Прямой поперечный изгиб

Самостоятельная работа

Условия задачи

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать поперечные сечения балок по следующим вариантам:

а) для стальной балки (рис. 1, а) - двутавровое; прямоугольное высотой h и основанием b при соотношении сторон $h/b=2$; круглое - диаметром d;

б) для чугунной балки (рис. 1, б) - форму сечения выбрать по рис. 14, определить размеры сечения из условия прочности по допускаемым напряжениям;

в) для стальной балки (рис. 1, в) - сечение, состоящее из двух швеллеров.

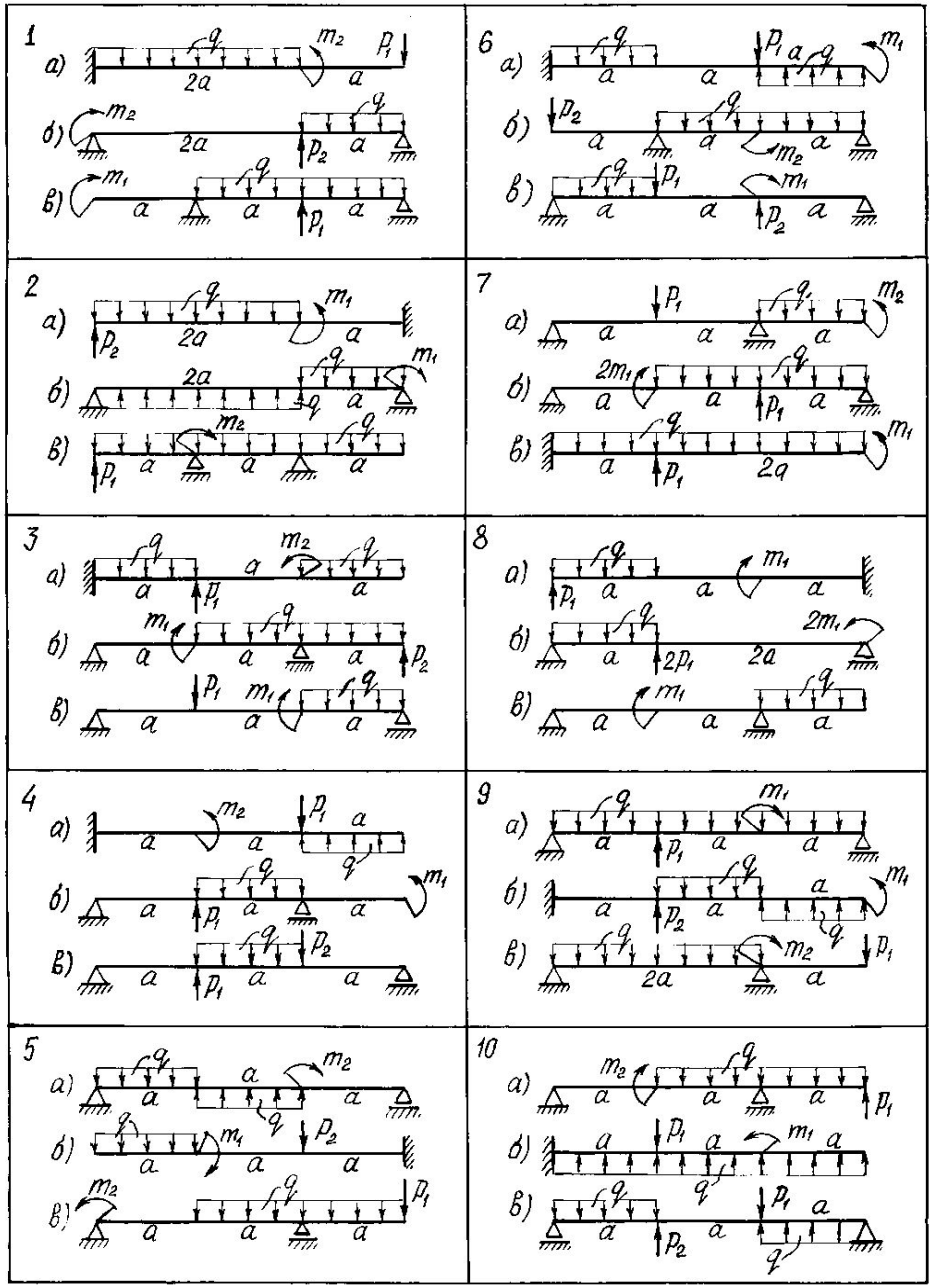
Для стальной двутавровой балки (вариант а) и чугунной балки (вариант б) построить эпюры распределения нормальных напряжений по высоте сечения.

