Лекция «Случайные величины»

План:

- Случайные величины
- Основные числовые характеристики дискретной случайной величины.
- Биномиальный и пуассоновский законы распределения.
- Геометрическое распределение.

Случайные величины

- **Случайная величина** - это переменная, которая в результате испытания принимает одно из своих возможных значений, причем заранее не известно, какое именно.
- ***Примеры случайных величин:***

- число очков, выпавших на верхней грани игрального кубика;

- число студентов, пришедших на лекцию;

- расстояние от центра мишени до точки попадания при выстреле;

- сумма выплаты по очередному страховому случаю и т. п.

Для определения случайной величины необходимо задать ее закон распределения.

- **Закон распределения** - ***соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями***, с которыми случайная величина принимает эти значения.
- Для практического применения не всегда необходимо иметь полное представление о случайной величине, достаточно знать некоторые ее ***числовые характеристики***, дающие суммарное представление о случайной величине, к которым, прежде всего, относятся ***математическое ожидание*** и ***дисперсия***.
- **Математическое ожидание** ***M(X)*** - это число, характеризующее ***среднее значение случайной величины*** X.
- ***Свойства математического ожидания***:

- математическое ожидание постоянной величины равно этой величине

$$M(C) = C;$$

- ***математическое ожидание произведения постоянной величины*** *C* ***и случайной ветчины*** *X* равно произведению этой константы на математическое ожидание случайной величины (константу можно вынести за знак математического ожидания):

$$M(C \cdot X) = C \cdot M(X);$$

- ***математическое ожидание алгебраической суммы*** *n* ***случайных величин*** $X_1, X_2, ..., X_n$ равно алгебраической сумме математических ожиданий этих случайных величин:

$$M(X_1 \pm X_2 \ldots \pm X_n) = M(X_1) \pm M(X_2) \ldots \pm M(X_n);$$

- ***математическое ожидание произведения*** *n* ***независимых случайных величин*** $X_1, X_2, ..., X_n$ равно произведению математических ожиданий этих случайных величин:

$$M(X_1 X_2 \ldots X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \ldots M(X_n);$$

- ***математическое ожидание алгебраической суммы случайной величины*** X ***и постоянной величины*** C равно алгебраической сумме этой константы и математического ожидания случайной величины:

$$M(X \pm C) = M(X) \pm C,$$

в частности, $M(X - M(X)) = 0$.

- **Дисперсия** ***характеризует разброс или рассеяние значений случайной величины около ее математического ожидания***.
- ***Дисперсия - это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания***:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

- ***Свойства дисперсии***:

- дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D(C) = 0;$$

- ***дисперсия произведения постоянной величины*** С ***и случайной величины*** X равна произведению квадрата этой константы на дисперсию случайной величины (константу можно вынести за знак дисперсии, возведя ее в квадрат):

$$D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X);$$

- ***дисперсия алгебраической суммы*** n ***независимых случайных величин*** $X_1, X_2 ..., X_n$ равна сумме дисперсий этих случайных величин:

$$D(X_1 \pm X_2 ... \pm X_n) = D(X_1) + D(X_2) ... + D(X_n);$$

- ***дисперсия алгебраической суммы случайной величины*** X ***и постоянной величины*** C равна дисперсии случайной величины:

$$D(X \pm C) = D(X),$$

в частности, $D(C_1 \cdot X - C_2) = C_1^2 D(X)$.

- ***Формула упрощенного вычисления дисперсии*** имеет вид:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Дискретная случайная величина

Дискретная случайная величина - случайная величина, которая принимает конечное или бесконечное, но счетное число отдельных изолированных значений (т. е. их можно перенумеровать натуральными числами).

- Для дискретной случайной величины простейшей формой задания закона распределения является ***ряд распределения***, представляющий собой таблицу, в верхней строке которой указаны возможные значения x_i, дискретной случайной величины X, а в нижней - вероятности p_i, того, что X примет значение x_i.

