Решение нелинейных уравнений

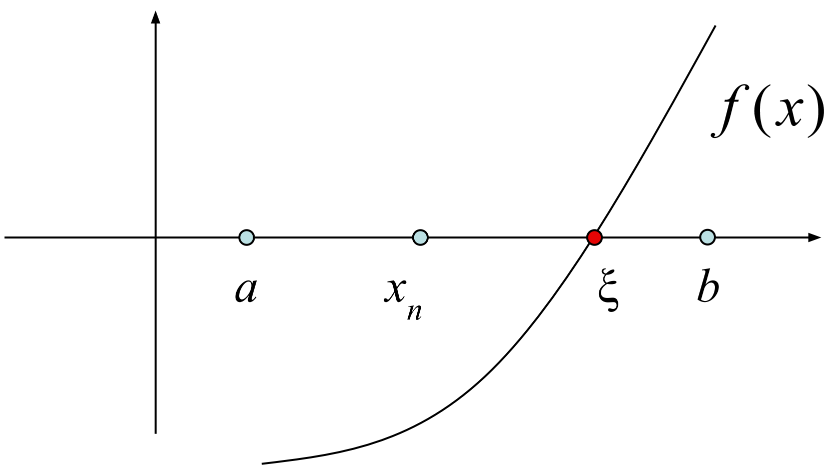
$$f(x) = 0$$

Уравнения

Алгебраические

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

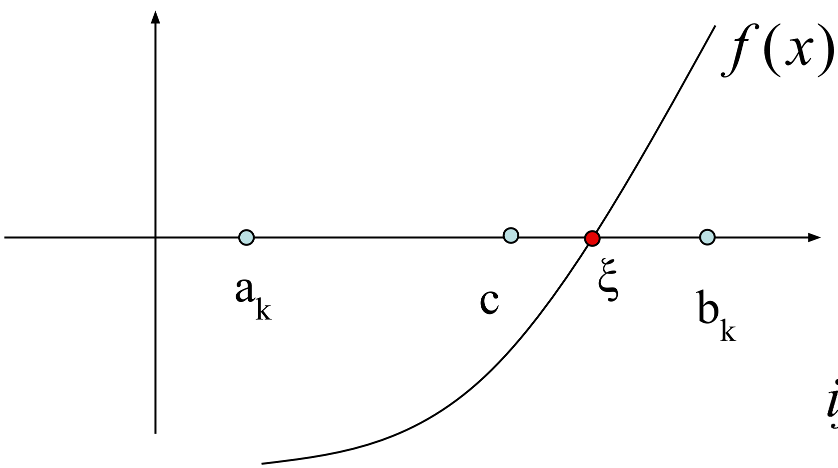
Трансцендентные



$$|x_n - \xi| \le \varepsilon$$

Метод дихотомии

$$f(x) = 0$$



$$c = \frac{a_k + b_k}{2}$$

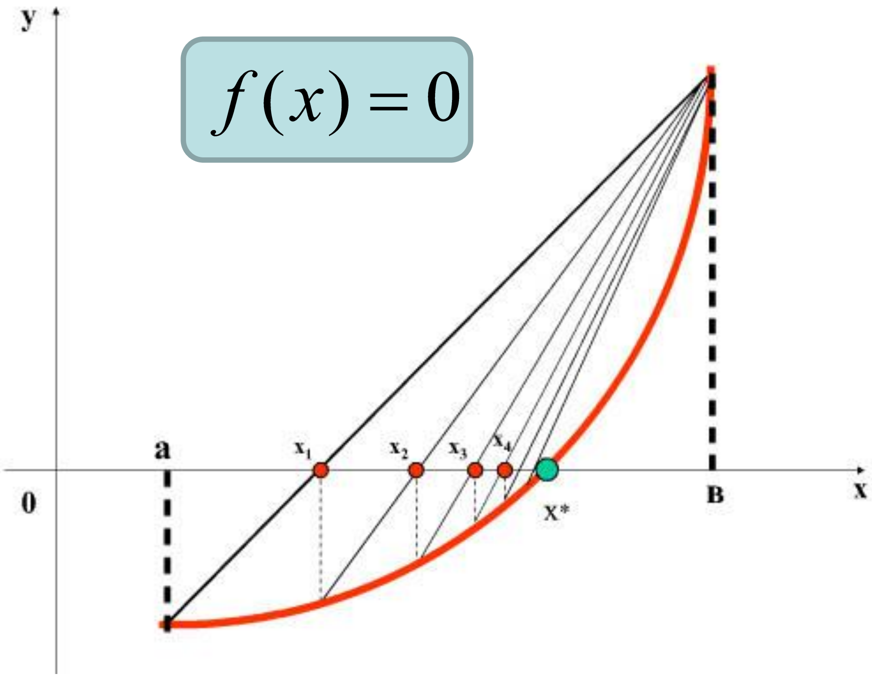
$$if \quad f(a_k)\cdot f(c) < 0 \;\Rightarrow\; a_{k+1} = a_k,\; b_{k+1} = c$$

$$f \quad f(c)\cdot f(b_k) < 0 \;\Rightarrow\; a_{k+1} = c,\; b_{k+1} = b_k$$

$$[a,b] = [a_0,b_0] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \ldots \supset [a_{k-},b_{k-}]$$

$$\left|b_k - a_k\right| \le \varepsilon$$

Метод хорд



$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

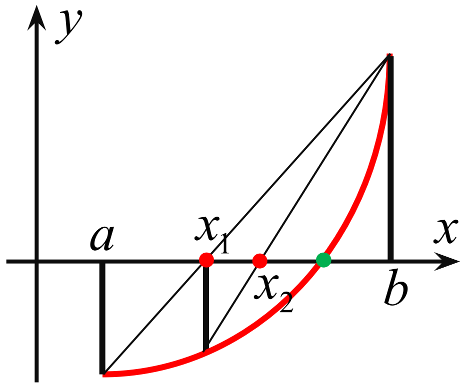
$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = 0$$

