

Решение нелинейных уравнений

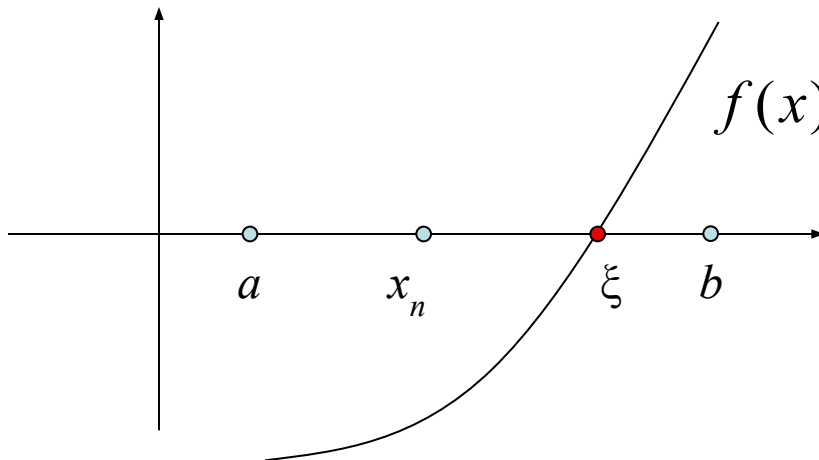
$$f(x) = 0$$

Уравнения

Алгебраические

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

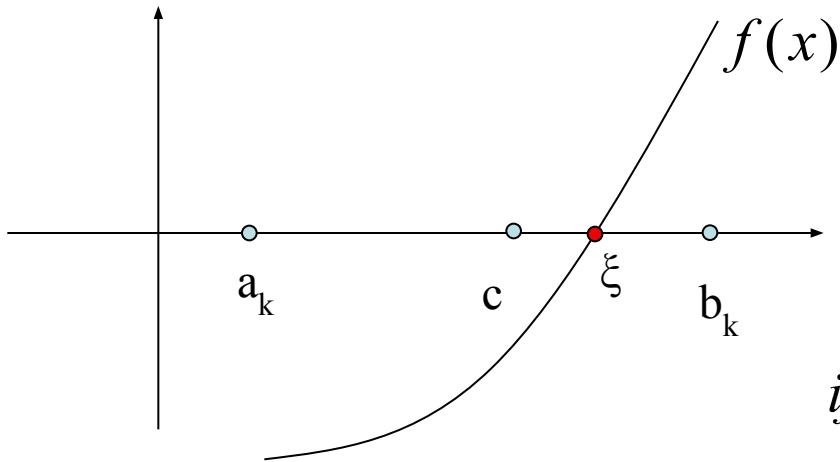
Трансцендентные



$$|x_n - \xi| \leq \varepsilon$$

Метод дихотомии

$$f(x) = 0$$



$$c = \frac{a_k + b_k}{2}$$

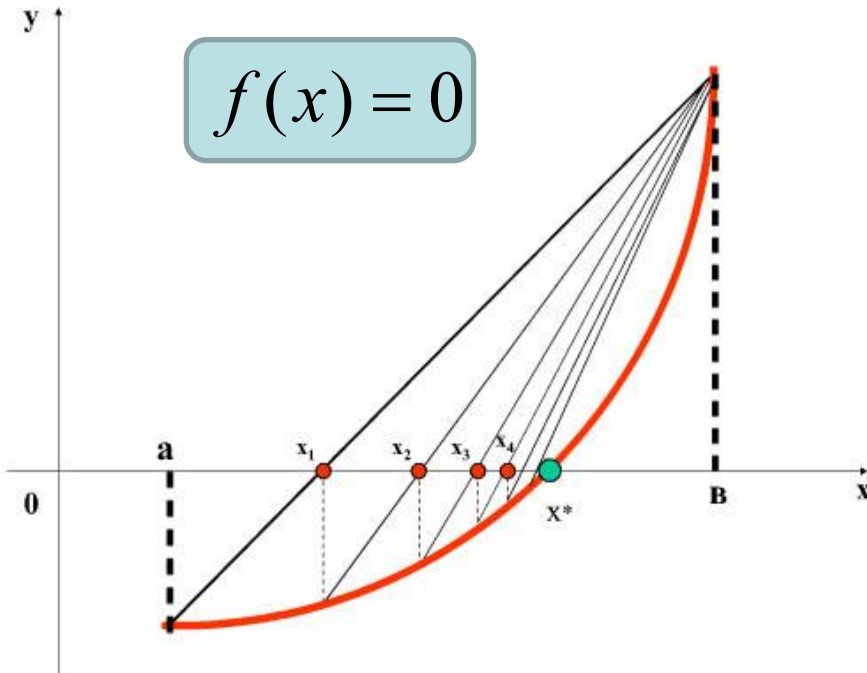
$$\text{if } f(a_k) \cdot f(c) < 0 \Rightarrow a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = c$$

