

### Двухполюсник в цепи синусоидального тока.

Двухполюсник — часть электрической цепи любой сложности и произвольной конфигурации, выделенная относительно двух зажимов (полюсов). Если в схеме двухполюсника есть нескомпенсированные источники, он наз. активным.

Двухполюсник, не содержащий источников энергии или содержащий скомпенсированные источники (сумма действие которых равно нулю) - пассивный.

Пассивный двухполюсник - потребитель энергии, м/быть заменён эквивалентным сопротивлением, величина которого равна входному сопротивлению двухполюсника.

$$Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}} = ze^{j\varphi}.$$

Активный двухполюсник - ведёт себя как генератор. Находящиеся внутри него нескомпенсированные источники отдают энергию во внешнюю цепь. Можно подобрать источник энергии с ЭДС и внутренним сопротивлением, эквивалентными двухполюснику, создающие во внешней цепи тот же самый ток .

Входное сопротивление двухполюсника определяют расчётным путём (известна схема внутренних соединений , характер и значения сопротивлений), либо опытным путём.

При опытном определении входного сопротивления двухполюсника ваттметр измеряет активную мощность  $\text{Re}\{\dot{U}_{ab} \dot{I}^*\}$   $P = UI \cos\varphi$ .

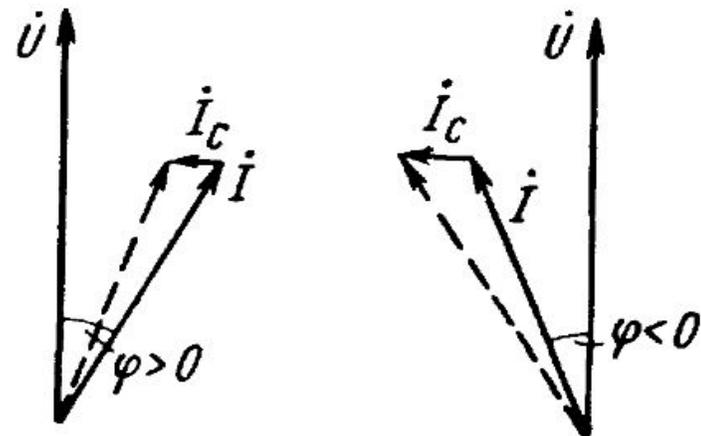
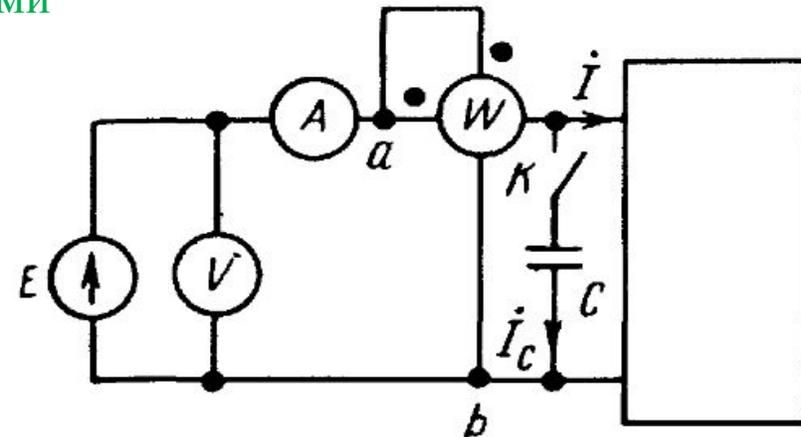
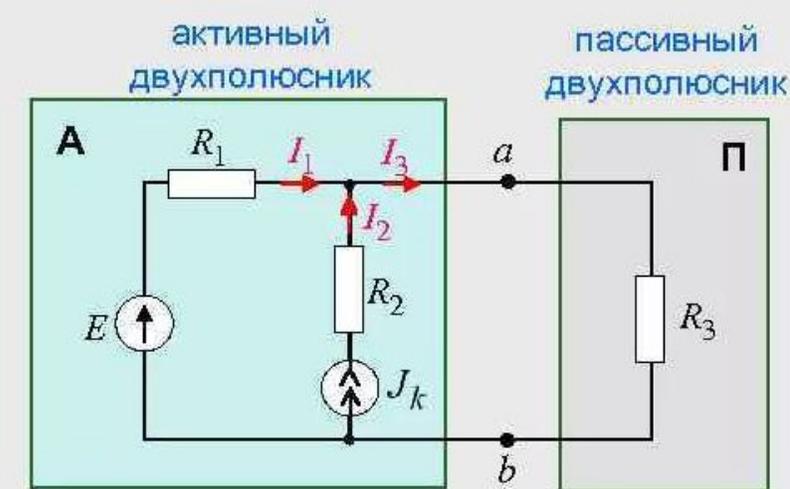
Модуль входного сопротивления  $z = U/I$ .

Косинус угла между напряжением и током:  $\cos\varphi = P/UI$ .

Далее находят  $Z = ze^{j\varphi}$   $R_{\text{вх}} = z \cos\varphi$   $X_{\text{вх}} = z \sin\varphi$

Так как косинус - функция чётная т. е.  $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ , измерения дополняют ещё одним опытом для определения знака угла: включают параллельно исследуемому двухполюснику небольшую ёмкость С (рис). Если при замкнутом ключе К показания амперметра меньше, чем при разомкнутом, угол положителен и входное сопротивление имеет индуктивный характер, наоборот - ёмкостный.

Либо используют фазометр.



**Частотные характеристики (ЧХ)** двухполюсника: зависимость модуля входного сопротивления (проводимости) от частоты; зависимость действительной или мнимой части входного сопротивления (проводимости) от частоты.

**Резонансный режим** (режимы) работы при котором входное **сопротивление двухполюсника чисто активное**. По отношению к внешней цепи двухполюсник в резонансном режиме ведёт себя как активное сопротивление, **ток и напряжение на его входе совпадают по фазе, реактивная мощность двухполюсника равна нулю.**