Числовые данные берутся из таблицы, расчетные схемы - по рис. 1 и 2.

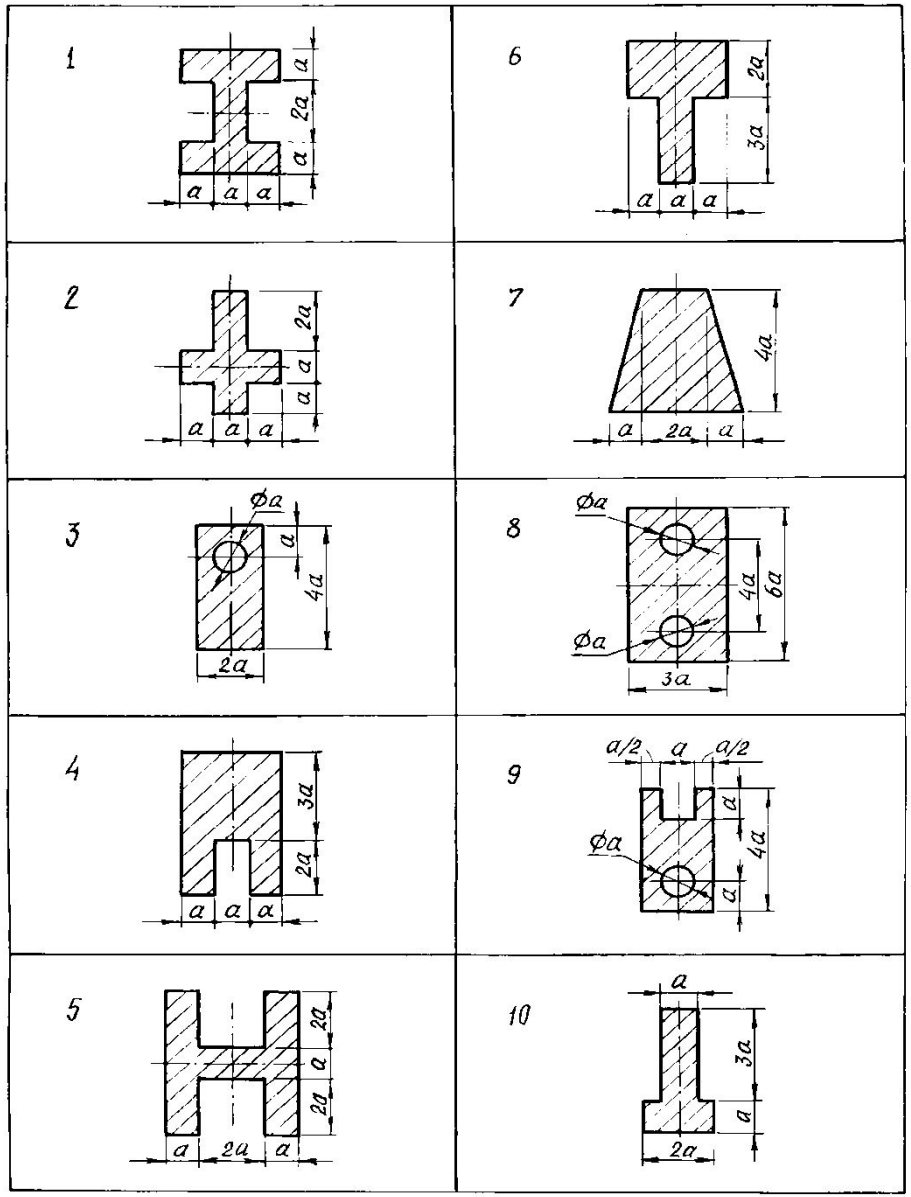
Исходные данные для решения задачи

	Сила		Момент		Длина участка	Интенсивность нагрузки			
							Сталь	Чугун	
1	40	90	10	10	1	10	200	600	120
2	45	80	12	10	1,5	15	160	700	150
3	50	85	15	14	2	20	180	500	100
4	35	70	12	12	1	10	250	800	150
5	50	80	10	15	2	10	160	600	120
6	60	70	10	12	1	15	180	700	150
7	45	60	12	10	1,5	20	180	500	100
8	35	65	10	10	1	10	160	800	150
9	40	75	13	10	1	10	160	650	130
