x-5} > 0.$

$$10^{4x-5} > -0{,}1\ , \Leftrightarrow x \in R$$

Правильный ответ: 1. $(-\infty;\ +\infty)$

3.Неравенства вида $a^{f(x)} > b^{g(x)}$

если $a > 1$, то :

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) \cdot \log_a b,$$

если $0 < a < 1$, то :

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x) \cdot \log_a b$$

Пример

Решите неравенство: $2^x \geq 3^{x^2}.$

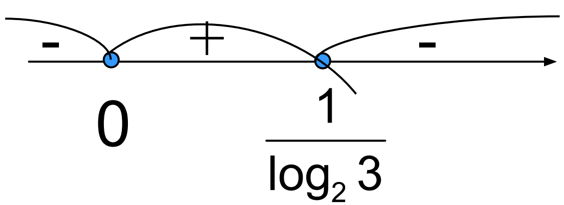
Решение:

$$\log_2(2^x) \geq \log_2(3^{x^2});$$

$$x \geq x^2 \cdot \log_2 3;$$

$$x - x^2 \cdot \log_2 3 \geq 0;$$

$$x(1 - x \cdot \log_2 3) \geq 0;$$



$$x \in \left[0; \frac{1}{\log_2 3}\right], \quad \frac{1}{\log_2 3} = \log_3 2;$$

$$x \in [\,0;\ \log_3 2\,]$$

Ответ: $[\,0;\ \log_3 2\,]$

Решение показательных неравенств методом замены переменной

Решите неравенство: $9^x + 27 < 12 \cdot 3^x.$

Решение: $3^x = t,$

$$t^2 - 12t + 27 < 0;$$

$$3 < t < 9;$$

$$3 < 3^x < 9;$$

$$3^1 < 3^x < 3^2;$$

$$1 < x < 2$$

Ответ: $(1; 2)$

Решение неравенств, содержащих однородные функции относительно показательных функций

Решите неравенство: $4^x - 2\cdot 5^{2x} - 10^x > 0.$

Решение:

$$4^x - 2\cdot 5^{2x} - 2^x\cdot 5^x > 0;$$

$$\left(\frac{4}{25}\right)^x - 2 - \left(\frac{10}{25}\right)^x > 0;$$

$$\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^x - 2 > 0;$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = t,$$

$$t^2 - t - 2 > 0;$$

$$t < -1,\ t > 2.$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x > 2;$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{2}{5}} 2};$$

$$x < \log_{\frac{2}{5}} 2.$$

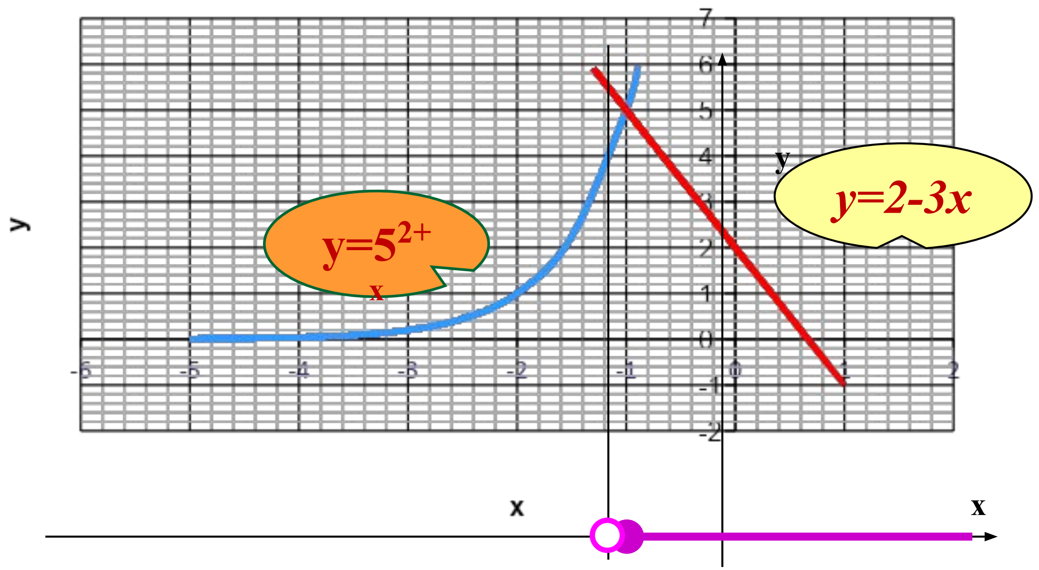
Ответ: $\left(-\infty; \log_{\frac{2}{5}} 2\right)$