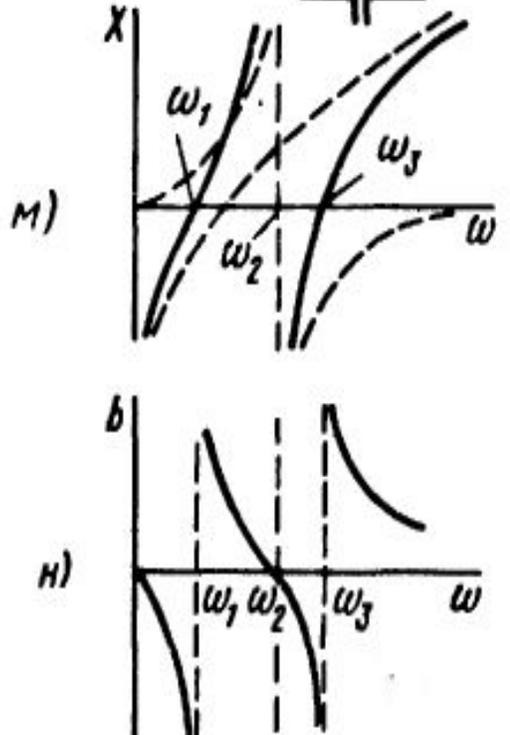
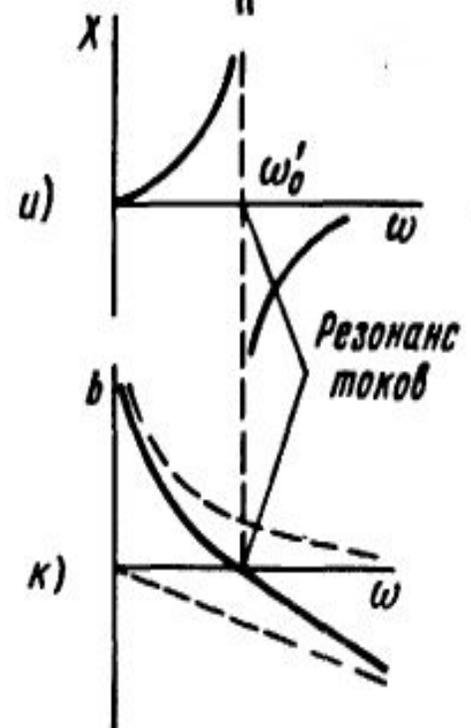
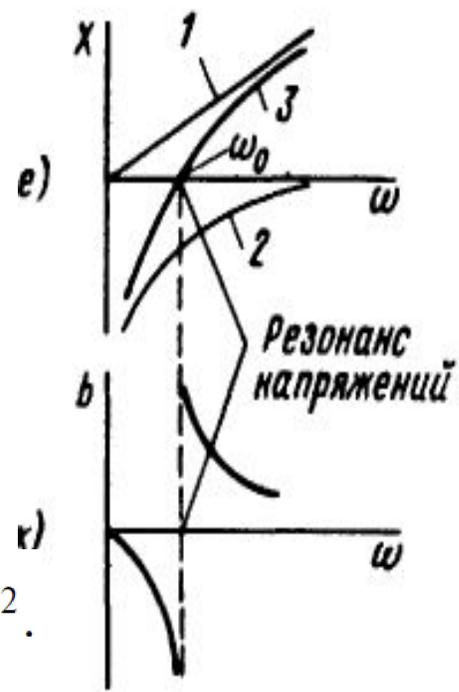
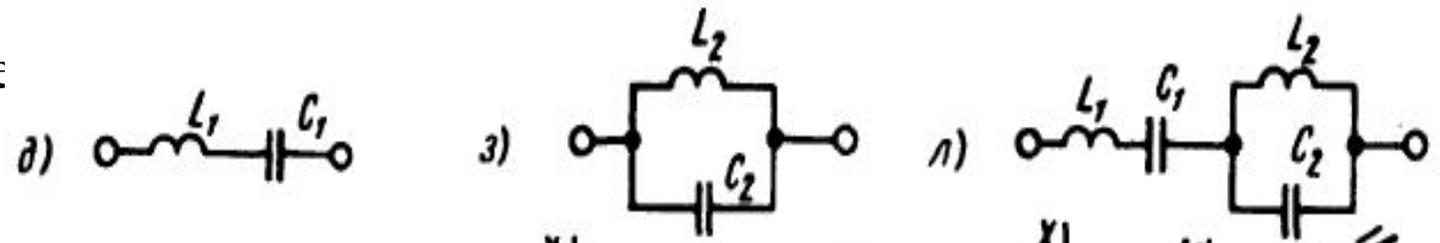
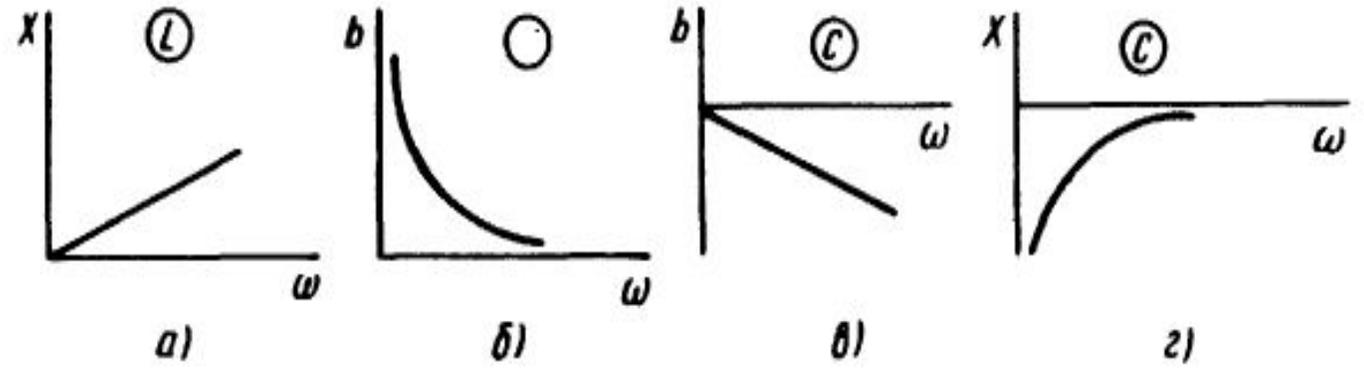
Цепи, в которых возникает явление резонанса, наз. резонансными, могут наблюдаться **резонанс токов, резонанс напряжений.**

Мощности цепи синусоидального тока:

$$\frac{dW}{dt} = u(t)i(t) = (u_R + u_L + u_C)i = \left( Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt \right) i$$

Активная  $P = UI \cos \varphi = RI^2$   
 реактивная

$$+Q_L = X_L \frac{I_m^2}{2} = X_L I^2 \quad -Q_C = -X_C \frac{I_m^2}{2} = -X_C I^2.$$



# Резонанс в электрических цепях

- режим работы электрической цепи, содержащей индуктивные и ёмкостные элементы, при котором входное сопротивление цепи имеет чисто активный характер и, следовательно, сдвиг фаз между напряжением и током на ее входе **равен нулю** ( $\varphi = 0$ ).

Разнородные реактивные сопротивления (проводимости) цепи полностью компенсируют друг друга.

Полная реактивная мощность  $Q$  цепи при этом равна нулю.

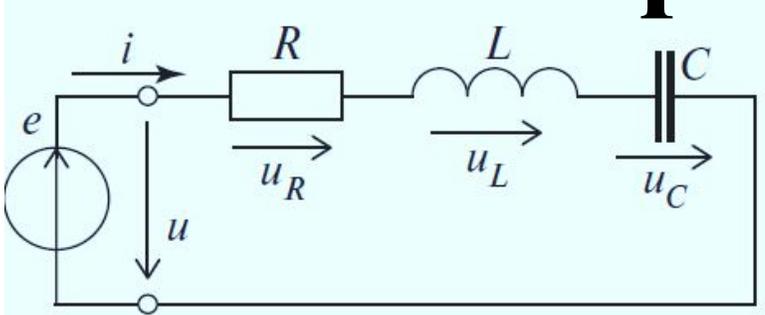
Цепи, в которых возникают резонансные явления, называют резонансными цепями или колебательными контурами.

Различают : резонанс напряжений (в цепях или колебательных контурах с последовательным соединением ветвей, содержащих  $L$  и  $C$  элементы) и резонанс токов (в цепях или колебательных контурах с параллельным соединением ветвей, содержащих  $L$  и  $C$  элементы).

В электротехнических установках резонанс часто оказывается опасным и нежелательным явлением, так как может привести к авариям вследствие перегрева элементов электрической цепи или пробоя изоляции при перенапряжениях.

Тем не менее, резонансные явления широко применяют в радиоэлектронике. Резонансные контуры входят в состав многих радиотехнических устройств, электронные фильтры являются сложными резонансными системами.

