Тема 4. Методы расчёта разветвленных цепей постоянного тока

Учебные вопросы:

№1 Метод Законов Кирхгофа;

№2 Метод Контурных токов;

№3 Метод наложения;

№4 Эквивалентные преобразования

Сложные (разветвленные) цепи содержат большое число ветвей, соединенных между собой в узлах и образующих контуры.

Ветвью называют участок цепи, на котором все элементы соединены последовательно друг за другом, и через них протекает один и тот же ток.

Узлом называют место (точку) соединения трех и более ветвей.

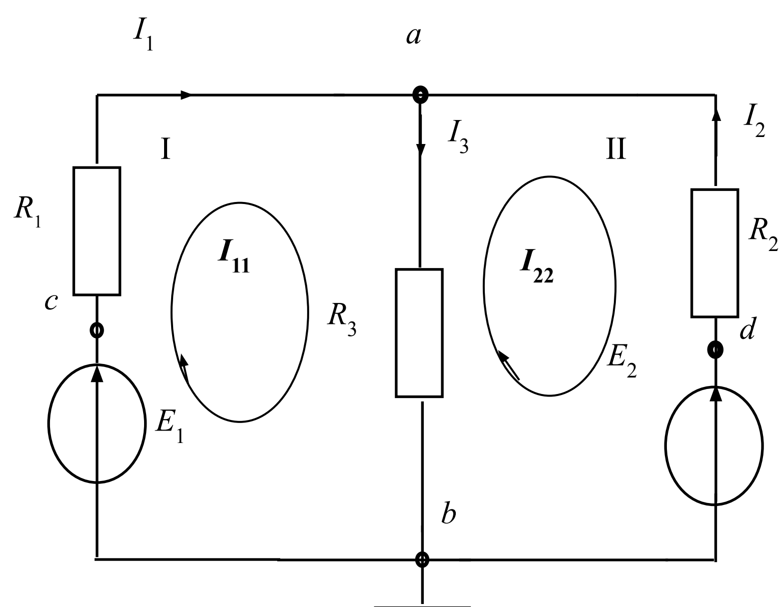
Контуром называют любой замкнутый путь в цепи, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же точке.

Совокупности контуров, в каждом из которых есть хотя бы одна ветвь, не входящая в другие контуры, называются линейно независимыми контурами.

Цепь на рисунке содержит три ветви с токами I1, I2, I3, которые соединяются в двух узлах – «a» и «b».

Контуры цепи: b – c – a – b, b – a – d – b, b – c – a – d – b.

Независимыми являются контуры b – c – a – b и b – a – d – b.



Расчеты разветвленных цепей

основываются на двух законах Кирхгофа.

- ***Первый закон Кирхгофа*** относится к узлам цепи:

$$\left(\sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{n}} \boldsymbol{I}_{\mathbf{k}} = 0 \right)$$

Алгебраическая сумма токов в узле равна нулю.

Или сумма токов, притекающих к узлу, равна сумме токов, вытекающих из узла.

- ***Второй закон Кирхгофа*** относится к узлам цепи:

В любом замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма ЭДС равна алгебраической сумме напряжений на пассивных элементах цепи (на резисторах для цепи постоянного тока):

$$\sum_{k=1}^{n} E = \sum_{k=1}^{n} UR = \text{или} \sum_{k=1}^{n} E = \sum_{k=1}^{n} RI.$$