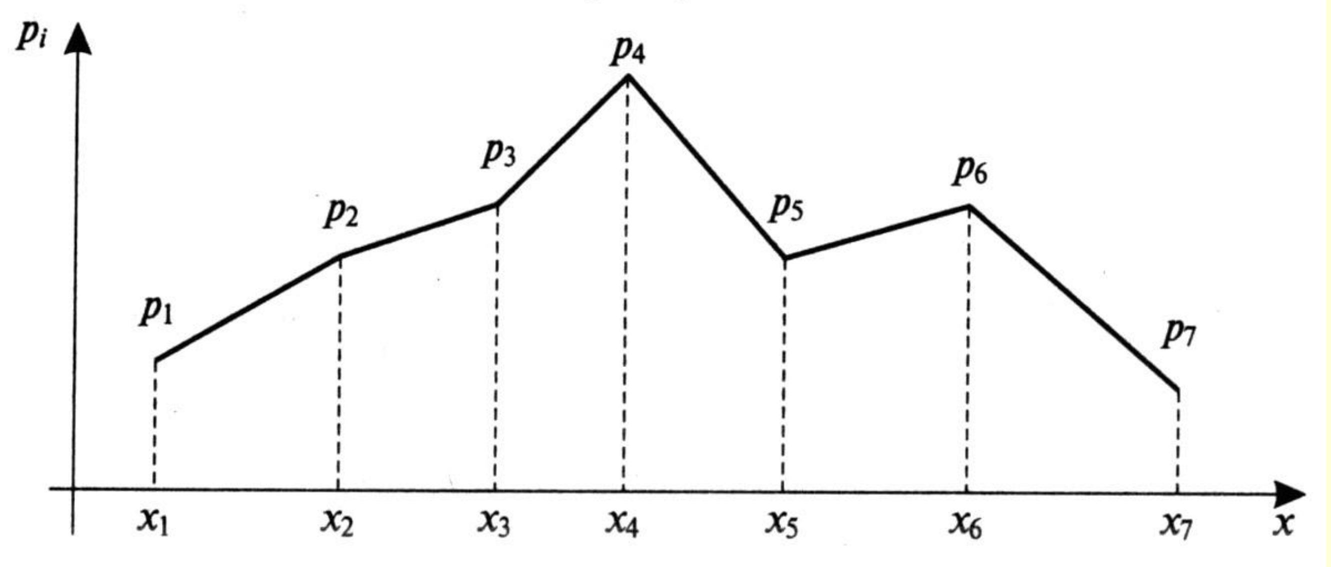
x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

При построении ряда распределения необходимо помнить, что:

$0 \le P_i \le 1$, по свойству вероятности;

$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, так как события $(X = x_1), (X = x_2), \ldots, (X = x_n)$ составляют полную группу попарно несовместных событий.

- ***Графическое представление ряда распределения называется многоугольником (полигоном) распределения***.



Полигон распределения дискретной случайной величины X

Функция распределения дискретной случайной величины

- ***Функция распределения (интегральная функция)*** ***F(x)*** определяет для каждого возможного значения *x* вероятность того, что случайная величина *X* примет значение, меньшее *x:*

$$F(x) = P(X < x).$$

- ***Функция распределения дискретной случайной величины*** ***F(x)*** равна сумме вероятностей всех значений x_i, меньших заданного значения *x:*

$$F(x) = \sum_{i:x_i < x} P(X < x).$$

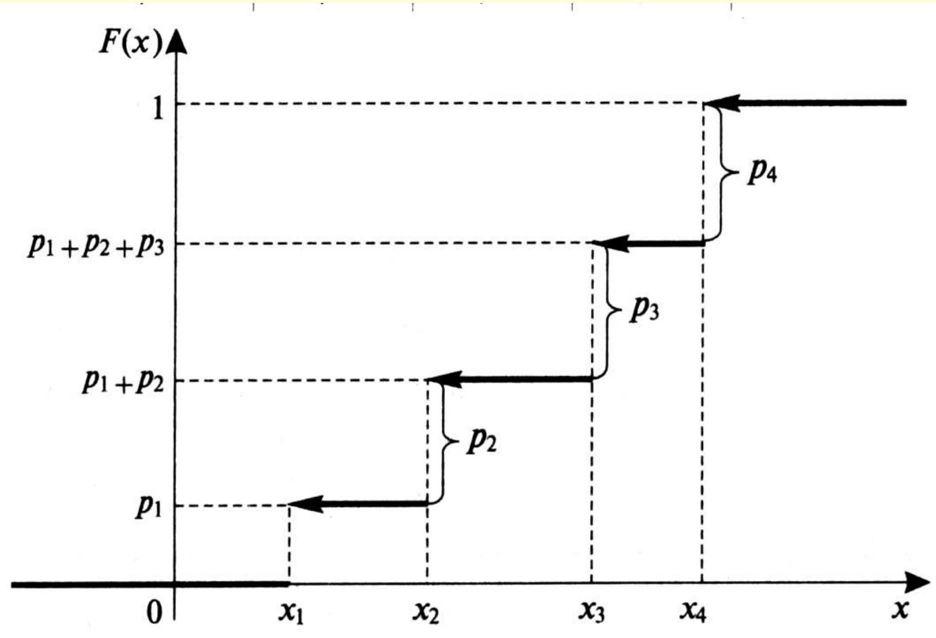
***Свойства интегральной функции распределения дискретной случайной величины*:**

1. Функция распределения может принимать любые значения от 0 до 1, так как по определению является вероятностью: $0 < F(x) < 1$.