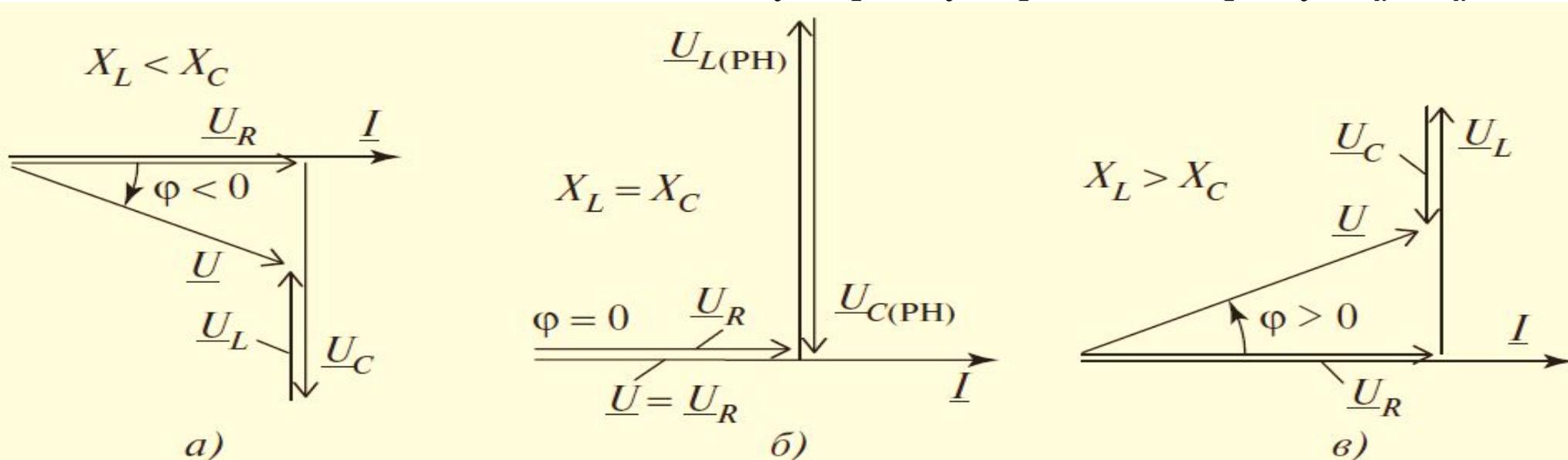
# Резонанс напряжений



Простейшая цепь, где возможен резонанс напряжений, - последовательный колебательный контур. Режим работы  $RLC$  цепи, при условии равенства реактивных сопротивлений  $X_C = X_L$ , когда общее напряжение цепи совпадает по фазе с её током  $\varphi = 0$ , наз. резонансом напряжений. Цепь имеет активный характер:

Признаки резонанса напряжений:

1. Напряжение на входе совпадает по фазе с током, т.е. сдвиг фаз между  $I$  и  $U$   $\varphi = 0$ ,  $\cos(\varphi) = 1$
2. Ток в цепи наибольший и, как следствие, активная мощность  $P_{max} = I_{2max} R$  максимальна, а реактивная - равна нулю.
3. Напряжения на реактивных элементах цепи могут в несколько раз превышать напряжение на входе.
4.  $U_C = U_L \Rightarrow U_C - U_L = 0 \Rightarrow U = U_L - U_C + U_R = U_R$



Исходя из условия наступления РН в схеме - равенство нулю реактивного сопротивления на входе цепи

$$X_{PH} = X_{L(PH)} - X_{C(PH)} = 0, \quad \omega_{PH}L = \frac{1}{\omega_{PH}C},$$

откуда угловая (рад/с) и циклическая (Гц) резонансные частоты контура

$$\omega_{PH} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{и} \quad f_{PH} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Характеристическое (волновое) сопротивление контура ( $\rho$ , десятки - сотни Ом) равно его индуктивному или ёмкостному сопротивлению при резонансе:

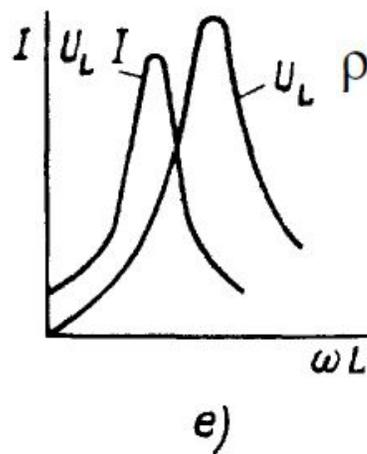
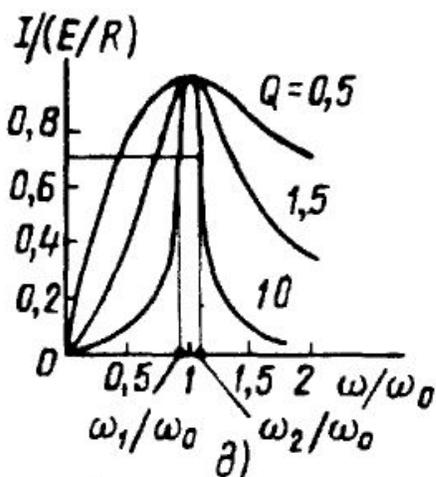
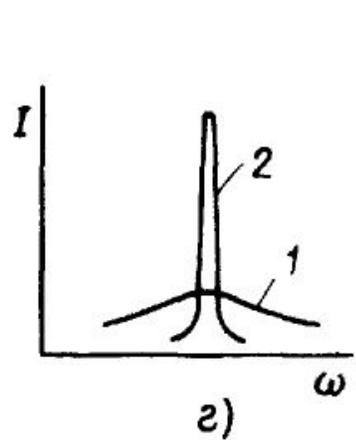
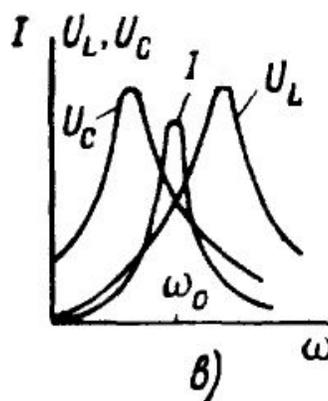
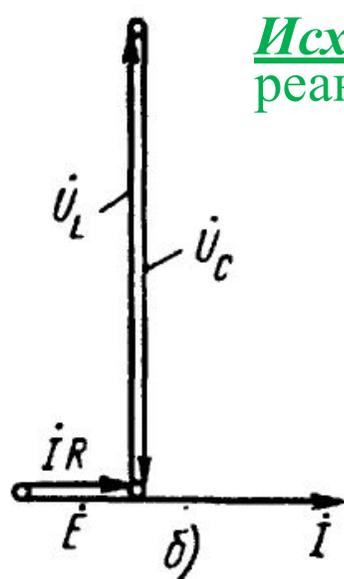
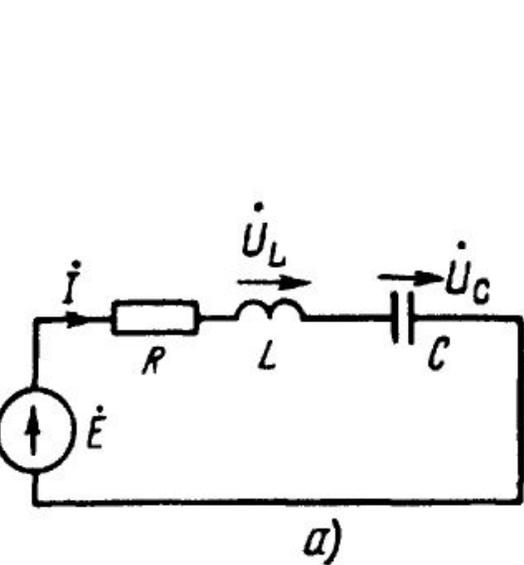
$$\rho = X_{C(PH)} = \frac{1}{\omega_{PH}C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

$$\rho = X_{L(PH)} = \omega_{PH}L = \frac{1}{\sqrt{LC}}L = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

**Добротность  $Q$  контура** — отношение характеристического сопротивления  $\rho$  контура к активному  $R$  при резонансе:

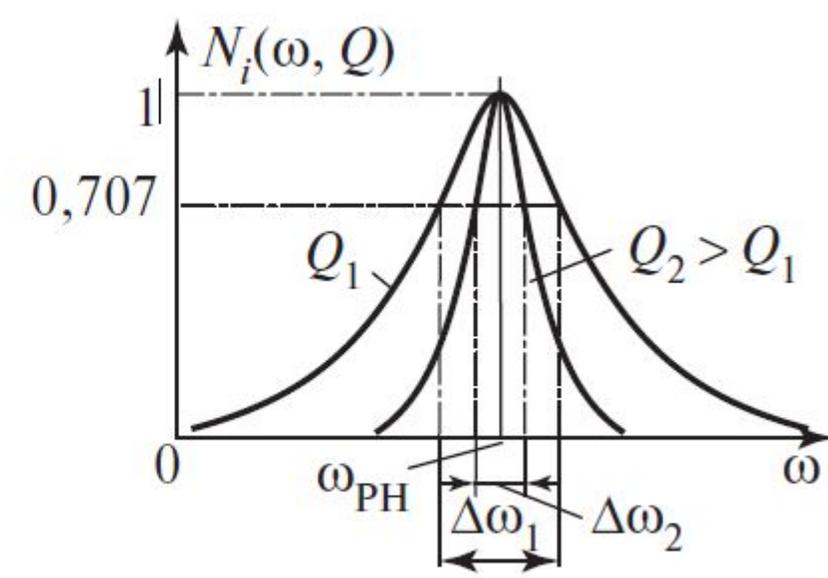
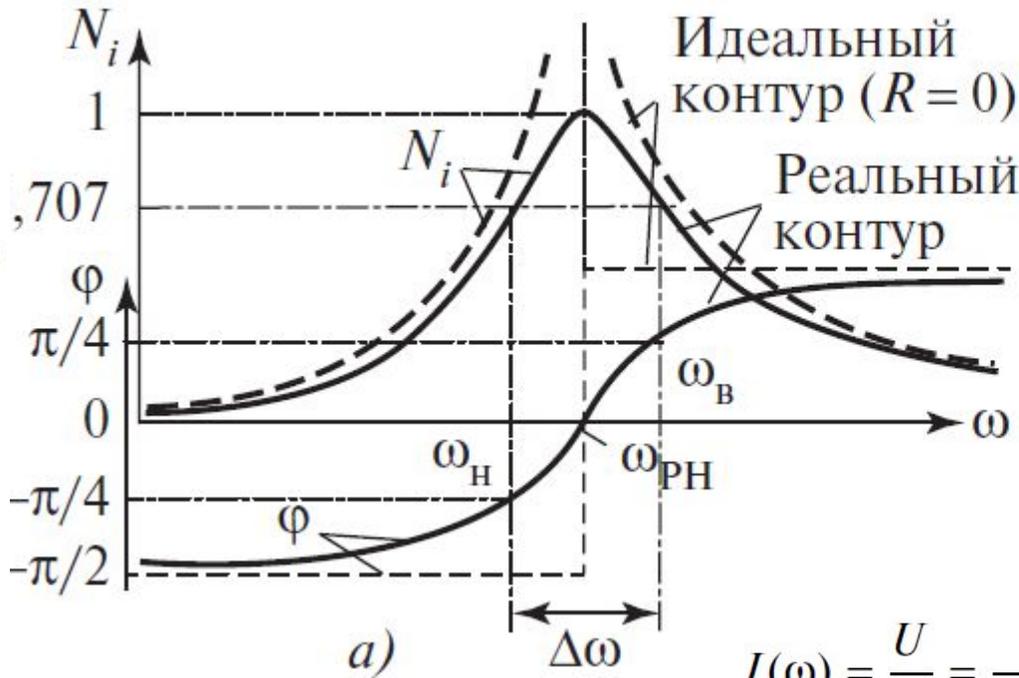
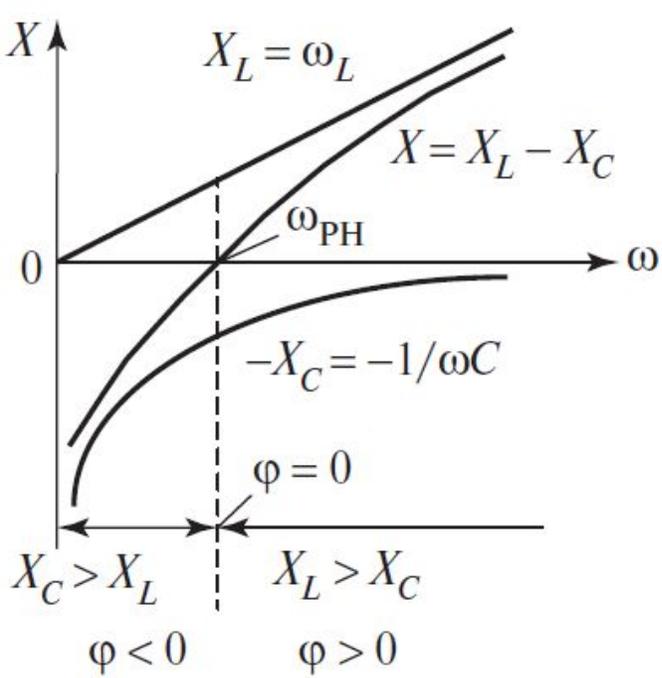
$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{X_{L(PH)}}{R} = \frac{X_{C(PH)}}{R}.$$

$$Q = \frac{U_{C(PH)}}{U} = \frac{U_{L(PH)}}{U}.$$



Чем больше  $\rho$ , тем добротнее контур, тем уже частотные характеристики тока и напряжений на элементах контура. В радиотехнических контурах добротность  $Q = 100-1000$ , в электротехнических цепях добротность  $Q = 3-5$ .

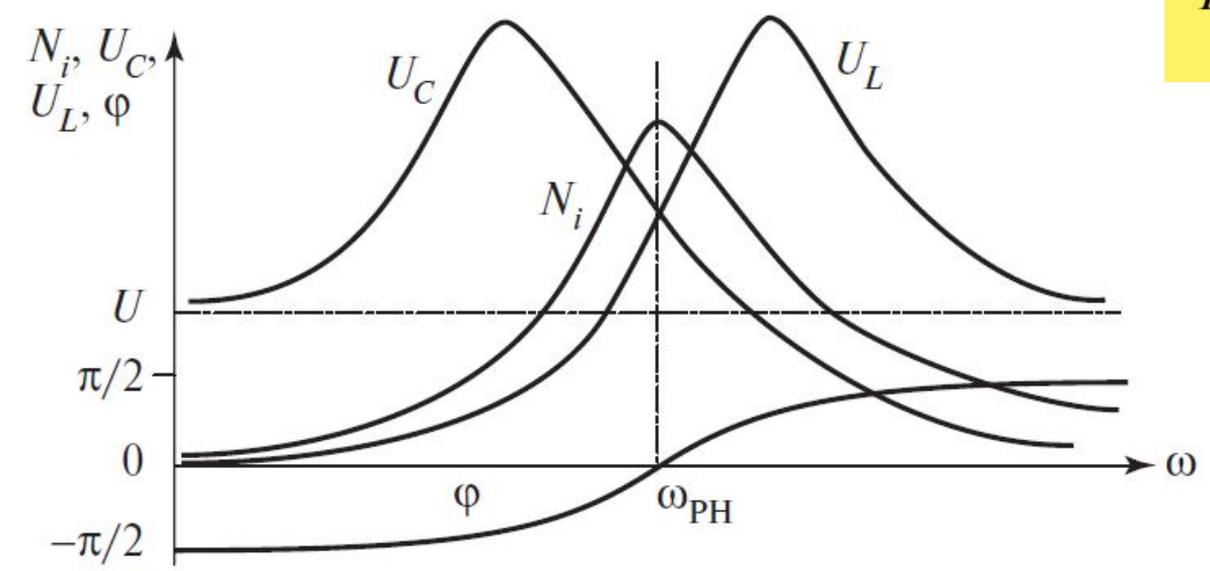
Добротность  $Q$  показывает, во сколько раз напряжение на зажимах конденсатора  $U_C = U_L$  при резонансе больше напряжения питания  $U$