Неравенства, в которых в одной части неравенства содержится показательная функция, а в другой - любая другая

Решите неравенство: $5^{2+x} > 2 - 3x.$

$1. \left(-\infty;\ +\infty\right)$ $2. \left(1; +\infty\right)$ $3. \left(-\infty; -1\right)$ $4. \left(-1; +\infty\right)$

Решение: $y = 5^{2-x}$ и $y = 2 - 3x$

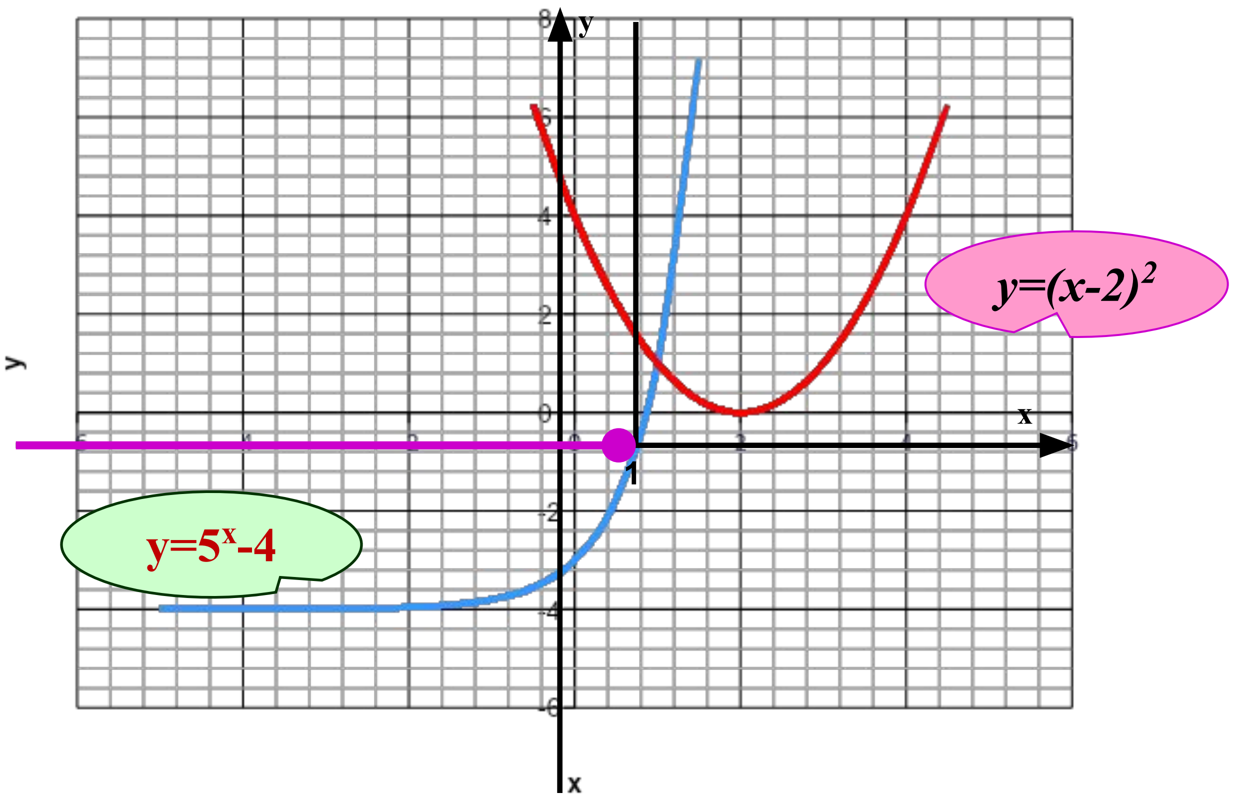


Правильный ответ: $4. \left(-1; +\infty\right)$

Решите неравенство: $5^x - 4 \le (x - 2)^2$.