$$x = a - \frac{(b - a) f(a)}{f(b) - f(a)}$$

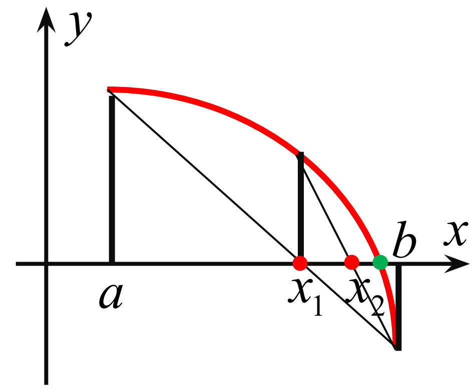
Метод хорд

$f' > 0$

$f'' > 0$



$\{x_n\}\uparrow$



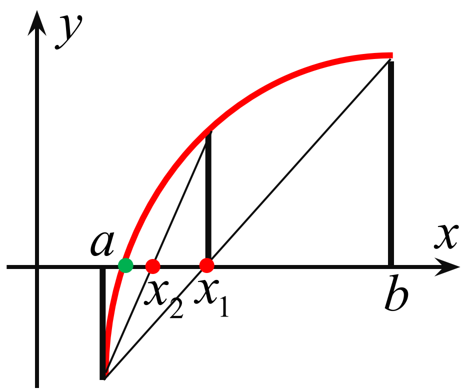
$f' < 0$

$f'' < 0$

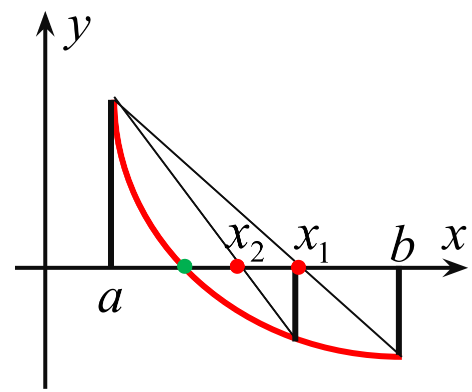
$\{x_n\}\uparrow$

$f' > 0$

$f'' < 0$



$\{x_n\}\downarrow$



$f' < 0$

$f'' > 0$

$\{x_n\}\downarrow$

Метод хорд

$$x = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)$$

$$f'f'' > 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}$$

$$f'f'' < 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n-a)f(x_n)}{f(x_n)-f(a)}$$

Неподвижная точка в методе хорд – это тот конец отрезка (*a* или *b*) на котором совпадают знаки функции и второй производной, т.е.:

$$f(x) \cdot f''(x) > 0$$

Метод хорд

$$\boxed{f'f''>0}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)} \qquad \{x_n\}\uparrow,\ x_n\le b \ \Rightarrow\ \exists\, x=\lim_{n\to\infty}x_n$$

$$x=x-\frac{(b-x)f(x)}{f(b)-f(x)} \ \Rightarrow\ \boxed{f(x)=0}$$

$$\boxed{f'f''<0}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(x_n-a)f(x_n)}{f(x_n)-f(a)} \qquad \{x_n\}\downarrow,\ x_n\ge a \ \Rightarrow\ \exists\, x=\lim_{n\to\infty}x_n$$

$$x=x-\frac{(x-a)f(x)}{f(x)-f(a)} \ \Rightarrow\ \boxed{f(x)=0}$$

Оценка погрешности приближенного корня

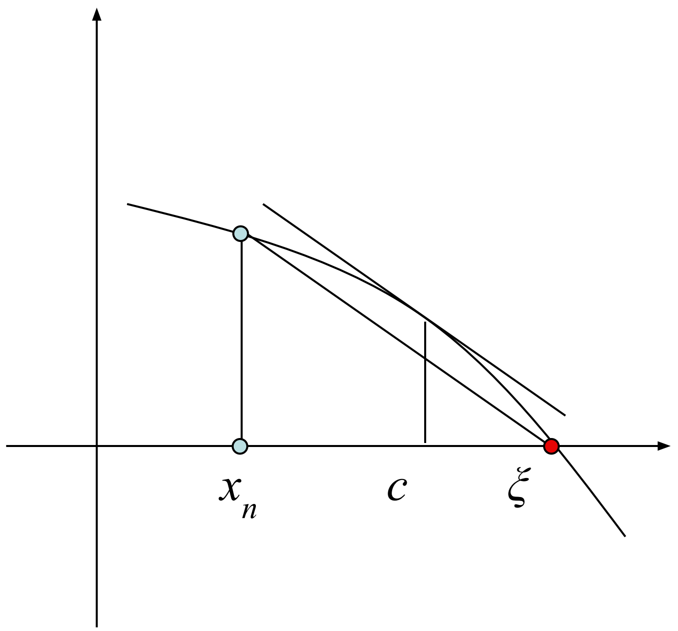
$$f(x)=0 \Rightarrow f(\xi)=0$$

$$f(x_n)-f(\xi)=f'(c)(x_n-\xi)$$

$$f(x_n)=f'(c)(x_n-\xi)$$

$$x_n-\xi=\frac{f(x_n)}{f'(c)}$$

$$|x_n-\xi|\le\frac{|f(x_n)|}{\min\limits_{x\in[a;b]}|f'(x)|}$$



$$\frac{|f(x_n)|}{\min\limits_{x\in[a;b]}|f'(x)|}\le\varepsilon$$

– условие окончания итераций, которое можно использовать в методах хорд и Ньютона