$$Z_{PH} = \sqrt{R^2 - (X_{L(PH)} - X_{C(PH)})^2} = R = Z_{min},$$

$$I(\omega) = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

$$I_{PH} = \frac{U}{Z_{min}} = \frac{U}{R} = I_{max}.$$



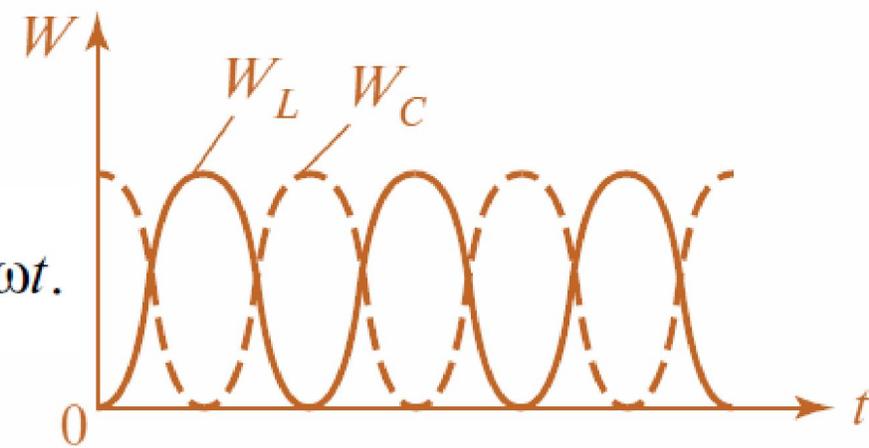
**Полосой пропускания контура** последовательного колебательного контура называют диапазоном частот:  $D = \omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}}$ , в пределах которого значение нормированного тока  $N_i(\omega)$  не уменьшается более чем 0,707 относительно своего максимального значения, равного единице. На границах полосы пропускания (на частотах  $\omega_{\text{н}}$  и  $\omega_{\text{в}}$  (нижней и верхней **частот среза**) фазовый угол равен  $\pm 45$  град.

$$\Delta\omega \approx \frac{\omega_{PH}}{Q}, \quad P_c(\omega) = RI^2 = \frac{1}{2}RI_{max}^2 = \frac{1}{2}P_{max}$$

Амплитуда колебаний электрической энергии в электрическом поле конденсатора равна амплитуде колебаний магнитной энергии в магнитном поле катушки, а сумма магнитной и электрической энергии в контуре постоянна и равна

$$W_L = \frac{1}{2}Li_L^2 = \frac{1}{2}LI_m^2 \sin^2 \omega t, \quad W_C = C \frac{u_C^2}{2} = \frac{1}{2}CX_C^2 I_m^2 \cos^2 \omega t.$$

$$W_C = \frac{1}{2}C\rho^2 I_m^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2}LI_m^2 \cos^2 \omega t$$



При резонансе напряжений общая накопленная энергия в контуре остаётся неизменной, при этом магнитная энергия  $W_L$  изменяется во времени по закону квадрата синуса, а электрическая энергия  $W_C$  — по закону квадрата косинуса (рис.). Т.е. в контуре происходит обмен энергией между элементами  $L$  и  $C$  без участия в этом процессе источника  $e(t)$ , для которого контур — чисто активная нагрузка.

$$W_{PH} = W_L + W_C = \frac{1}{2}LI_m^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2}LI_m^2 = \text{const.}$$

$$\omega_{PH} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{и} \quad f_{PH} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

$$\rho = X_{L(PH)} = \omega_{PH}L = \frac{1}{\sqrt{LC}}L = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

## РЕЗОНАНС ТОКОВ

Резонанс токов (РТ) возникает в параллельном колебательном контуре при равенстве нулю входной реактивной проводимости  $b_{PT} = b_{L(PT)} - b_{C(PT)} = 0$  или

$$b_{L(PT)} = \frac{\omega_{PT} L}{R_1^2 + (\omega_{PT} L)^2} =$$

$$= b_{C(PT)} = \frac{1/(\omega_{PT} C)}{R_2^2 + 1/(\omega_{PT} C)^2},$$

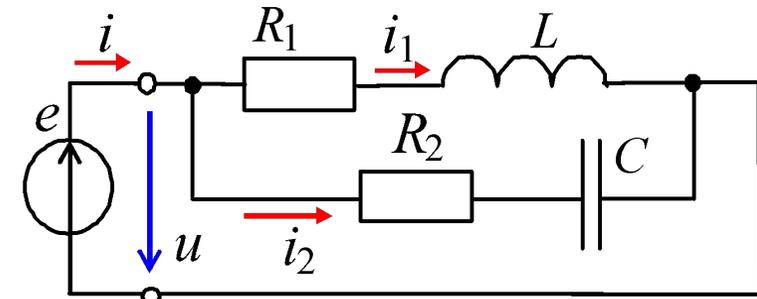


Рис. 8.5

Резонансная угловая частота

$$\omega_{PT} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{L/C - R_1^2}{L/C - R_2^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}$$

где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  - резонансная частота контура без потерь ( $R_1 = R_2 = 0$ );  $\rho = \sqrt{L/C}$  - характеристическое сопротивление контура.

В частном случае при  $R_2 = 0$  когда  $R_2 = 0$  и  $R_1 \ll \omega L$ , резонанс наступает при

$$\omega_{PT} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R_1^2 C}{L}},$$

$$\omega_{PT} \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Т.к. резонансная частота — действительна и положительна, то при **режим резонанса невозможен.**

такой режим возможен при

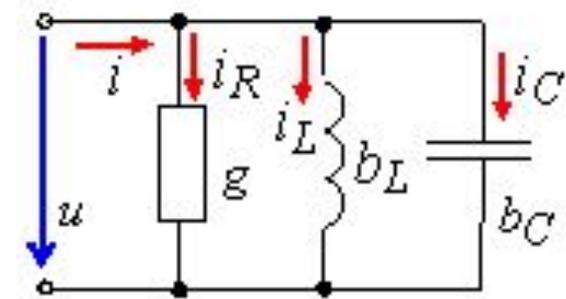
$$R_1 < \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ и } R_2 < \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$R_1 > \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ и } R_2 > \sqrt{\frac{L}{C}}$$

При  $R_1 = R_2 \neq \sqrt{\frac{L}{C}}$  резонансная частота  $\omega_{PT} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  не зависит от величины сопротивления  $R_1 = R_2$ , а при  $R_1 = R_2 = \rho$  имеем неопределенность:  $\omega_{PT} = \omega_0 \sqrt{\frac{0}{0}}$ . Физически это означает, что режим резонанса токов (так называемый вечный резонанс) может возникнуть на любой частоте.

Резонансные свойства цепи с двумя ветвями  $R_1L$  и  $R_2C$  удобно изучать на эквивалентной схеме замещения с тремя параллельно соединёнными ветвями с параметрами  $g$ ,  $b_L$  и  $b_C$ , равными

$$g = g_1 + g_2 = \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2} \quad b_L = \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} \quad b_C = \frac{1/(\omega C)}{R_2^2 + 1/(\omega C)^2}$$



Добротность  $Q$  параллельного колебательного контура равна

$$Q = \frac{b_{C(PT)}}{g_{PT}} = \frac{b_{L(PT)}}{g_{PT}}$$

либо отношению тока  $I_C$  в ветви с конденсатором (при  $R_2 = 0$ ) при режиме РТ и тока  $I_{PT}$  на зажимах контура

$$Q = \frac{I_{C(PT)}}{I_{PT}}$$

Ток  $I$  при РТ минимален

$$I_{PT} = \frac{U}{Z_{PT}} = UY_{PT} = U\sqrt{g_{PT}^2 + (b_{L(PT)} - b_{C(PT)})^2} = Ug_{PT} = I_{min}$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) тока  $I(f)$  и фазо-частотная характеристика (ФЧХ)  $\phi(f)$  реального и идеального контуров