10	30	90	18	12	2	15	220	750	200

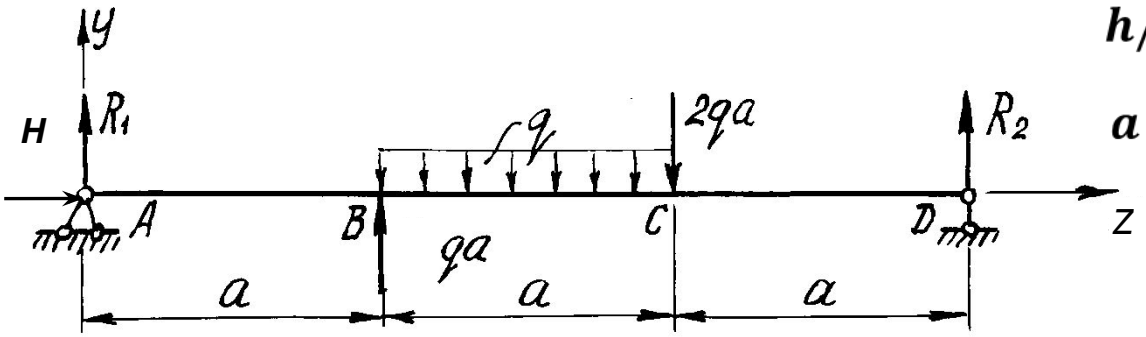
Рисунки к вариантам заданий



Рисунки к вариантам заданий (профиль



Пример решения задачи



$h/b = 2$ $[\sigma] = 190$ мПа

$a = 1$ м $q = 10$ кН/м

$$\sum Z = 0; \quad H = 0;$$

$$\sum M_D = 0; \quad R_1 \cdot 3a + qa \cdot 2a - qa \cdot 1,5a - 2qa \cdot a = 0. \qquad R_1 = 0,5qa;$$

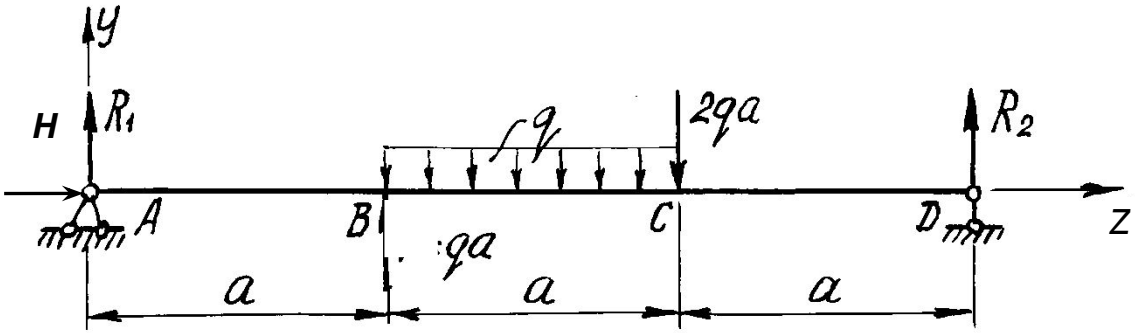
$$\sum M_A = 0; \quad R_2 \cdot 3a - 2qa \cdot 2a - qa \cdot 1,5a + qa \cdot a = 0; \qquad R_2 = 1,5qa;$$