Метод хорд
оценка погрешности

$$\left|\xi - x_n\right| \le \left|x_n - x_{n-1}\right|,$$

$$M \le 2m,\ \ M = \max_{x\in[a;b]}\left|f'(x)\right|,\ m = \min_{x\in[a;b]}\left|f'(x)\right|.$$

$$\boxed{\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \varepsilon}$$

Метод хорд (пример)

$$x + e^x = 0$$

$$f(x) = x + e^x$$

$$f'(x) = 1 + e^x$$

$$f''(x) = e^x$$

Функция строго возрастает и выпукла вниз на всей числовой прямой.

$$f(-1) = -1 + \frac{1}{e} < 0, \ \ f(0) = 1 > 0,$$

$$a = -1, \ \ b = 0, \ \ x_0 = a = -1.$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n) f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} = x_n + \frac{x_n f(x_n)}{1 - f(x_n)} = \frac{x_n}{1 - f(x_n)}$$

$$f'(x) = 1 + e^x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad | x_n - x | \leq | f(x_n) |$$

Метод хорд (пример)

$$x + e^x = 0$$

$$f(x) = x + e^x$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 - f(x_n)}$$

$$x_0 = -1$$

$$|x_n - x| \leq d$$

$$d = |f(x_n)|$$

$x_0 = -1, \quad d = 0,63$

$x_1 = -0,6126998368, \quad d = 0,07$

$x_2 = -0,5721814121, \quad d = 0,008$

$x_3 = -0,5677032142, \quad d = 0,0009$

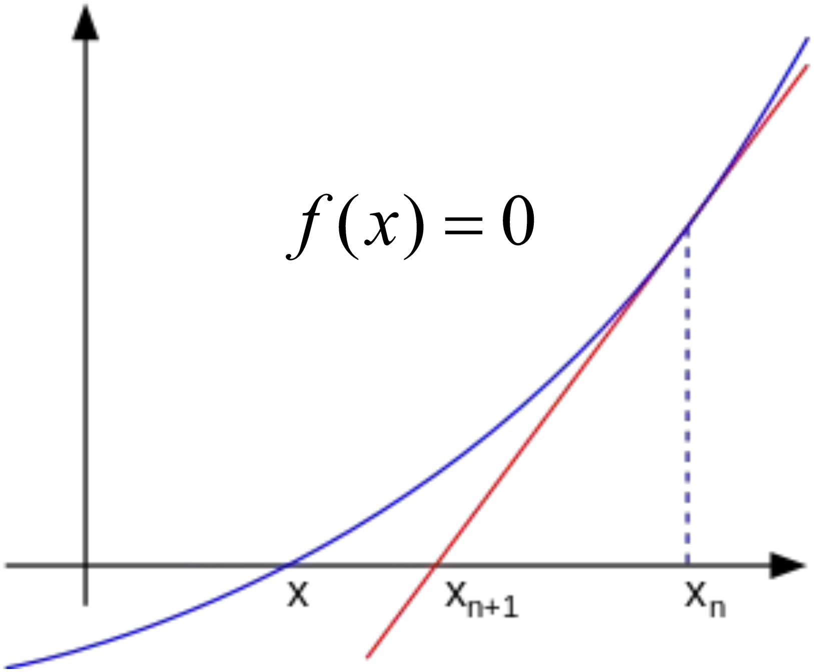
$x_4 = -0,5672055526, \quad d = 0,0001$

$x_5 = -0,5671502142, \quad d = 0,00001$

$x_6 = -0,5671440604, \quad d = 0,0000012$

$x \approx -0,56714$ *с точностью до* 10^{-5}

Метод Ньютона



$$f(x) = 0$$

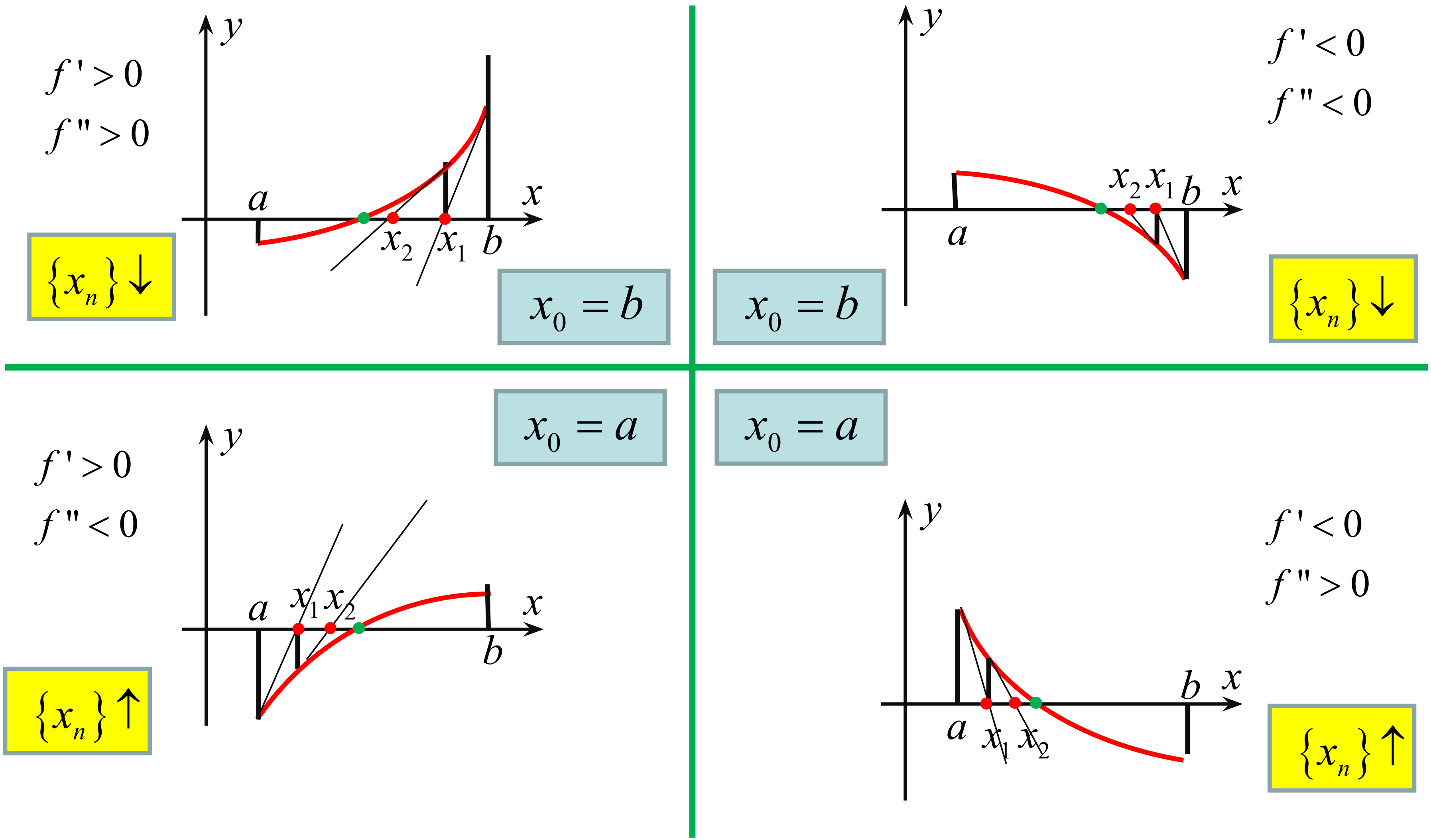
$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$$

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Метод Ньютона



Метод Ньютона

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

$\{x_n\} \uparrow$ или $\downarrow$, $a \le x_n \le b \Rightarrow \exists\ x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow \boxed{f(x) = 0}$$