2. ***Интегральная функция распределения является неубывающей***:

$$F(x_2) > F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1$$

3. ***Функция распределения любой дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция***, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины и равны вероятностям этих значений. ***Сумма всех скачков равна*** 1.



Функция распределения дискретной случайной величины *X*, принимающей 4 возможных значения

Основные числовые характеристики дискретной случайной величины

- 1. ***Математическое ожидание*** дискретной случайной величины определяется по формуле:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i.$$

- 2. ***Дисперсия*** дискретной случайной величины определяется по формуле:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i.$$

Говорят: ***дисперсия есть математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины***.

- 3. ***Среднее квадратическое отклонение***:

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)}.$$

Пример. Вероятность всхожести семян некоторого растения равна 0,8. Составить закон распределения числа взошедших семян из трех посеянных. Найти математической ожидание и дисперсию этой случайной величины.

- ***Решение.***

Случайная величина X - число взошедших семян из трех посеянных. X может принимать числовые значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

- Для каждого из 3 семян вероятность события A - семя взошло - по условию постоянна и равна:

$$p(A) = p = 0{,}8;\ P(A) = q = 1 - p = 0{,}2.$$

- Вероятность того, что взойдут все три семени:

$$p_4 = p^3 = 0{,}8^3 = 0{,}512.$$

- Вероятность того, что все они не взойдут:

$$p_1 = q^3 = 0{,}2^3 = 0{,}008.$$

- Вероятность того, что взойдет ровно одно семя:

$$p_2 = 3pq^2 = 3\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^2 = 0{,}096.$$

- Вероятность того, что взойдут ровно два семени:

$$p_3 = 3p^2q = 3\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2 = 0{,}384.$$

- Правильность составления закона подтверждается равенством:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}008 + 0{,}096 + 0{,}384 + 0{,}512 = 1.$$

Найдем числовые характеристики случайной величины – числа взошедших семян.

- 1. Математическое ожидание равно:

$$M(X) = 0\cdot 0{,}008 + 1\cdot 0{,}096 + 2\cdot 0{,}384 + 3\cdot 0{,}512 = 2{,}4.$$

- 2. Дисперсия равна

$$D(X) = (0-2{,}4)^2\cdot 0{,}008 + (1-2{,}4)^2\cdot 0{,}096 + (2-2{,}4)^2\cdot 0{,}384 + (3-2{,}4)^2\cdot 0{,}512 = 0{,}48.$$

- 3. Среднее квадратическое отклонение равно

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}48} = 0{,}69.$$

Основные законы распределения дискретных случайных величин

Биномиальный закон распределения - закон распределения дискретной случайной величины *X*, представляющей собой число *m* наступлений события *A* в серии *n* независимых испытаний, в каждом из которых событие может произойти с одной и той же вероятностью *p*.

- По условию ***вероятность наступления события*** *A* в каждом испытании ***постоянна*** $P(A_i) = p$ и ***испытания независимы***. Поэтому вероятность того, что событие *A* наступит в *n* испытаниях ровно *m* раз, рассчитывается по формуле Бернулли:

$$P(X=m)=P_n(m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}.$$

- Дискретная случайная величина имеет ***биномиальный закон распределения***, если она принимает целочисленные неотрицательные значения 0, 1, 2, 3, ..., *m*,..., *n* с вероятностями, вычисляемыми по формуле Бернулли.

Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины X, имеющей биномиальный закон распределения, равны:

$$M(X) = n \cdot p, \qquad D(X) = n \cdot p \cdot q.$$

Пример. Вернемся к последней рассмотренной задаче. Число опытов, связанных с выращиванием трех зерен, $n = 3$. Вероятность того, что зерно взойдет в опыте $p = 0{,}8$, а что не взойдет $q = 1 - p = 0{,}2$.

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины по формулам, приведенным выше:

$$M(X) = n \cdot p = 3 \cdot 0{,}8 = 2{,}4,$$

$$D(X) = n \cdot p \cdot q = 3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}48.$$

Ответ, как и следовало ожидать, не отличается от полученного ранее.

Закон распределения Пуассона - закон распределения дискретной случайной величины *X*, представляющей собой число *m* наступлений события *A* в заданном промежутке времени или пространства при заданной ***интенсивности λ***.