$$\sum Y = 0; \quad 0,5qa + qa - qa - 2qa + 1,5qa = 0.$$

Значения поперечных сил

Участок AB, $0 < z < a$ $\qquad Q(z) = R_1 = 0,5qa.$

Участок BC, $a < z < 2a$ $\qquad Q(z) = 0,5qa + qa - q(z - a) = 1,5qa - q(z - a).$



$z = a, Q(a) = 1,5qa;$

$z = 2a, Q(2a) = 0,5qa.$

Участок CD, $2a < z < 3a$.

$$Q(z) = 0,5qa + qa - qa - 2qa = -1,5qa.$$

Значения изгибающих моментов

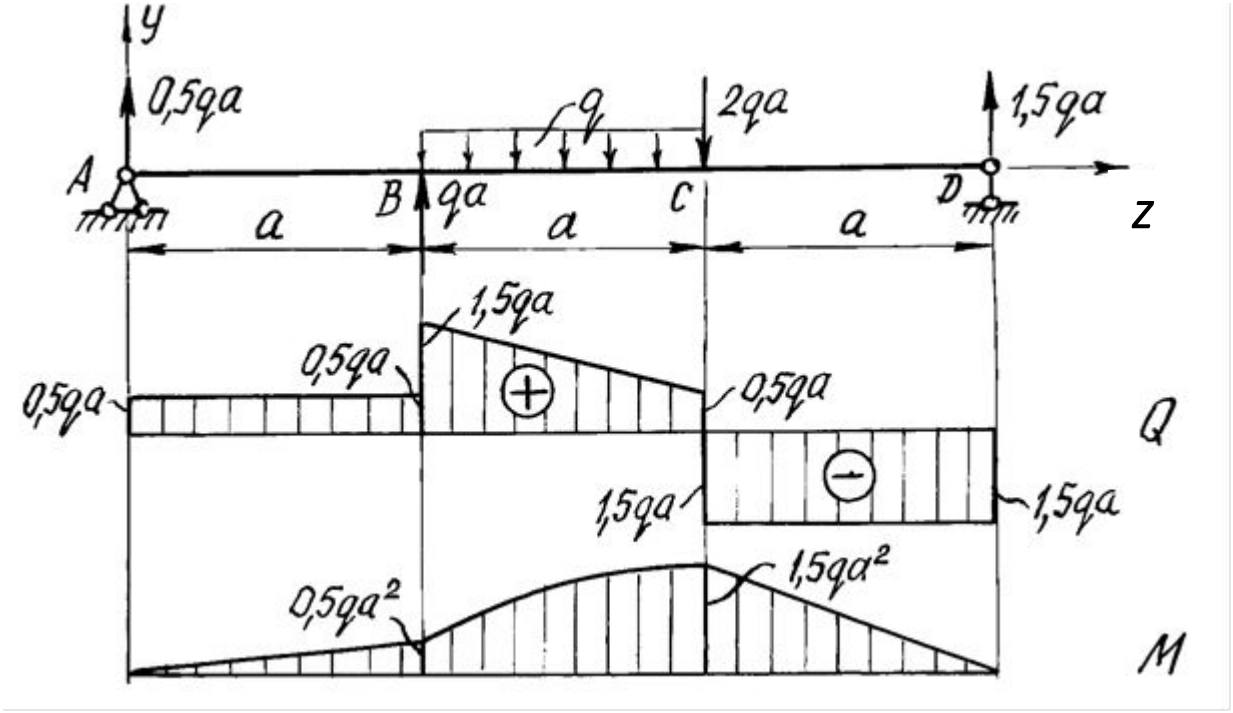
Участок AB $\quad M_x(z) = 0,5qa \cdot z.$