$$f(c) \cdot f(b_k) < 0 \Rightarrow a_{k+1} = c, b_{k+1} = b_k$$

$$[a, b] = [a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_{k-}, b_{k-}]$$

$$|b_k - a_k| \leq \varepsilon$$

Метод хорд



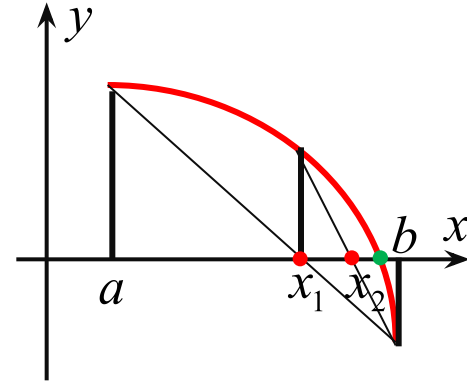
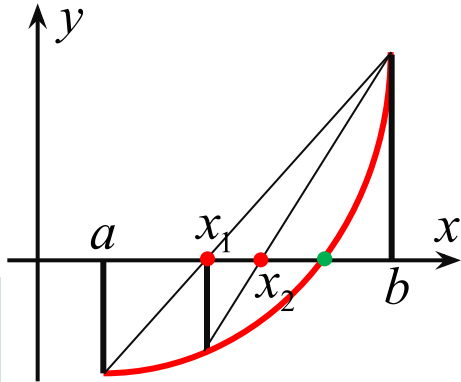
$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = 0$$

$$x = a - \frac{(b - a)f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Метод хорд

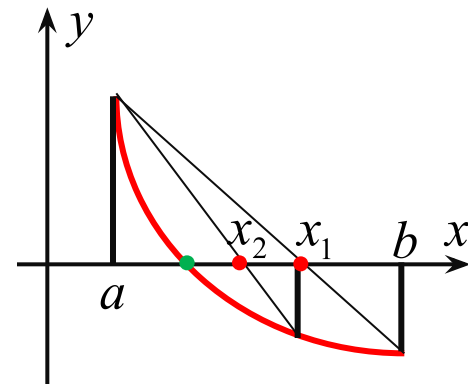
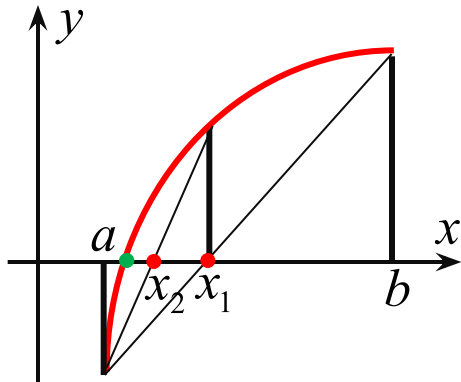
$$f' > 0$$
$$f'' > 0$$



$$f' < 0$$
$$f'' < 0$$

$$\{x_n\} \uparrow$$

$$f' > 0$$
$$f'' < 0$$



$$f' < 0$$
$$f'' > 0$$

$$\{x_n\} \downarrow$$

Метод хорд

$$x = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)$$

$$f' f'' > 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}$$

$$f' f'' < 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n-a)f(x_n)}{f(x_n)-f(a)}$$