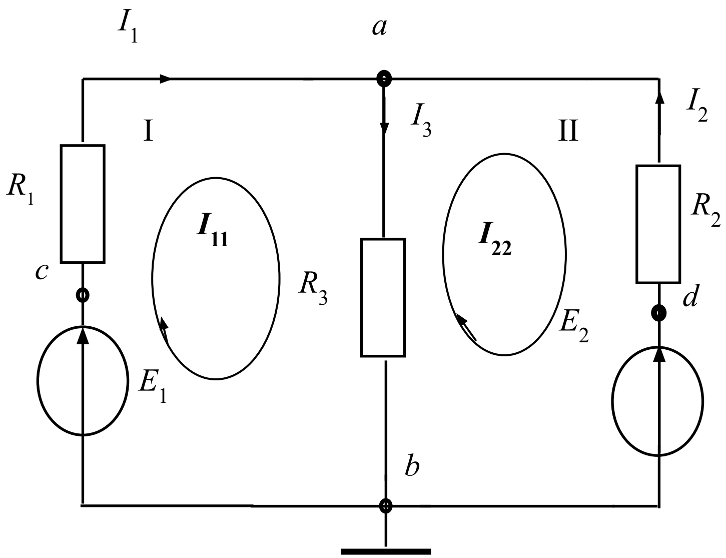
Метод контурных токов

При использовании метода контурных токов уравнения составляют только по второму закону Кирхгофа для контуров. При этом условно считают, что через все элементы рассматриваемого контура протекает один и тот же контурный ток, направление которого совпадает с направлением обхода контура.

Решив полученную систему уравнений, определяют контурные токи, а затем токи в ветвях цепи как ***алгебраическую сумму соответствующих контурных токов,*** замыкающихся через данную ветвь.

Если в один из контуров входит ветвь с источником тока, его схему предварительно можно преобразовать в эквивалентную схему источника ЭДС (если это возможно) или контурный ток контура с источником тока принять равным току этого источника тока.

Метод контурных токов. Пример.



Произвольно выбираем направления обхода контуров по часовой стрелке.

Составляем систему уравнений по второму закону Кирхгофа относительно двух контурных токов I_{11} и I_{22}:

$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_3) - I_{22} R_3 = E_1; \\ -I_{11} R_3 + I_{22}(R_2 + R_3) = -E_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25\, I_{11} - 20\, I_{22} = 100; \\ -20 I_{11} + 30 I_{22} = -50. \end{cases}$$

Решаем систему уравнений и определяем контурные токи:

$$\begin{cases} I_{11} = 5{,}714 \text{ А}; \\ I_{22} = -2{,}143 \text{ А}. \end{cases}$$

Определяем токи в ветвях:

$I_1 = I_{11} = 5{,}714$ А;

$I_2 = I_{22} = -2{,}143$ А;

$I_3 = I_{11} + I_{22} = 3{,}571$ А.

Метод наложения

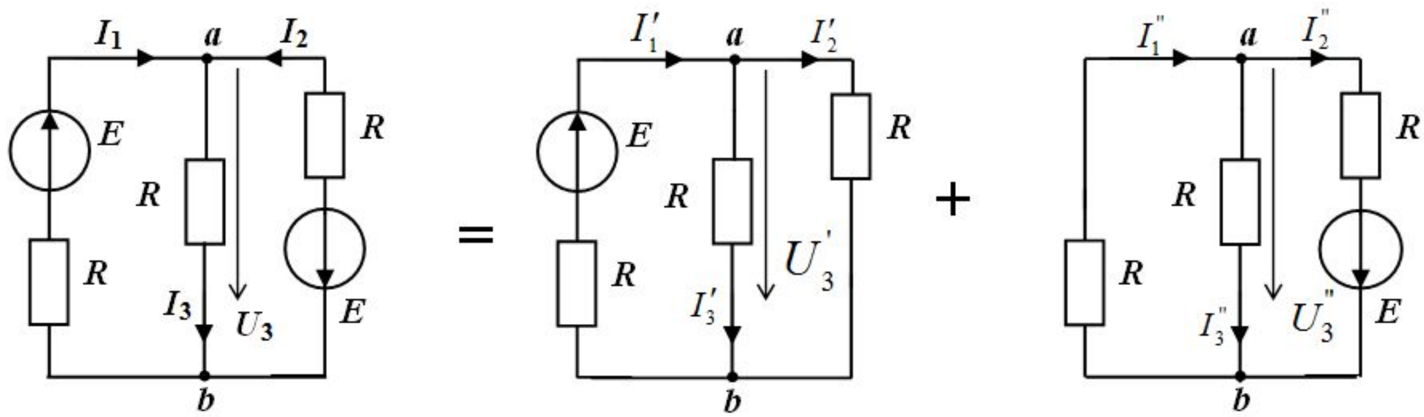
Для линейных электрических цепей справедлив принцип наложения.