$z = 0,\ M_x(0) = 0;$ $\quad z = a,\ M_x(a) = 0,5qa \cdot a = 0,5qa^2.$

Участок BC $\quad M_x(z) = 0,5qa \cdot z + qa(z-a) - \dfrac{q(z-a)^2}{2}.$

$z = a,\ M_x(a) = 0,5qa^2;$

$$z = 2a,\ M_x(2a) = 0,5qa \cdot 2a + qa(2a-a) - \frac{q(2a-a)^2}{2} = 1,5qa^2.$$



Участок $\boldsymbol{CD}$

$$\boldsymbol{M_x(z) = 0,5qa \cdot z + qa(z-a) - qa(z-1,5a) - 2qa(z-2a).}$$

$$\boldsymbol{z = 2a,\ M_x(2a) = 1,5qa^2,}$$

$$\boldsymbol{z = 3a,\ \ M_x(3a) = 0.}$$

$$\boldsymbol{M_x^{max} = M_x(2a) = 1,5qa^2} = 1{,}5 \cdot 10 \cdot 1^2 = 15\ \text{кН} \cdot \text{м}$$

Подбор сечений балки

$$W_x \geq \frac{M_x^{max}}{[\sigma]} = \frac{15 \cdot 10^3}{190 \cdot 10^6} = 79 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 79 \text{ см}^3.$$

Двутавр № 14 $W_x = 81{,}7 \text{ см}^3$

Прямоугольное сечение так как $h = 2b$

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2}{3} b^3 = 79 \text{ см}^3.$$

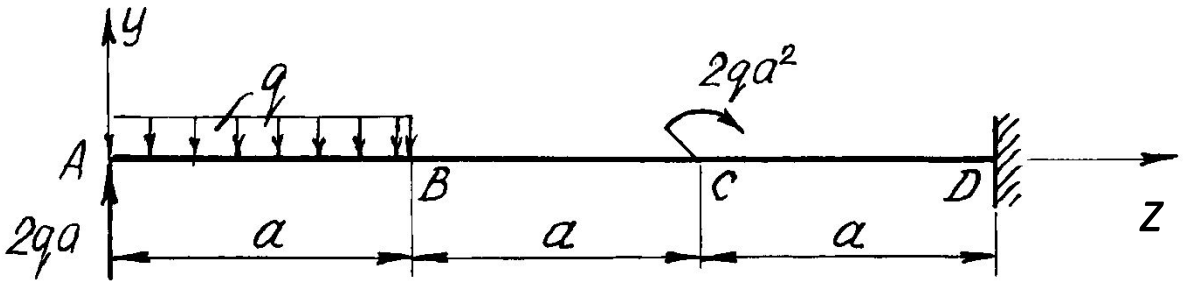
$$b = \sqrt[3]{\frac{3W_x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 79}{2}} = 4{,}9 \text{ см}, \qquad h = 2b = 2 \cdot 4{,}9 = 9{,}8 \text{ см}.$$

Круглое поперечное сечение

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} = 79 \text{ см}^3.$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 79}{3{,}14}} = 9{,}3 \text{ см}.$$

