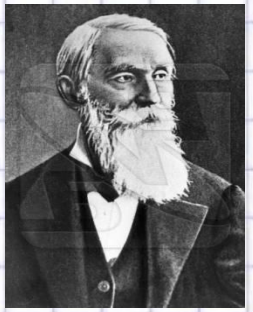
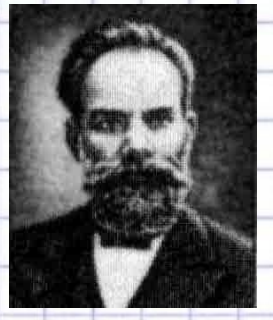
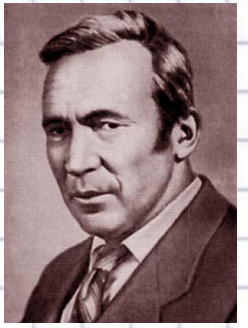
# Основы теории вероятности

## Основные понятия и определения

В современном мире автоматизации производства теория вероятности (Т.В) необходима специалистам для решения задач, связанных с выявлением возможного хода процессов, на которые влияют случайные факторы(например, ОТК: сколько бракованных изделий будет изготовлено). Возникла Т.В. в 17 веке в переписке Б. Паскаля и П. Ферма, где они производили анализ азартных игр. Советские и русские ученые также принимали участие в развитии этого раздела математики: П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов, А.Н. Колмогоров.



*Определение* Под ***случайным событием*** понимается всякое явление, о котором имеет смысл говорить, что оно происходит или не происходит.

События являются результатами различных опытов, измерений, наблюдений.

***Достоверным*** назовем событие которое обязательно произойдет при выполнении определенного количества условий.

***Невозможным*** назовем событие которое не происходит при выполнении определенного количества условий.

**Пример:**

1. **Извлечение белого шара из ящика, в котором все шары белые**
2. **Извлечение черного шара из ящика, в котором все шары белые**

## Примеры:

1)Из ящика с разноцветными шарами наугад вынимают черный шар.

2)При бросании игральной кости выпала цифра 7.

3)При телефонном вызове абонент оказался занят.

4)Попадание в мишень при выстреле

5)Выпущенное изделие оказалось бракованным

6)Извлечь из колоды карт туза пик

**Случайные события обозначаются большими латинскими буквами *A, B, C,…***

Если возможные исходы (результаты) опыта являются событиями несовместными, достоверными, то каждый из результатов испытания назовем ***элементарным исходом***. Те элементарные исходы, при которых интересующее нас событие наступает назовем ***благоприятствующими этому событию исходами.***

## Классическое определение вероятности

Вероятностью события $A$ называется отношение числа $m$ элементарных исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу элементарных исходов испытания $n$.

Обозначение: $$p = p(A) = \frac{m}{n}$$

## *Свойства*

$1^0$. $0 \le P(a) \le 1$.

$2^0$. Для достоверного события ***m=n*** и ***P(a)=1.***

$3^0$. Для невозможного события ***m=0*** и ***P(a)=0.***

# Пример

1. Найти вероятность выпадения цифры «6» на игральной кости
2. Монету подбрасывают 2 раза. Найти вероятность того, что оба раза выпадет орел.
3. Найти вероятность извлечения карты бубновой масти из колоды в 36 карт
4. На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет чётной?

# Операции над событиями и их вероятностями

Мы говорим о ***сумме событий***, когда может наступить хотя бы одно из двух событий или А, или В, или оба вместе.

**«Или – правило»**

Мы говорим о ***произведении событий*** при наступлении и А, и В одновременно.

**«И – правило»**

# Действия с вероятностями

- **Правило сложения вероятностей:** если A и B несовместимые события, то вероятность того, что наступит хотя бы одно из двух событий **A или B**, равна сумме их вероятностей.

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

- **Правило умножения вероятностей:** если A и B независимые события, то вероятность одновременного наступления обоих событий **A и B**, равна произведению их вероятностей.

# Следствия из правил

1. Противоположные события

$\overline{A}$ - противоположное событию А.

Означает, что событие А не наступает.

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1$$

2. Событие А наступит хотя бы один раз

$$p = 1 - p(\overline{A_1}) \cdot p(\overline{A_2}) \cdot \ldots$$

Приведенную формулу сложения применяем только для несовместимых событий, т.е. в случае, если они не могут произойти вместе. **Например,** не может один ученик писать экзамен сразу в двух аудиториях.

Приведенную формулу умножения применяем только для независимых событий, когда результат одного из них не связан с результатом другого.