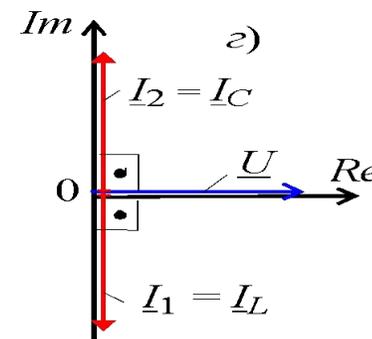
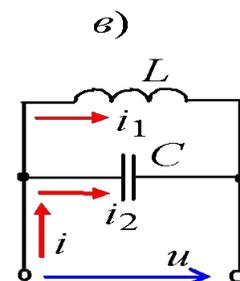
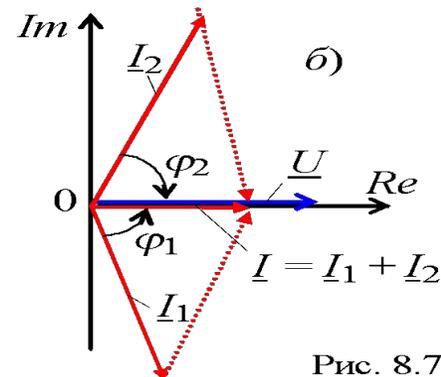
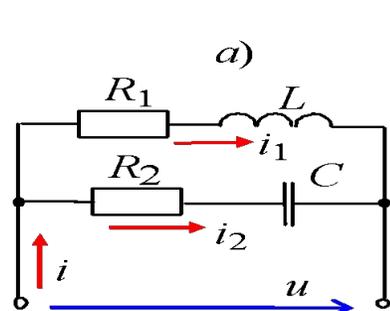
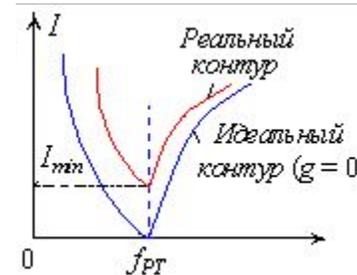
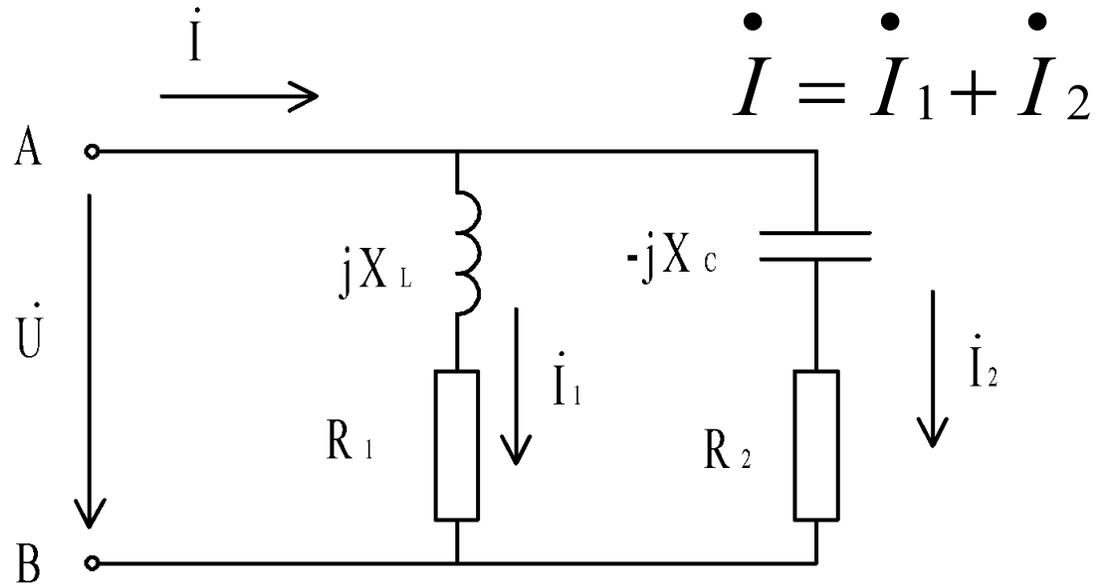


Рис. 8.7

# Параллельное соединение элементов в цепях синусоидального тока



$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_{\text{ЭKB1}}}$$

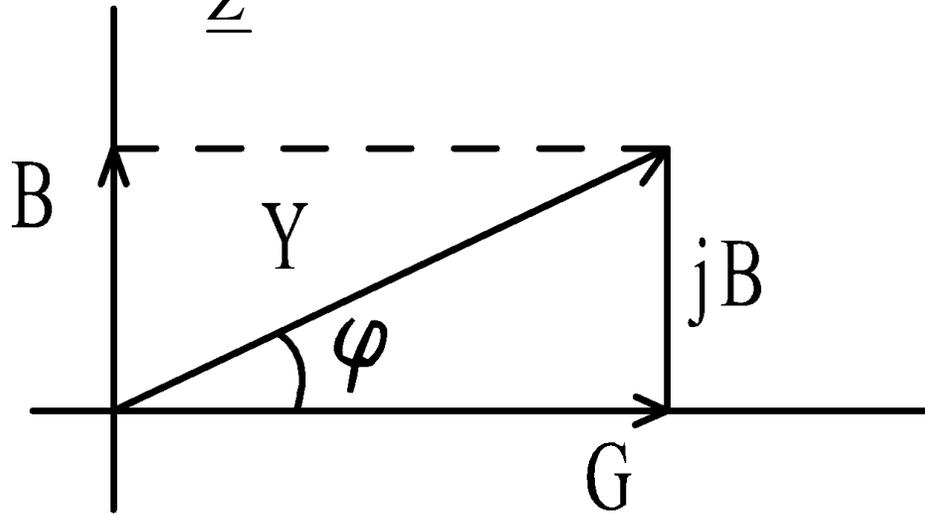
$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_{\text{ЭKB2}}}$$

$$\underline{Z}_{\text{ЭKB1}} = R_1 + jX_L \quad \underline{Z}_{\text{ЭKB2}} = R_2 - jX_C$$

# Треугольники проводимостей

$$Y = \frac{1}{\underline{Z}} = G + jB$$

$G$  – действительная часть, активная составляющая  
 $B$  – мнимая часть, реактивная составляющая



$$G = Y \cos \varphi$$

$$B = Y \sin \varphi$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

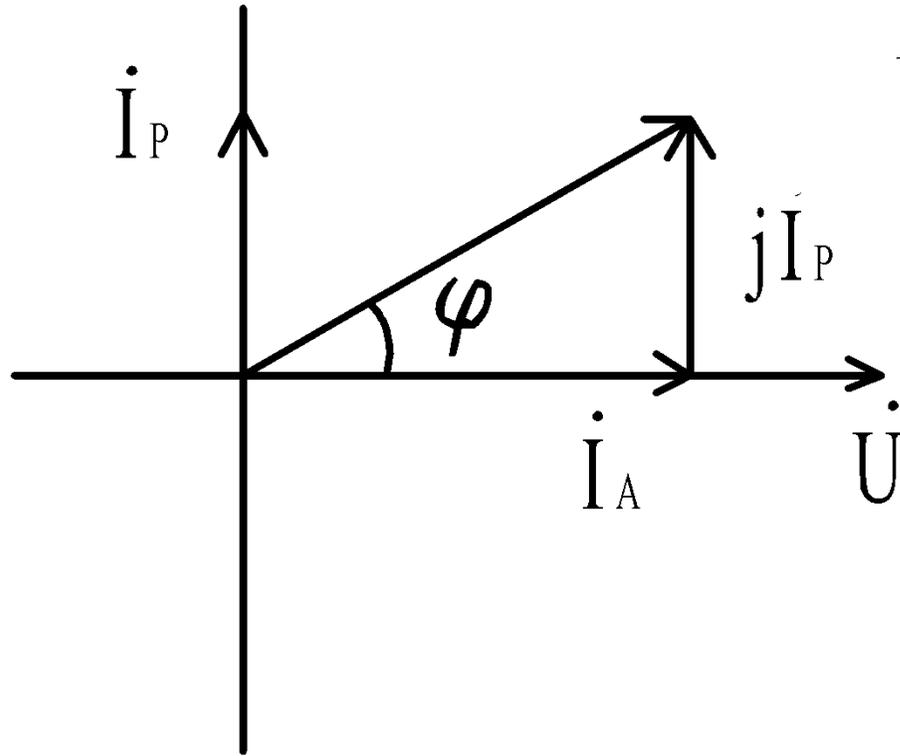
$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}$$