Метод Ньютона

$$M_2 \le 2m_1,\ \ M_2 = \max_{x\in[a;b]}\left|f''(x)\right|,\ m_1 = \min_{x\in[a;b]}\left|f'(x)\right|$$

$$\boxed{\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \varepsilon} \Longrightarrow \boxed{\left|\xi - x_n\right| \le \varepsilon^2}$$

Метод Ньютона (пример)

$$x + e^x = 0$$

$$f(x) = x + e^x$$

$$f'(x) = 1 + e^x$$

$$f''(x) = e^x$$

Функция строго возрастает и выпукла вниз на всей числовой прямой.

$$f(-1) = -1 + \frac{1}{e} < 0, \quad f(0) = 1 > 0,$$

$$a = -1, \quad b = 0, \quad x_0 = b = 0.$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f'(x) = 1 + e^x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad |x_n - x| \leq |f(x_n)|$$

Метод Ньютона (пример)

$$x + e^x = 0$$

$$f(x) = x + e^x$$

$$f'(x) = 1 + e^x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_0 = 0$$

$$|x_n - x| \le d$$

$$d = |f(x_n)|$$

$$x_0 = 0, \quad d = 1$$

$$x_1 = -0,5, \quad d = 0,1$$

$$x_2 = -0,5663110032, \quad d = 0,0013$$

$$x_3 = -0,5671431650, \quad d = 0,0000002$$

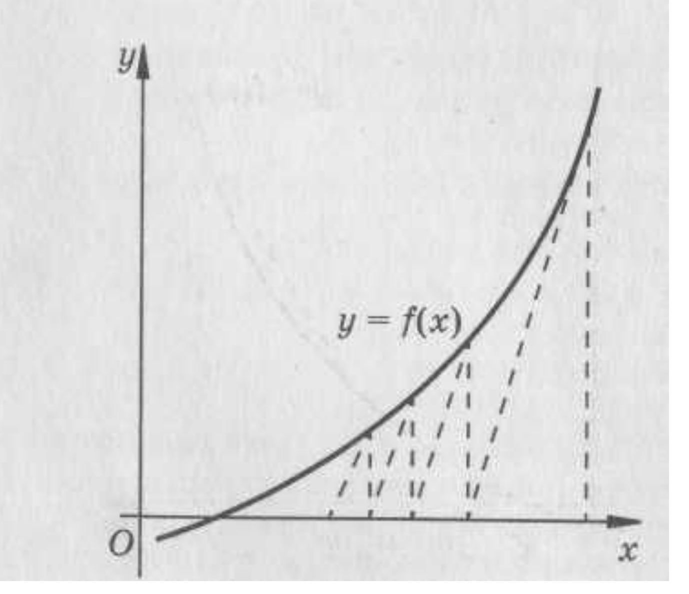
$x \approx -0,567143$ *с точностью до* 10^{-6}

Недостатки метода Ньютона

Недостатки:	
1) Расходится в тех областях, где $f'(x) \cong 0$	2) если функция *f(x)* задана таблично, то вычисление $f'(x)$ затруднено
Пути устранения:	
Модифицированный метод Ньютона	***Метод секущих***

Модифицированный метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

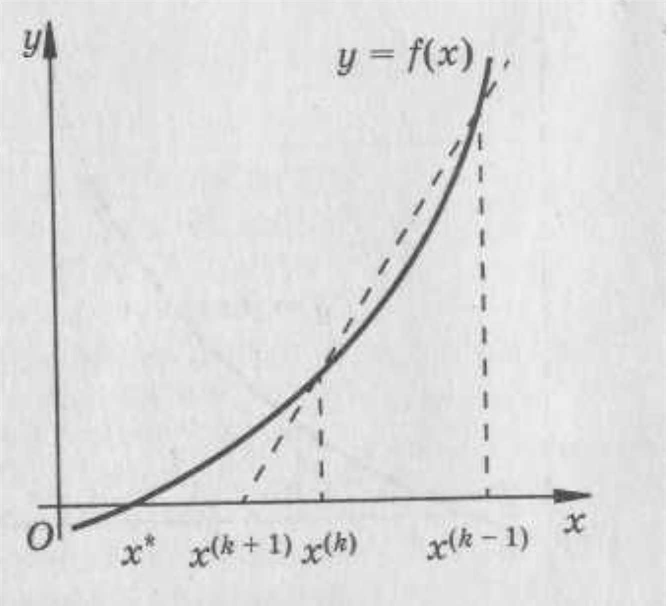


Метод Ньютона с постоянным значением производной имеет лишь ***первый порядок сходимости***