**Например,** при бросании двух игральных костей ни одна из них "не знает", какое число очков выпало на другой

- **Правило сложения вероятностей для совместимых событий:** вероятность суммы двух совместимых событий равна сумме их вероятностей за вычетом вероятности их произведения.
  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$
- **Правило умножения вероятностей для зависимых событий:** вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло.
  $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$

# Пример

1. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

# Решение

Запишем, как могло случиться, что "Джон промахнулся".
"Ковбой схватил пристрелянный револьвер **И** не попал в муху, **ИЛИ** ковбой схватил непристрелянный револьвер **И** не попал в муху.»

$$0{,}4 \cdot 0{,}1 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}04 + 0{,}48 = 0{,}52.$$

2. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение.

События A = "кофе закончится в первом автомате" и B = "кофе закончится во втором автомате" **не являются несовместными**, так как кофе может закончиться в **обоих автоматах**, и **не являются независимыми**, так как, если в одном из них кофе закончится, то во второй автомат покупатели будут обращаться чаще, и кофе в нем закончится скорее.

По условию задачи P(A) = P(B) = 0,3; P(AB) = 0,12

Событие "кофе останется в обоих автоматах" противоположно событию "кофе закончится хотя бы в одном из автоматов ИЛИ в первом, ИЛИ во втором, ИЛИ в обоих". Найдем вероятность этого (противоположного) события по правилу сложения вероятностей для совместимых событий.

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0,3 + 0,3 - 0,12 = 0,48$

Тогда искомая вероятность равна $1 - 0,48 = 0,52$

# Задачи по теме:
# «Вероятность. Понятие события и вероятности события»

1. В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

2. **Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов — первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?**

3. **Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 спортсменов из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.**

4. В классе 26 учащихся, среди них два друга — Андрей и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

5. **Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 10, но не дойдя до отметки 1.**

6. **У Вити в копилке лежит 12 рублёвых, 6 двухрублёвых, 4 пятирублёвых и 3 десятирублёвых монеты. Витя наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит более 70 рублей**

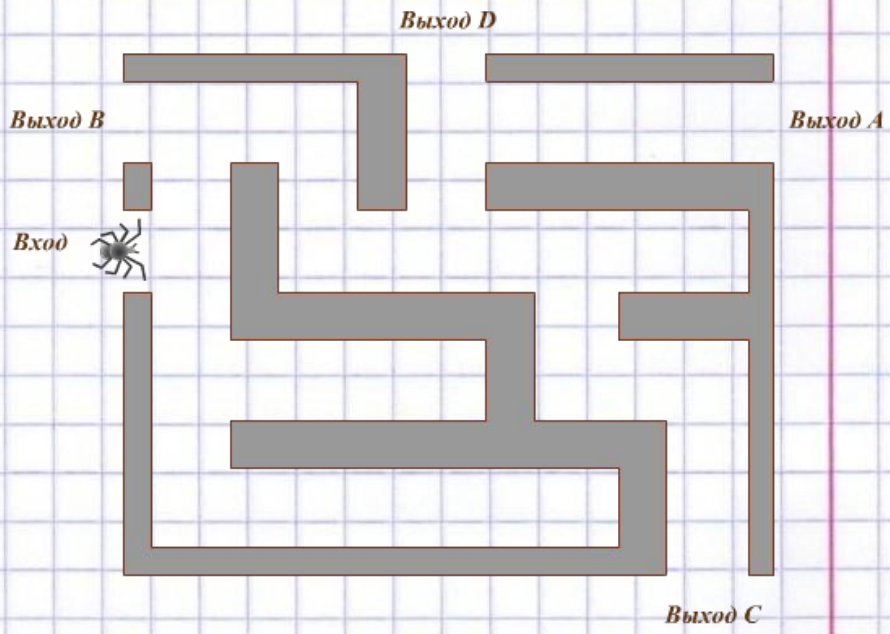
7. На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене

8. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность

9. Вероятность того, что новый сканер прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что сканер прослужит меньше двух лет, но больше года.

10. В уличном фонаре 3 лампы. Вероятность перегорания лампы в течение года равна 0,8. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

11. На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке "*Вход*". Развернуться и ползти назад паук не может, поэтому на каждом разветвлении паук выбирает один из путей, по которому ещё не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу ***D***.



# Домашнее задание

1. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус . Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров равна 0,82. Вероятность того, что окажется меньше 10 пассажиров равна 0,51. Найдите вероятность того что, число пассажиров будет от 10 до 17.
2. Биатлонист стреляет по мишеням. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист поразит все пять мишеней.
3. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Геолог» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Геолог» выиграет жребий ровно два раза.

**Ответы:** 1. 0,51 2. 0,32768 3. 0,375