$$G = \frac{R}{Z^2}$$

$$B = \frac{X}{R^2 + X^2}$$

$$B = \frac{X}{Z^2}$$

# Треугольники токов



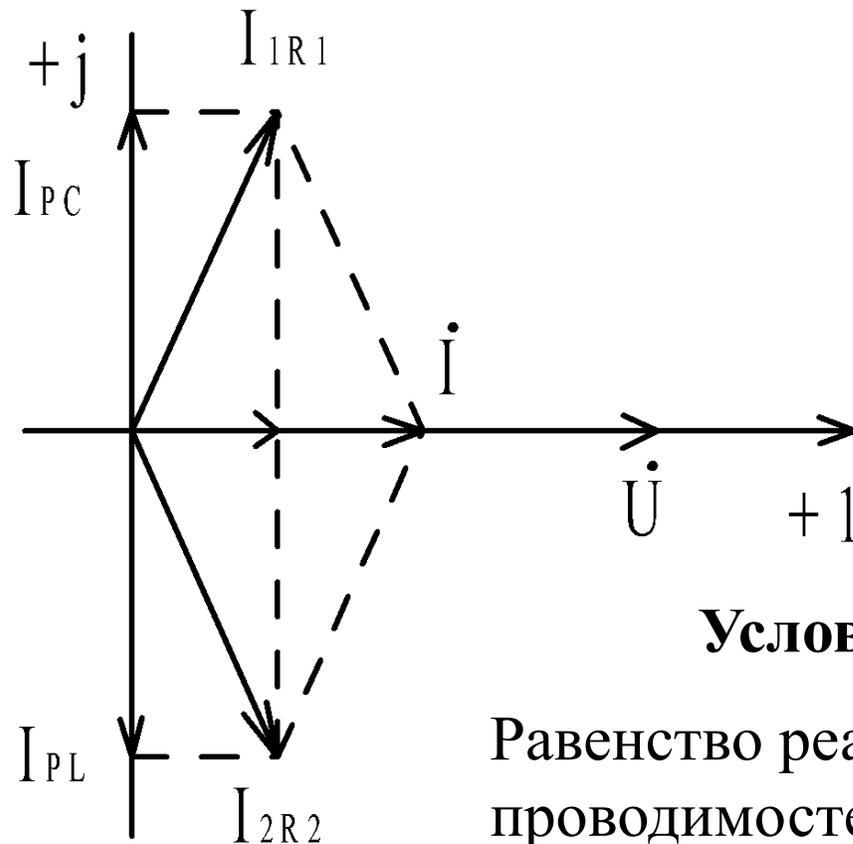
$$I = I e^{j\psi_i} = \sqrt{I_A^2 + I_P^2}$$

$$I_A = I \cos \varphi$$

$$I_P = I \sin \varphi$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{I_P}{I_A}$$

# Резонанс токов



Режим токов при котором в цепи, содержащей параллельные ветви с индуктивными и емкостными элементами, ток неразветвленного участка цепи совпадает по фазе с напряжением ( $\varphi=0$ ), называют резонансом токов.

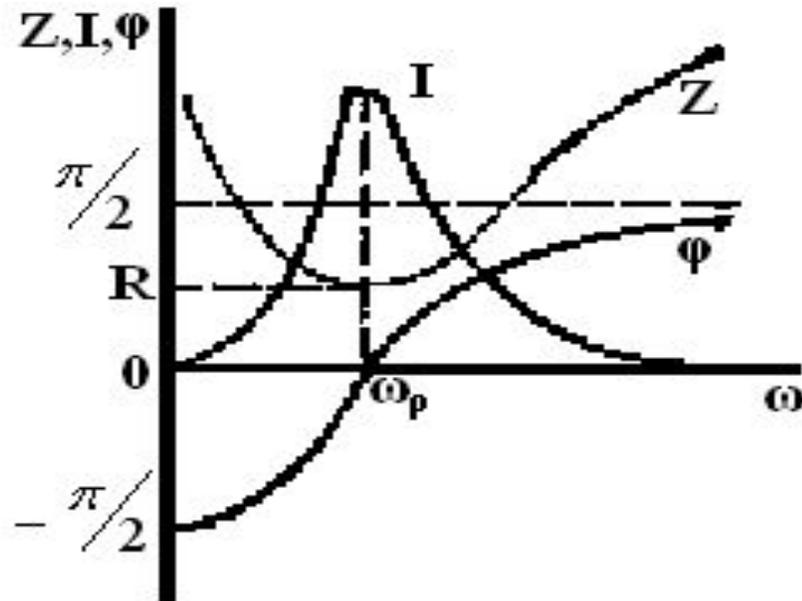
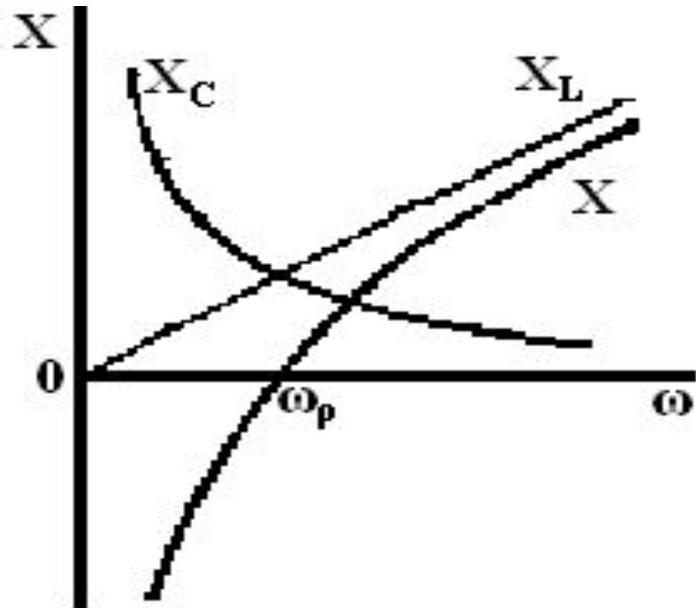
**Условие резонанса токов:**

Равенство реактивных составляющих проводимостей в ветвях  $B_L = B_C$

# Признаки резонанса токов

1. Токи ветвей равны  $I_{PC} = I_{PL}$  и находятся в противофазе.
2. Токи ветвей превышают полный ток цепи, который имеет минимальное значение.
3.  $I$  и  $U$  совпадают по фазе,  $\varphi = 0$