Подбор сечения балки из хрупкого материала



$[\sigma_c] = 700$ мПа

$[\sigma_р] = 140$ МПа

$a = 1$ м $\quad q = 10$ кН/м

$AB\ (0 \le z \le a)$ $\quad Q(0) = 2qa.$ $\quad Q(a) = 2qa - qa = qa,$

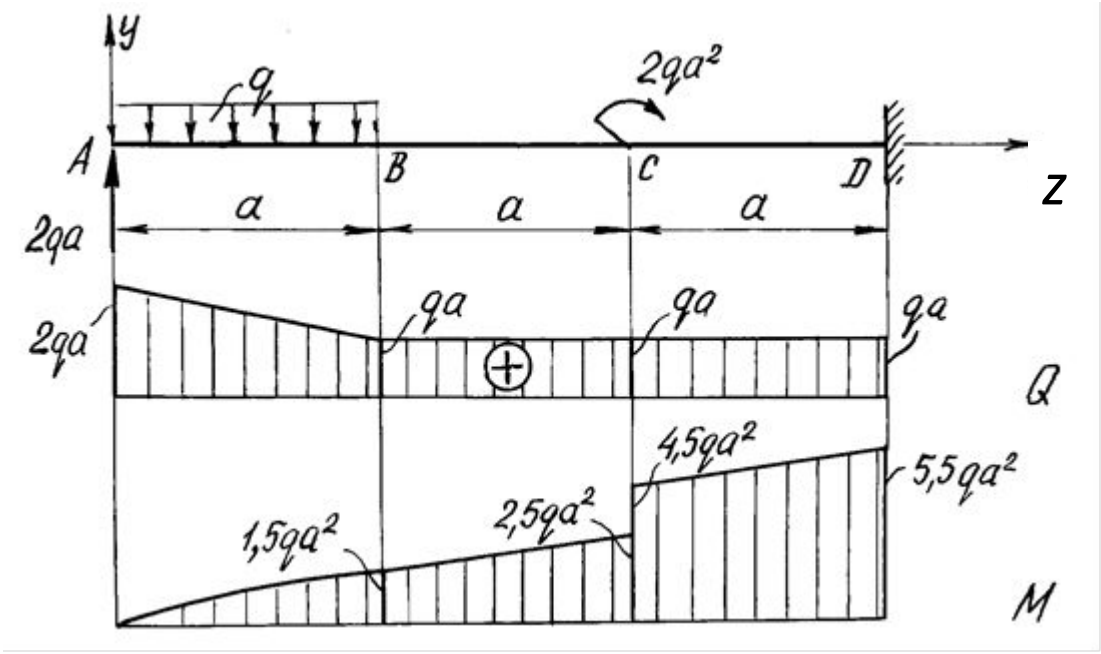
$M_x(a) = 2qa \cdot a - qa \cdot 0,5a = 1,5qa^2.$

$BC\ (a \le z \le 2a)$ $\quad Q(a) = qa,$ $\quad Q(2a) = qa;$

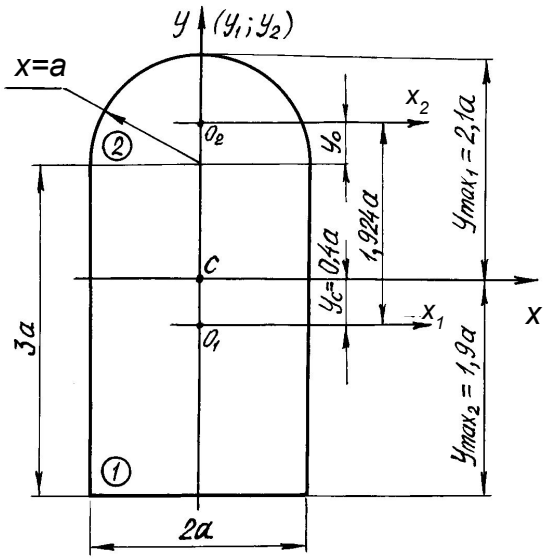
$M(a) = 1,5qa^2,$ $\quad M(2a) = 2,5qa^2.$

$CD\ (2a \le z \le 3a)$ $\quad Q(2a) = qa,$ $\quad Q(3a) = qa;$

$M(2a) = 4,5qa^2,$ $\quad M(3a) = 5,5qa^2.$



$$M_x^{max} = 5,5qa^2 = 5,5 \cdot 10 \cdot 1^2 = 55 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



$$y_C = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 + 1,924a \cdot 0,5\pi a^2}{2a \cdot 3a + 0,5\pi a^2} = 0,4a$$

$$J_x = J_{x_1} + J_{x_2} = \left(\frac{2a \cdot 3a^3}{12} + (0,4a)^2 \cdot 6a^2\right) + \left(0,11a^4 + (1,924a - 0,4a)^2 \cdot \frac{\pi a^2}{2}\right) = 9,22a^4,$$