Его физический смысл состоит в том, что суммарную реакцию электрической цепи на воздействие нескольких источников энергии можно определить как сумму воздействий от каждого источника в отдельности.

Например, ток в любой ветви линейной электрической цепи с несколькими источниками электрической энергии равен алгебраической сумме токов, вызываемых в этой ветви каждым из источников в отдельности.

Метод наложения. Пример.

В электрической цепи определить токи в ветвях методом наложения.



а.   б.   в.

Метод наложения. Пример.

1. Определяем токи в схеме (рис. б) при действии только источника ЭДС E_1 ($E_2 = 0$):

$$I_1' = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = 8{,}572 \text{ А};$$

$$U'_{\mathrm{ab}} = I_1' R_{23} = 57{,}15 \text{ В};$$

$$I'_2 = \frac{U'_{\mathrm{ab}}}{R_2} = 5{,}715 \text{ А};$$

$$I'_3 = \frac{U'_{\mathrm{ab}}}{R_3} = 2{,}857 \text{ А}.$$

Метод наложения. Пример.

2. Определяем токи (рис. в) при действии источника ЭДС E_2 ($E_1 = 0$):

$$I_2'' = \frac{E_2}{R_2 + \dfrac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} = 3{,}571 \text{ А};$$

$$U_{\text{ba}}'' = I_2'' R_{13} = 14{,}286 \text{ В};$$

$$I_1'' = \frac{U_{\text{ba}}''}{R_1} = 2{,}857 \text{ А};$$

$$I_3'' = \frac{-U_{\text{ba}}''}{R_3} = -0{,}714 \text{ А}.$$

Метод наложения. Пример.

3. Определяем токи в исходной схеме как алгебраическую сумму частичных токов (рис. а):

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 11{,}43 \text{ А};$$

$$I_2 = -I_2' - I_2'' = -9{,}286 \text{ А};$$

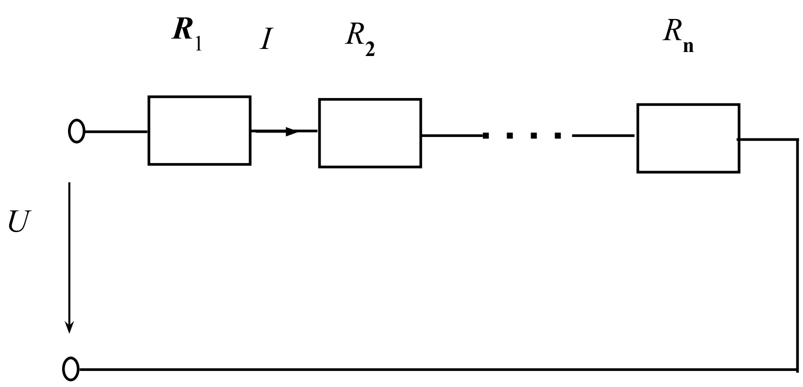
$$I_3 = I_3' + I_3'' = 2{,}144 \text{ А}.$$

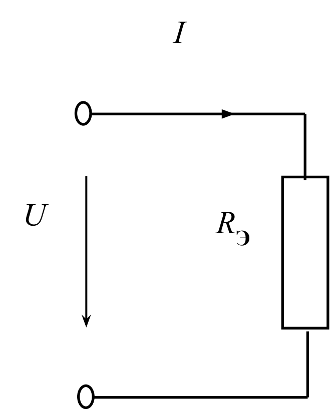
Принцип наложения справедлив только лишь применительно к напряжениям и токам и не относится к мощности.