Метод секущих

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}$$



Метод простой итерации

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \varphi(x)$$

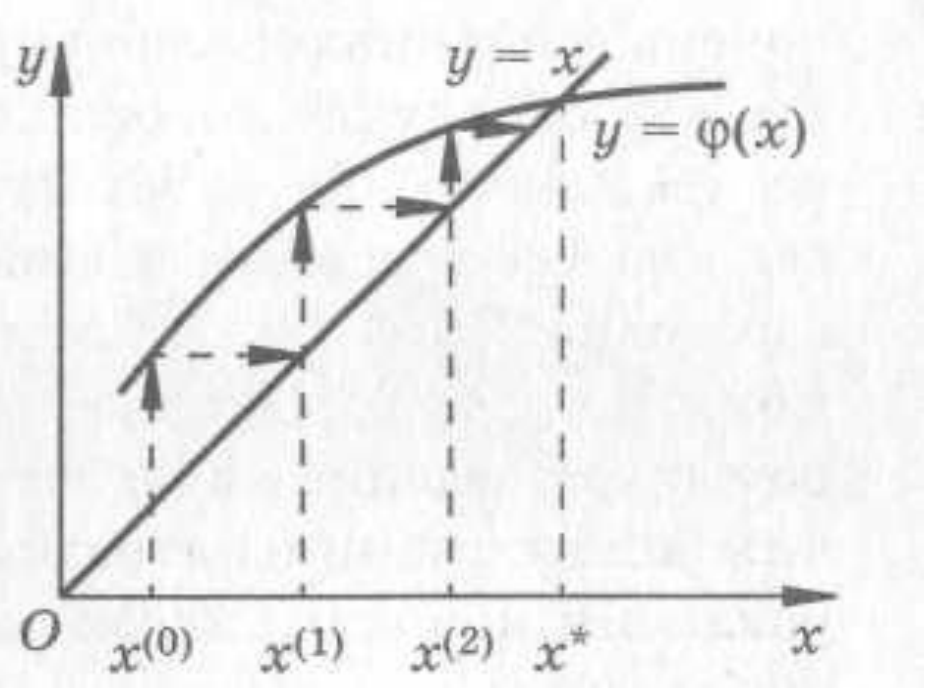
$$\boxed{x_{n+1} = \varphi(x_n)}$$

n = 0, 1, 2, …,

Достаточное условие сходимости итераций

$$|\varphi'(x)| \le q < 1$$

$$\forall \; x \in (a, b)$$



Метод простой итерации

Достаточное условие сходимости итераций

$$|\varphi'(x)| \le q < 1$$

$$\forall \;\; x \in (a, b)$$

$$|\xi - x_n| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$$

$$\boxed{|x_n - x_{n-1}| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon}$$

Метод простой итерации

$$x_k = \xi + \varepsilon_k, \; x_{k+1} = \xi + \varepsilon_{k+1}$$

$$\varphi(x) \approx \varphi(\xi) + \varphi'(\xi)(x - \xi)$$

$$x = x_k$$

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

$$\xi + \varepsilon_{k+1} \approx \varphi(\xi) + \varphi'(\xi)(x_k - \xi)$$

$$\varepsilon_{k+1} \approx \varepsilon_k \varphi'(\xi)$$

$$|\varepsilon_{k+1}| < |\varepsilon_k| \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\varphi'(x)| \le 1}$$

Метод простой итерации