Неподвижная точка в методе хорд – это тот конец отрезка (a или b) на котором совпадают знаки функции и второй производной, т.е.:

$$f(x) \cdot f''(x) > 0$$

Метод хорд

$$f' f'' > 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n)f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \quad \{x_n\} \uparrow, x_n \leq b \Rightarrow \exists x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$x = x - \frac{(b - x)f(x)}{f(b) - f(x)} \Rightarrow f(x) = 0$$

$$f' f'' < 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - a)f(x_n)}{f(x_n) - f(a)} \quad \{x_n\} \downarrow, x_n \geq a \Rightarrow \exists x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$x = x - \frac{(x - a)f(x)}{f(x) - f(a)} \Rightarrow f(x) = 0$$

Оценка погрешности приближенного корня

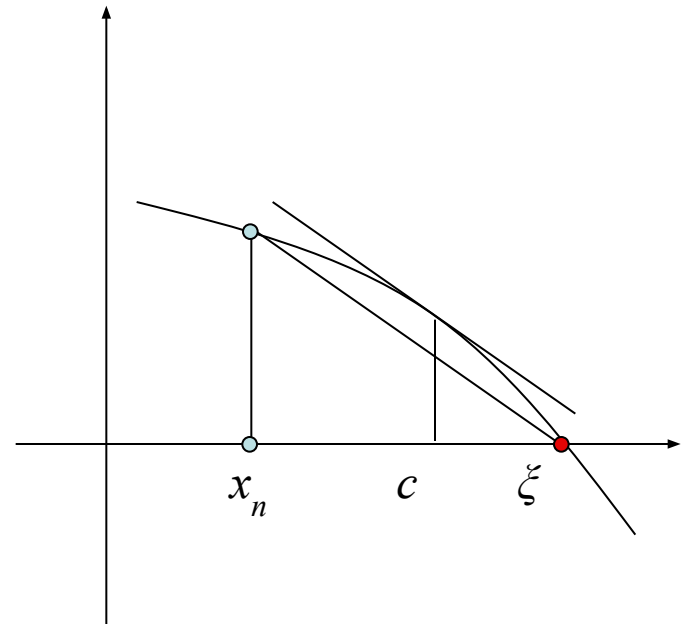
$$f(x) = 0 \Rightarrow f(\xi) = 0$$

$$f(x_n) - f(\xi) = f'(c)(x_n - \xi)$$

$$f(x_n) = f'(c)(x_n - \xi)$$

$$x_n - \xi = \frac{f(x_n)}{f'(c)}$$

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{\min_{x \in [a; b]} |f'(x)|}$$



$$\frac{|f(x_n)|}{\min_{x \in [a; b]} |f'(x)|} \leq \varepsilon$$

– условие окончания итераций, которое можно использовать в методах хорд и Ньютона

Метод хорд

оценка погрешности

$$|\xi - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|,$$

$$M \leq 2m, \quad M = \max_{x \in [a; b]} |f'(x)|, \quad m = \min_{x \in [a; b]} |f'(x)|.$$

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$$

Метод хорд (пример)

$$x + e^x = 0$$

$$f(x) = x + e^x$$

$$f'(x) = 1 + e^x$$

$$f''(x) = e^x$$

Функция строго возрастает и выпукла вниз на всей числовой прямой.

$$f(-1) = -1 + \frac{1}{e} < 0, \quad f(0) = 1 > 0,$$

$$a = -1, \quad b = 0, \quad x_0 = a = -1.$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n)f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} = x_n + \frac{x_n f(x_n)}{1 - f(x_n)} = \frac{x_n}{1 - f(x_n)}$$

$$f'(x) = 1 + e^x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad |x_n - x| \leq |f(x_n)|$$

Метод хорд (пример)

$$x + e^x = 0$$

$$f(x) = x + e^x$$

$$x_0 = -1, \quad d = 0,63$$

$$x_1 = -0,6126998368, \quad d = 0,07$$

$$x_2 = -0,5721814121, \quad d = 0,008$$

$$x_3 = -0,5677032142, \quad d = 0,0009$$

$$x_4 = -0,5672055526, \quad d = 0,0001$$

$$x_5 = -0,5671502142, \quad d = 0,00001$$

$$x_6 = -0,5671440604, \quad d = 0,0000012$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 - f(x_n)}$$