Преобразование схем электрических цепей

- ***Последовательно соединенные резисторы*** с сопротивлениями R_1 , R_2 ,..., R_n можно заменить одним резистором с эквивалентным сопротивлением *R*Э, равным сумме сопротивлений всех резисторов:

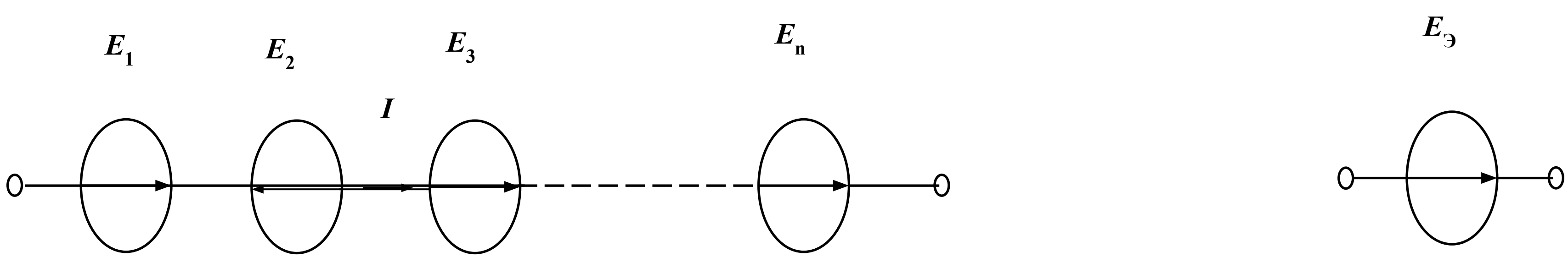
$$R_э = R_1 + R_2 + \ldots + R_n.$$



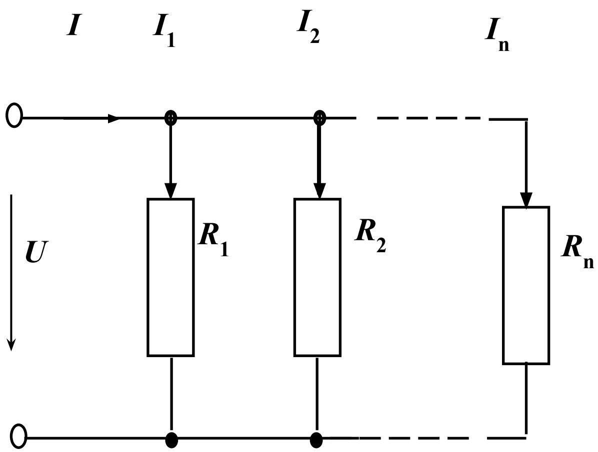


- ***Последовательно соединенные источники энергии*** с ЭДС E_1 , E_2 , ..., E_n можно заменить одним источником с эквивалентной ЭДС, равной алгебраической сумме ЭДС отдельных источников:

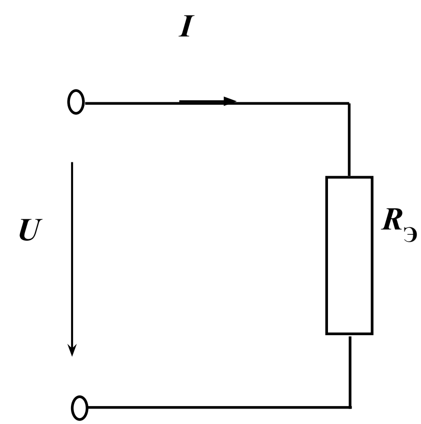
$$E_Э = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{E}_k$$



- ***Параллельно соединенные резисторы*** с сопротивлениями R_1, R_2, ... , R_n можно заменить одним резистором с эквивалентным сопротивлением $R_э$:

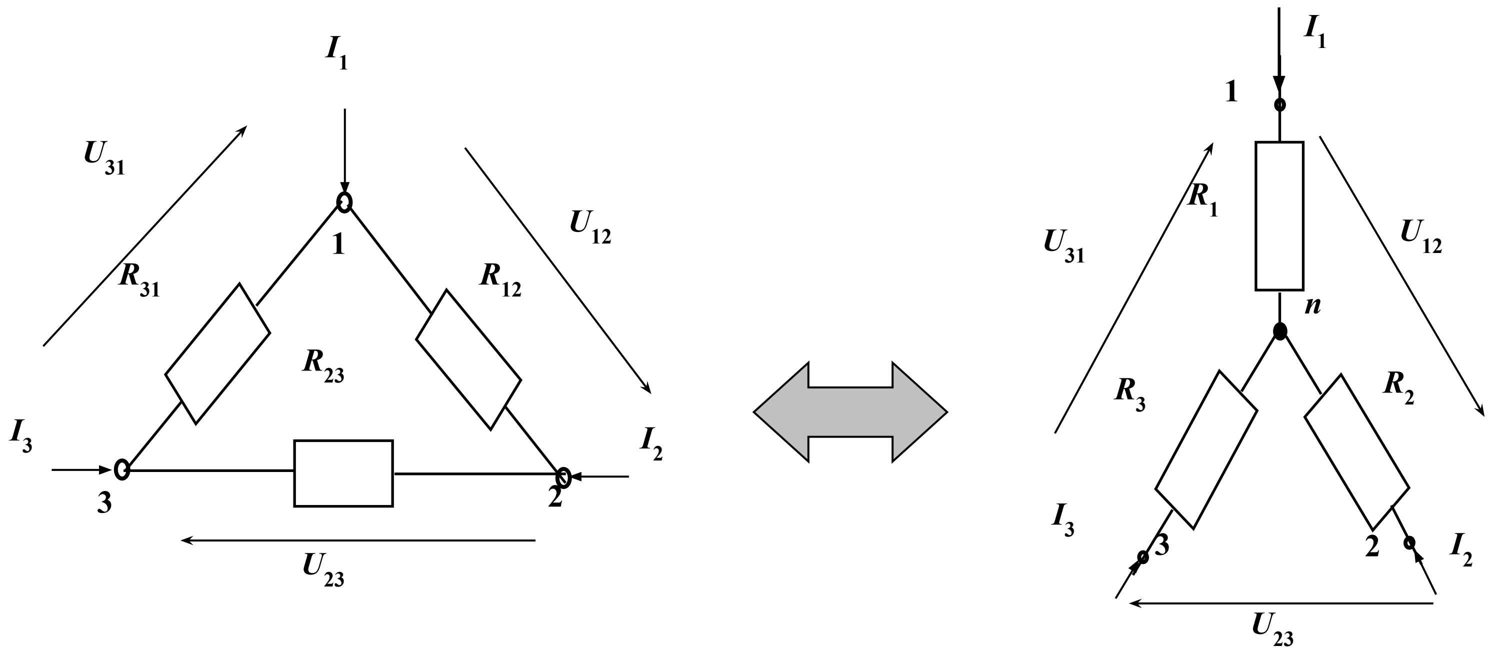


$$R_Э = \frac{1}{G_Э}, \; G_Э = \sum_{k=1}^{n} G_k$$



Сопротивления резисторов в ветвях **эквивалентной звезды** равны:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}; \qquad R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}; \qquad R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$



Рассмотрим преобразование “треугольника” в “звезду”. Для “треугольника” запишем уравнение баланса напряжений (второй закон Кирхгофа):

$$\underline{U}_{ab}+\underline{U}_{bc}+\underline{U}_{ca}=\underline{I}_{ab}\underline{Z}_{ab}+\underline{I}_{bc}\underline{Z}_{bc}+\underline{I}_{ca}\underline{Z}_{ca}=0$$

.

Исключим из этого уравнения токи I_{bc} и I_{ca}, выразив их через ток I_{ab} и входные токи (первый закон Кирхгофа):

$$\underline{I}_{ab}\underline{Z}_{ab}+\left(\underline{I}_{ab}+\underline{I}_{b}\right)\underline{Z}_{bc}+\left(\underline{I}_{ab}-\underline{I}_{a}\right)\underline{Z}_{ca}=0$$

$$\underline{I}_{ab}=\frac{\underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{ab}+\underline{Z}_{bc}+\underline{Z}_{ca}}\underline{I}_{a}-\frac{\underline{Z}_{bc}}{\underline{Z}_{ab}+\underline{Z}_{bc}+\underline{Z}_{ca}}\underline{I}_{b}$$