- В отличие от биномиального с параметрами *n* (число независимых испытаний) и *p* (вероятность наступления события *A* в каждом испытании), закон распределения Пуассона определяется ***интенсивностью λ наступления события*** *A*.
- Случайная величина *X*, распределенная по закону Пуассона, может принимать все неотрицательные целые значения: 0, 1, 2, ..., *n*, ...

Вероятность того, что ***событие A наступит ровно m раз***, определяется по формуле:

$$P(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Дискретная случайная величина имеет ***закон распределения Пуассона*** с параметром *X*, если она принимает целочисленные неотрицательные значения 0, 1, 2, 3, ..., *m*, ..., *n*,... (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями, вычисляемыми формуле Пуассона:

x_i	0	1	...	m	...	...
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	...	$\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	...	...

,

где $\boldsymbol{\lambda = n \cdot p}$ - ***параметр распределения Пуассона***.

Так как вероятность наступления события *A* в каждом испытании мала, ***закон распределения Пуассона еще называют <u>законом редких событий</u>.***

Числовые характеристики закона Пуассона определяются формулами:

$$\boldsymbol{M(X) = D(X) = \lambda = n \cdot p.}$$

Пример. В приемное время врача посещает в среднем 7 человек в час. Составить закон распределения числа пациентов, посетивших врача в течение часа.

- ***Решение.***
- Случайная величина X - число пациентов, посетивших врача в течение часа. Таким образом, оценивается число m наступлений события A (пациент пришел к врачу в течение часа) при заданной интенсивности $\lambda = 7$ (среднее число посетителей в час определяется в соответствии с формулой: $M(X) = \lambda = 7$, что и было задано в условии задачи).
- Следовательно, случайная величина X подчиняется закону распределения Пуассона с параметром $\lambda = 7$.

- Случайная величина *X* может принимать числовые значения: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$,... с вероятностями p_i, равными:

$$p_0 = P(X = 0) = \frac{7^0}{0!} e^{-7} = 0{,}00091\ ;$$

$$p_1 = P(X = 1) = \frac{7^1}{1!} e^{-7} = 0{,}00638\ ;$$

$$p_2 = P(X = 2) = \frac{7^2}{2!} e^{-7} = 0{,}02234\ ;$$

$$p_3 = P(X = 3) = \frac{7^3}{3!} e^{-7} = 0{,}05213\ ;\ \ldots$$

- Таким образом, закон распределения случайной величины X - числа пациентов, посетивших врача в течение часа, имеет вид:

X_i	0	1	2	3	…
P_i	0,00091	0,00638	0,02234	0,05213	….

Геометрическое распределение

- Если дискретная случайная величина может принимать только значения целых натуральных чисел с вероятностями
$$P(X = k) = pq^{k-1}, k = 1, 2, 3\ldots$$
где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$,
то говорят, что ***дискретная случайная величина подчиняется геометрическому распределению***.
С помощью геометрического распределения оценивают ***вероятность проведения некоторого числа испытаний для достижения успеха.***
Математическое ожидание и дисперсию определяют по формулам
$$M(X) = 1/p; D(X) = q/p^2.$$

- **Пример.** Вероятность поражения мишени стрелком равна p = 0,7. Случайная величина X – это число выстрелов до первого попадания в мишень. Определить вероятности попадания в мишень при осуществлении двух, трех, четырех и пяти выстрелов, а также математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

$$P(X = 2) = p \cdot q = 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}21;$$

$$P(X = 3) = p \cdot q^2 = 0{,}7 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}063;$$

$$P(X = 4) = p \cdot q^3 = 0{,}7 \cdot 0{,}3^3 = 0{,}0189;$$

$$P(X = 5) = p \cdot q^4 = 0{,}7 \cdot 0{,}3^4 = 0{,}006;$$

$$M(X) = 1/p = 1/0{,}7 = 1{,}43;$$

$$D(X) = q/p^2 = 0{,}3/0{,}7^2 = 0{,}61.$$

Задание для самостоятельной работы

- Дискретная случайная величина X в результате проведения 20 опытов получала следующие значения:

  2, 3, 5, 6, 4, 1, 1, 2 , 6, 5, 4, 3, 3, 4, 1, 2, 5, 4, 5, 6.

- ***Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины.***
- ***Построить ряд распределения (полигон распределения) случайной величины.***
- ***Определить вероятность того, что случайная величина X примет значения, меньшие 6, но большие 2:***

  $P(2 < X < 6)$.