где приближенные значения $\boldsymbol{y_0 = 0,424a,\ J_{x_2} = 0,11a^4}$

$$\boldsymbol{W_x^{'} = \frac{J_x}{y_1^{max}} = \frac{9,22a^4}{2,1a} = 4,39a^3,}$$

$$\boldsymbol{W_x^{''} = \frac{J_x}{y_2^{max}} = \frac{9,22a^4}{1,9a} = 4,85a^3.}$$

$$\frac{\boldsymbol{M_x^{max}}}{\boldsymbol{W_x^{''}}} \leq [\boldsymbol{\sigma}_{\text{р}}];\quad \frac{55 \cdot 10^3}{4,85a^3} = 140 \cdot 10^6.$$

Отсюда $\boldsymbol{a} = 0,043$ м $= 4,3$ см

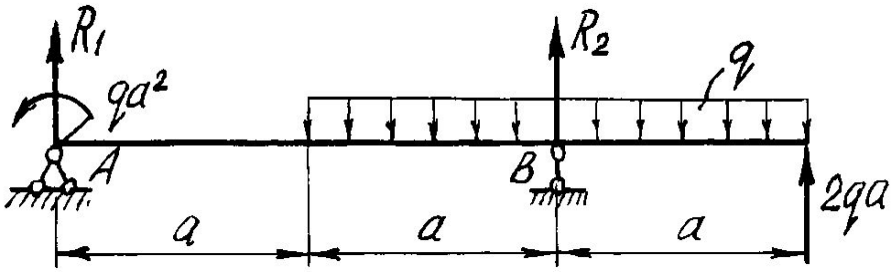
$$\boldsymbol{y_1^{max} = 2,1a}$$

$$\frac{\boldsymbol{M_x^{max}}}{\boldsymbol{W_x^{'}}} \leq [\boldsymbol{\sigma_c}];\quad \frac{55 \cdot 10^3}{4,39a^3} = 700 \cdot 10^6.$$

Отсюда $\boldsymbol{a} = 0,026$ м $= 2,6$ см

$$\boldsymbol{a} = 4,3 \text{ см}$$

Подбор составного сечения стальной балки



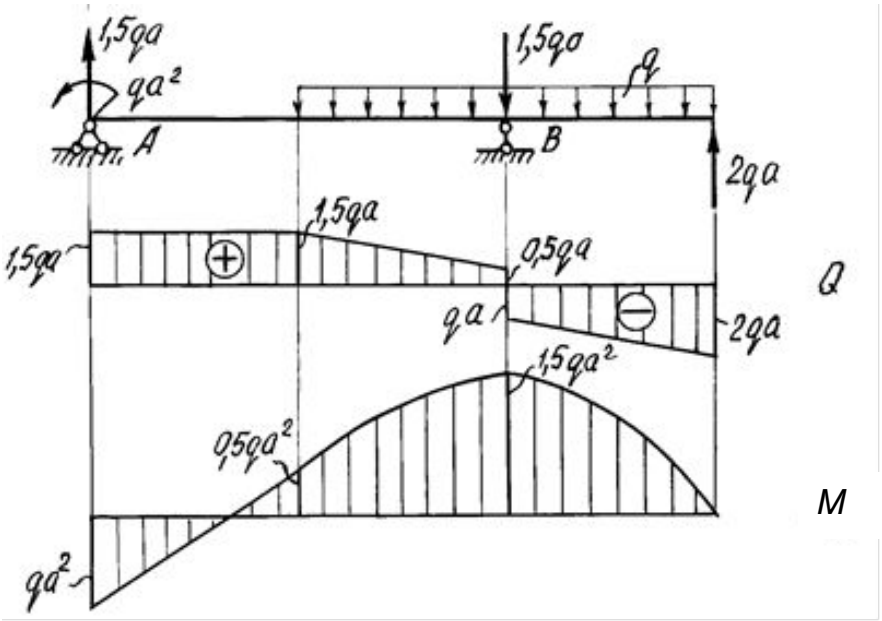
$\boldsymbol{a} = 1$ м $\qquad \boldsymbol{q} = 10$ кН/м