1. $(-1, 3]$ 2. $(-\infty, 1]$ 3. $[3, 7]$ 4. $[1, +\infty)$

Решение: $y = 5^x - 4$ и $y = (x - 2)^2$.

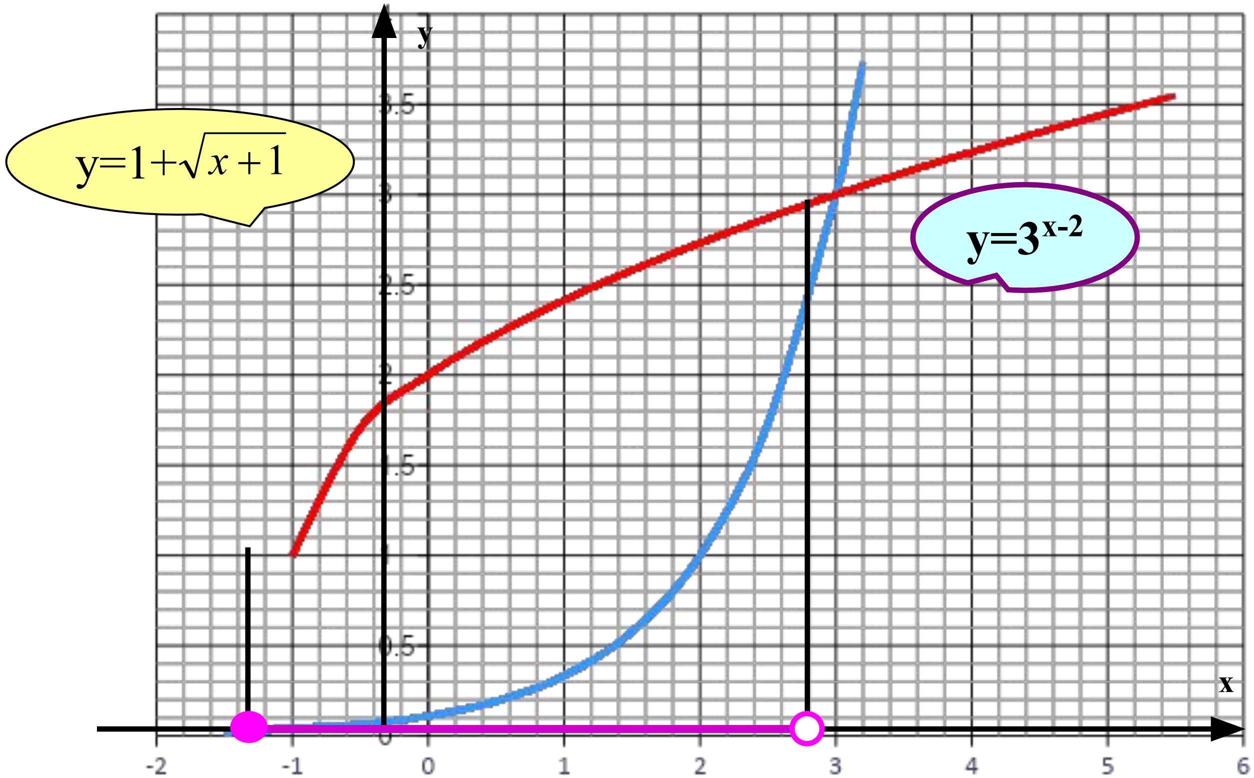


Правильный ответ: 2. $(-\infty, 1]$

Решите неравенство: $3^{x-2} < 1 + \sqrt{x+1}.$

1. $(0;7)$ 2. $(-3;1)$ 3. $[-1;3)$ 4. $(3,+\infty)$

Решение: $y = 3^{x-2}$ и $y = 1 + \sqrt{x+1}.$



Правильный ответ: 3. $[-1;3)$