$$x_0 = -1$$

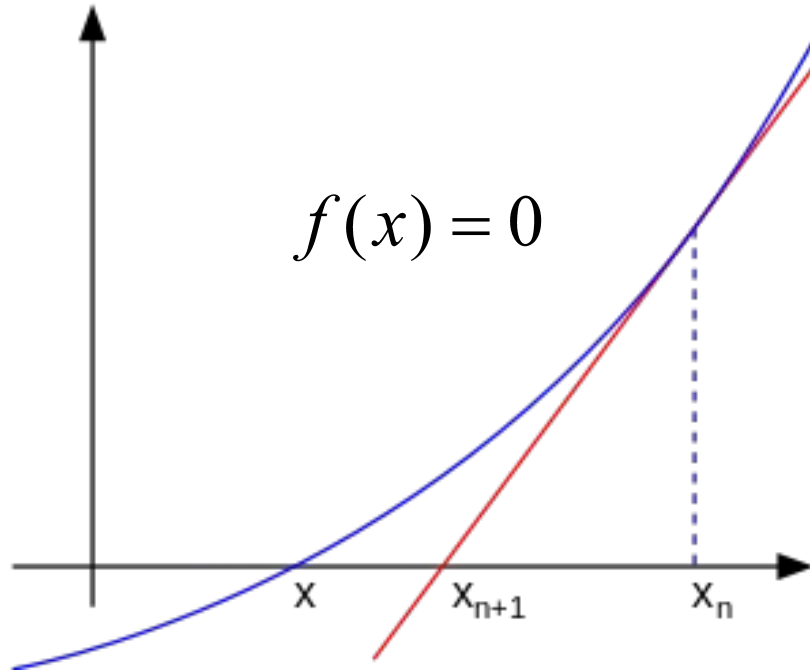
$$|x_n - x| \leq d$$

$$d = |f(x_n)|$$

$$x \approx -0,5671440604$$

$$10^{-5}$$

Метод Ньютона



$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

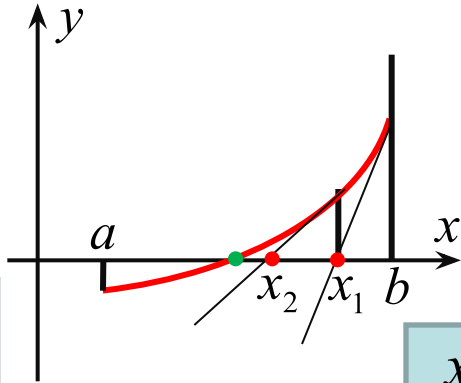
$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$$

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Метод Ньютона

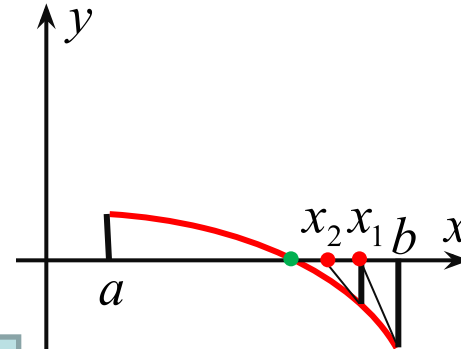
$f' > 0$
 $f'' > 0$



$\{x_n\} \downarrow$

$x_0 = b$

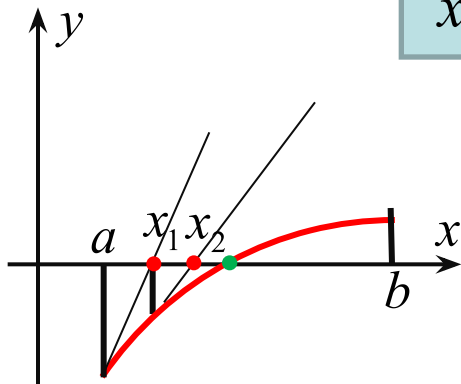
$f' < 0$
 $f'' < 0$



$\{x_n\} \downarrow$

$x_0 = b$

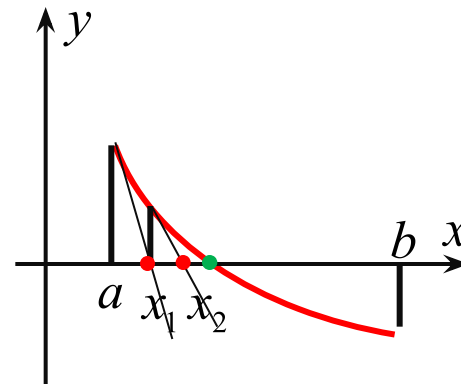
$f' > 0$
 $f'' < 0$



$x_0 = a$

$\{x_n\} \uparrow$

$f' < 0$
 $f'' > 0$



$\{x_n\} \uparrow$

$x_0 = a$

Метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$\{x_n\} \uparrow$ $\downarrow x, a \notin \{x_n\} \leq$ $\Rightarrow \exists x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow f(x) = 0$$