Напряжение между выводами a и b (разность потенциалов) в схеме “треугольник”:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I}_{ab}\,\underline{Z}_{ab} = \frac{\underline{Z}_{ca}\,\underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}\,\underline{I}_{a} - \frac{\underline{Z}_{bc}\,\underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}\,\underline{I}_{b}$$

Напряжение между выводами ***a*** и ***b*** в схеме “звезда”

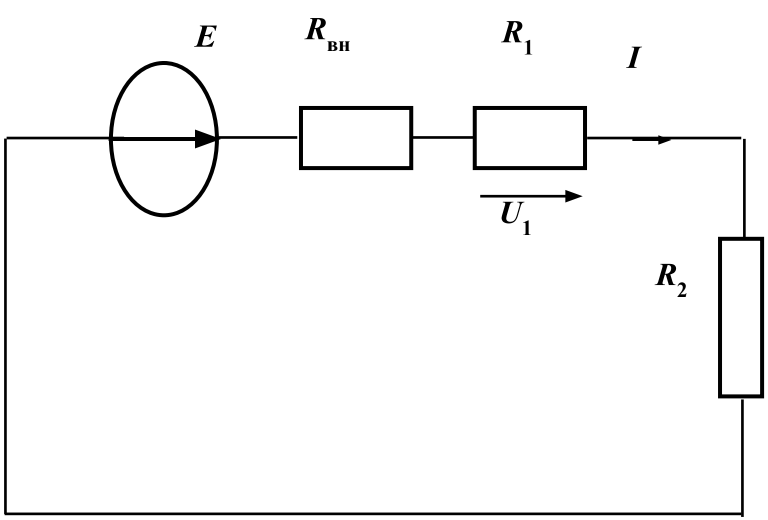
$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{a} - \underline{U}_{b} = \underline{Z}_{a}\,\underline{I}_{a} - \underline{Z}_{b}\,\underline{I}_{b}$$

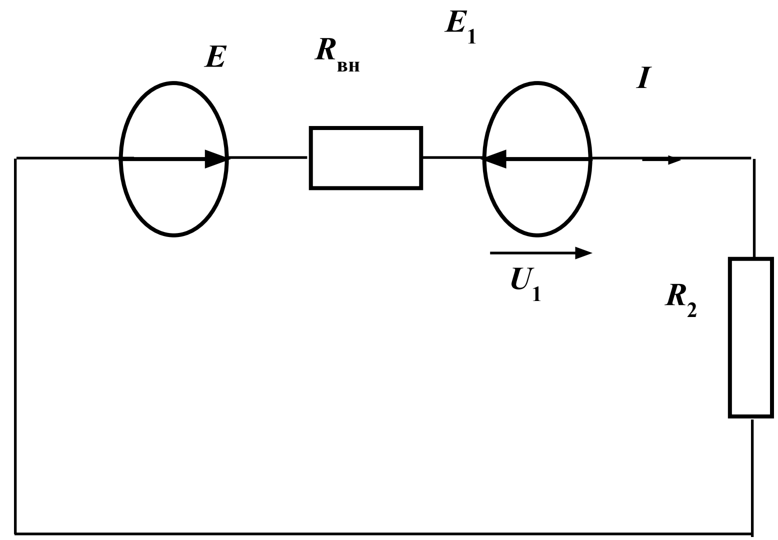
Из сопоставления выражений 3.12 и 3.13 получим:

$$\underline{Z}_{a} = \frac{\underline{Z}_{ca}\,\underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}} \qquad \underline{Z}_{b} = \frac{\underline{Z}_{bc}\,\underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}$$

- При анализе сложных цепей бывает удобным преобразовать цепь на основе так называемой ***теоремы компенсации***.

Согласно ***теореме компенсации*** ток в электрической цепи не изменится, если любой участок цепи заменить на идеальный источник ЭДС (с $R_{вн} = 0$), с ЭДС, численно равной напряжению на этом участке и направленной встречно току в цепи


E
R вн
R 1
I
U 1
R 2


E 1
E
R вн
I
U 1
R 2