$[\sigma] = 190$ мПа

$$\sum \boldsymbol{M_B} = \boldsymbol{0};\quad \boldsymbol{R_1 \cdot 2a - qa^2 - 2qa \cdot a = 0};\qquad \boldsymbol{R_1 = \frac{3}{2} qa}.$$

$$\sum \boldsymbol{M_A} = \boldsymbol{0};\quad \boldsymbol{R_2 \cdot 2a + 2qa \cdot 3a - 2qa \cdot 2a + qa^2 = 0}\qquad \boldsymbol{R_2 = -\frac{3}{2} qa}.$$

$$\sum \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{0};\quad \boldsymbol{\frac{3}{2} qa - 2qa - \frac{3}{2} qa + 2qa = 0}.$$



$$M_x^{max} = 1,5qa^2 = 1,5 \cdot 10 \cdot 1^2 = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$W_x = \frac{M_x^{max}}{[\sigma]} = \frac{15 \cdot 10^3}{190 \cdot 10^6} = 79 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 79 \text{ см}^3.$$

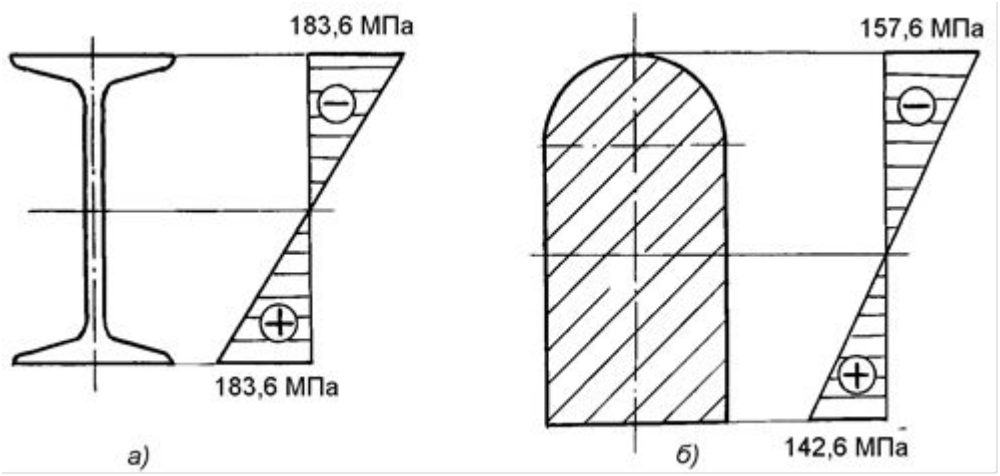
Для одного швеллера $W_x = 39,5 \text{ см}^3$

Швеллер № 12, $W_x = 50,6 \text{ см}^3$

Эпюры распределения нормальных напряжений по высоте сечения

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\boldsymbol{M_x}}{\boldsymbol{W_x}} = \frac{15 \cdot 10^3}{81{,}7 \cdot 10^{-6}} = 183{,}6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 183{,}6 \text{ мПа}.$$

$$\boldsymbol{\sigma_{max}} = \frac{\boldsymbol{M_x^{max}}}{\boldsymbol{W_x''}} = \frac{55 \cdot 10^3}{4{,}85 \cdot \left(4{,}3 \cdot 10^{-2}\right)^3} = 142{,}6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 142{,}6 \text{ мПа}.$$



$$\boldsymbol{\sigma_{min}} = \frac{\boldsymbol{M_x^{max}}}{\boldsymbol{W_x'}} = \frac{55 \cdot 10^3}{4{,}39 \cdot \left(4{,}3 \cdot 10^{-2}\right)^3} = 157{,}6 \text{ мПа}.$$