Метод Ньютона

$$M_2 \leq 2m_1, \quad M_2 = \max_{x \in [a; b]} |f''(x)|, \quad m_1 = \min_{x \in [a; b]} |f'(x)|$$

$$\boxed{|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon} \quad \longrightarrow \quad \boxed{|\xi - x_n| \leq \varepsilon^2}$$

Метод Ньютона (пример)

$$x + e^x = 0$$

$$f(x) = x + e^x$$

$$f'(x) = 1 + e^x$$

$$f''(x) = e^x$$

Функция строго возрастает и выпукла вниз на всей числовой прямой.

$$f(-1) = -1 + \frac{1}{e} < 0, \quad f(0) = 1 > 0,$$

$$a = -1, \quad b = 0, \quad x_0 = b = 0.$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f'(x) = 1 + e^x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad |x_n - x| \leq |f(x_n)|$$

Метод Ньютона (пример)

$$f(x) = x + e^x$$

$$f'(x) = 1 + e^x$$

$$x + e^x = 0$$

$$x_0 = 0, \quad d = 1$$

$$x_1 = -0,5, \quad d = 0,1$$

$$x_2 = -0,5663110032, \quad d = 0,0013$$

$$x_3 = -0,5671431650, \quad d = 0,0000002$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_0 = 0$$

$$|x_n - x| \leq d$$

$$d = |f(x_n)|$$

$$x \approx -0,567143 \dots$$

$$10^{-6}$$

Недостатки метода Ньютона

Недостатки:

1) Расходится в тех областях,
где $f'(x) \cong 0$

2) если функция $f(x)$ задана таблично,
то вычисление $f'(x)$ затруднено

Пути устранения:

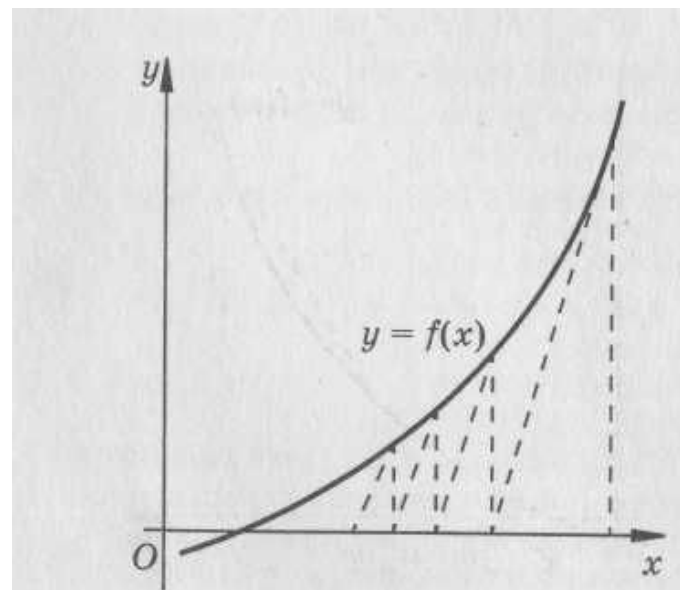
*Модифицированный
метод Ньютона*

Метод секущих

Модифицированный метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

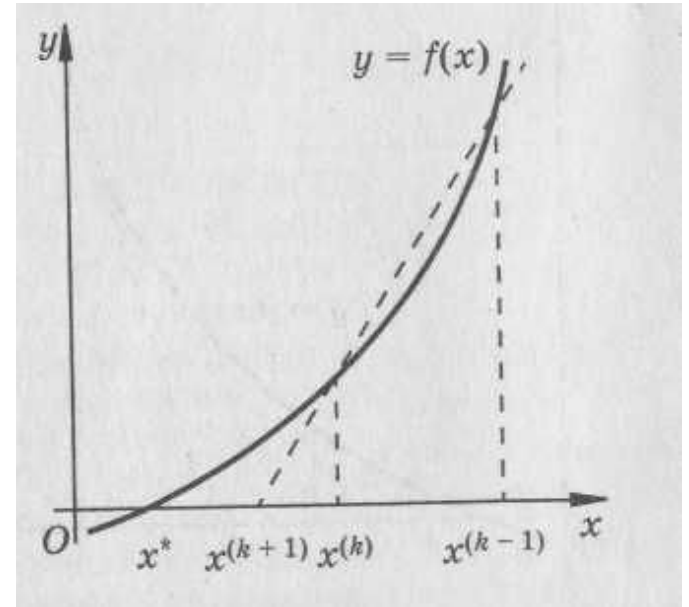
Метод Ньютона с постоянным значением производной имеет лишь **первый порядок сходимости**



Метод секущих

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$



Метод простой итерации

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = \varphi(x)$$

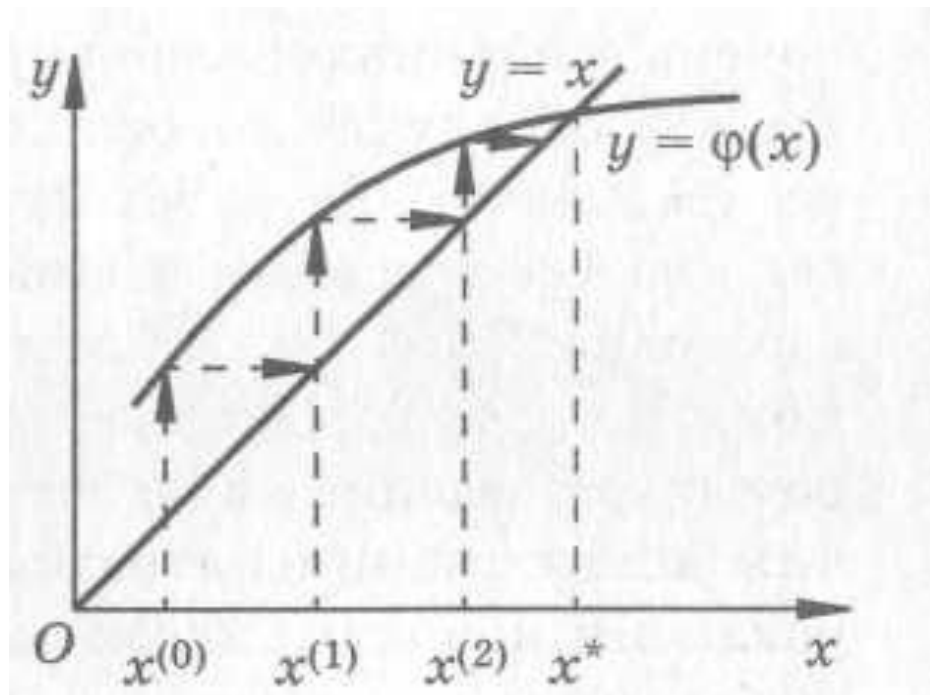
$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

**Достаточное условие
сходимости итераций**

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1$$

$$\forall x \in (a, b)$$



Метод простой итерации

Достаточное условие сходимости итераций

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1$$

$$\forall x \in (a, b)$$

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|$$

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-q}{q} \varepsilon$$

Метод простой итерации

$$x_k = \xi + \varepsilon_k, \quad x_{k+1} = \xi + \varepsilon_{k+1}$$

$$\varphi(x) \approx \varphi(\xi) + \varphi'(\xi)(x - \xi)$$

$$x = x_k$$

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

$$\xi + \varepsilon_{k+1} \approx \varphi(\xi) + \varphi'(\xi)(x_k - \xi)$$

$$\varepsilon_{k+1} \approx \varepsilon_k \varphi'(\xi)$$

$$|\varepsilon_{k+1}| < |\varepsilon_k|$$



$$|\varphi'(x)| \leq 1$$

Метод простой итерации