# Частотные характеристики цепей синусоидального тока

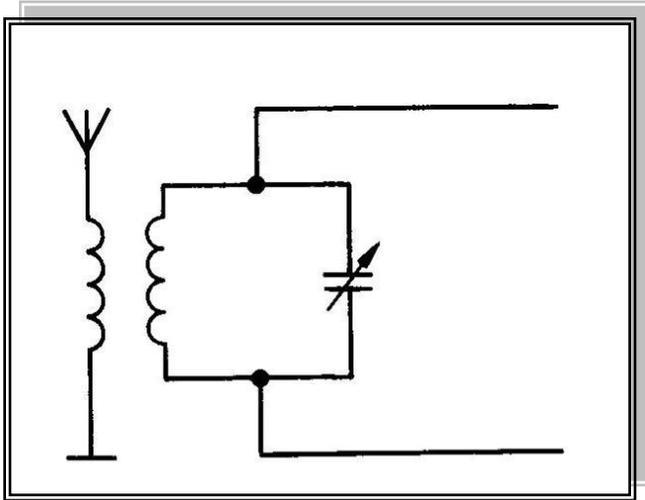


$R$  – активное сопротивление не зависит от частоты

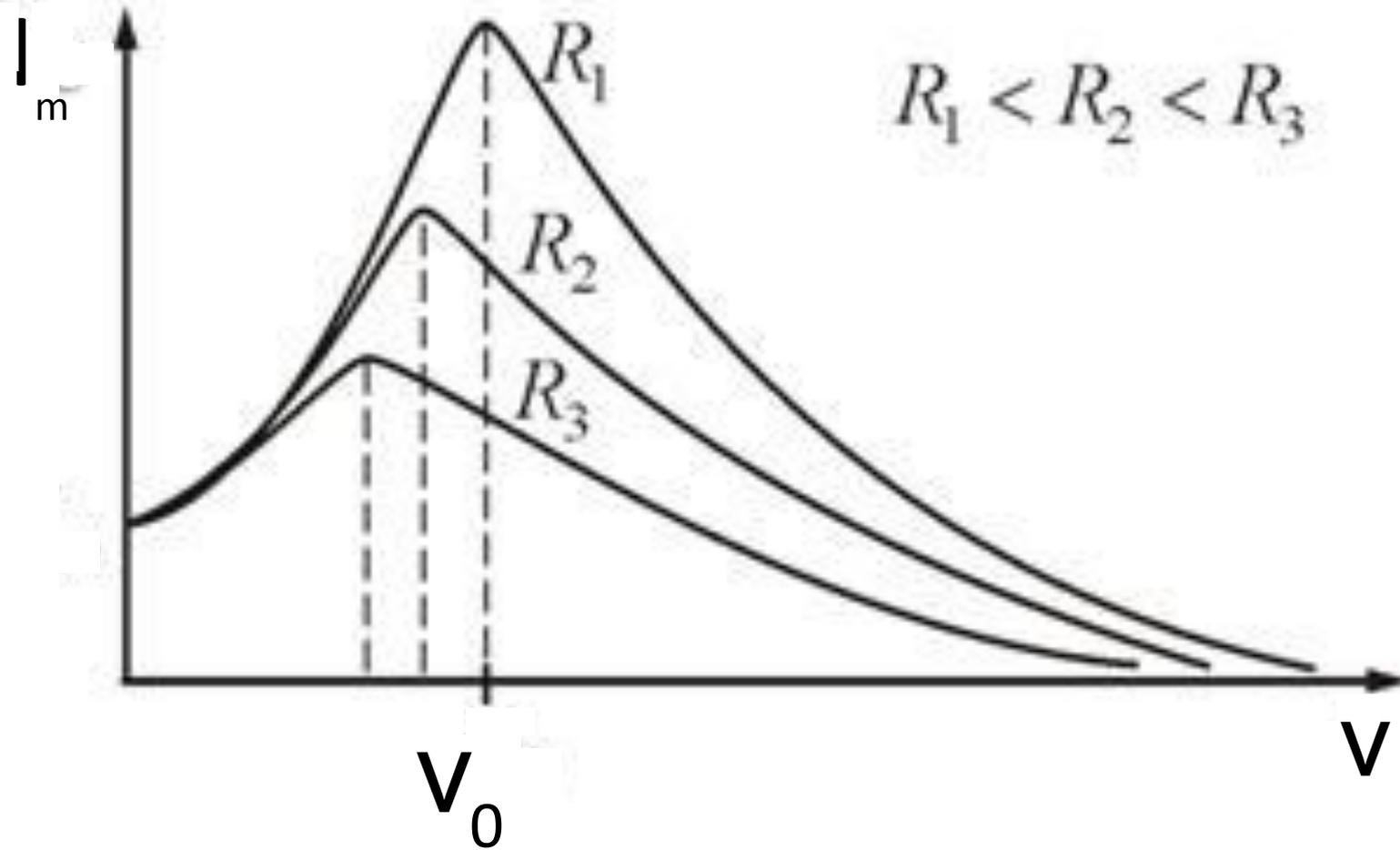
$X_L, X_C$  – реактивные сопротивления зависят от частоты

На графиках показаны зависимости тока, полного комплексного сопротивления и угла сдвига фаз от частоты

# *Применение электрического резонанса*



**Резонансная кривая при электрическом резонансе**



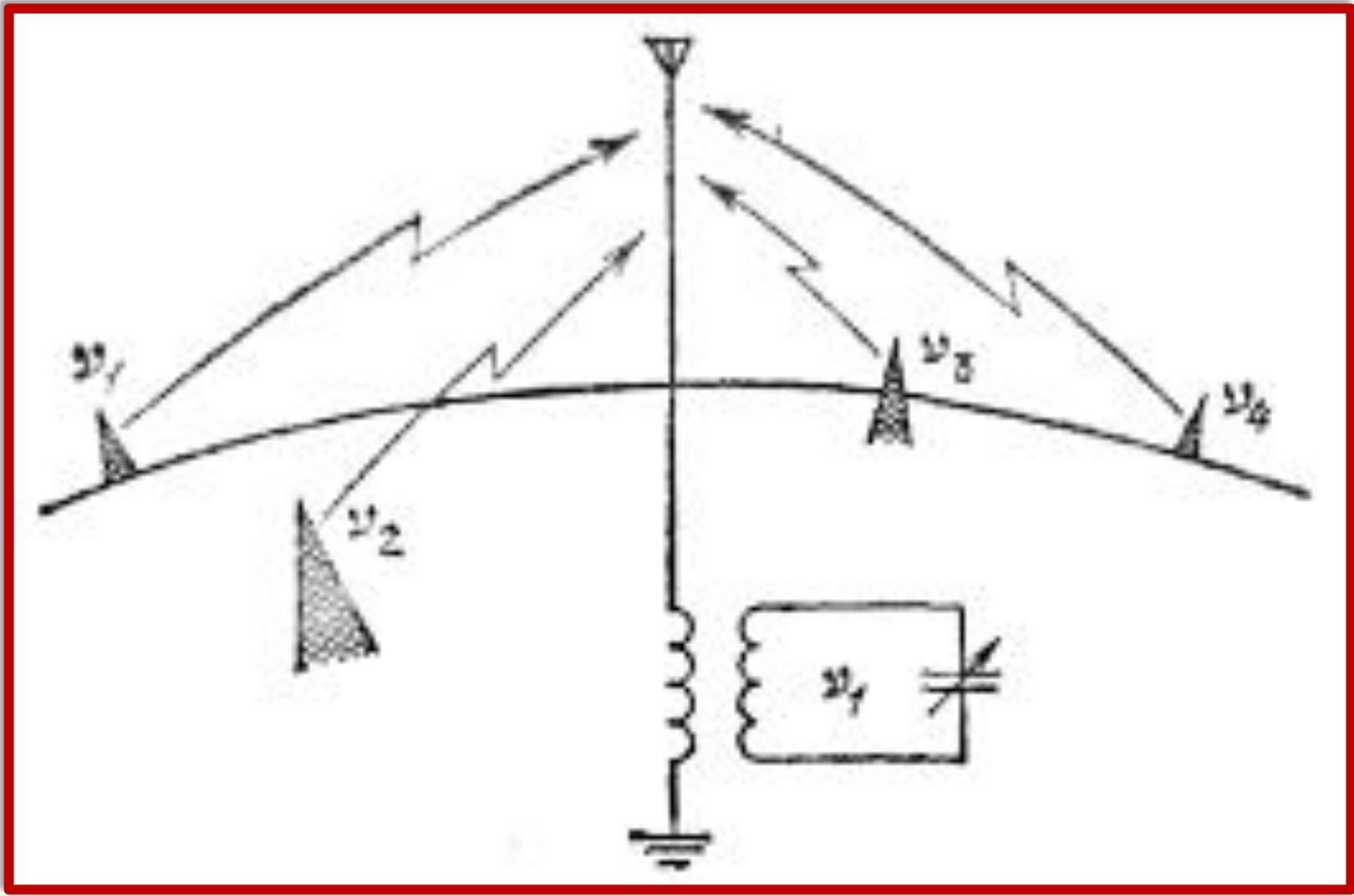
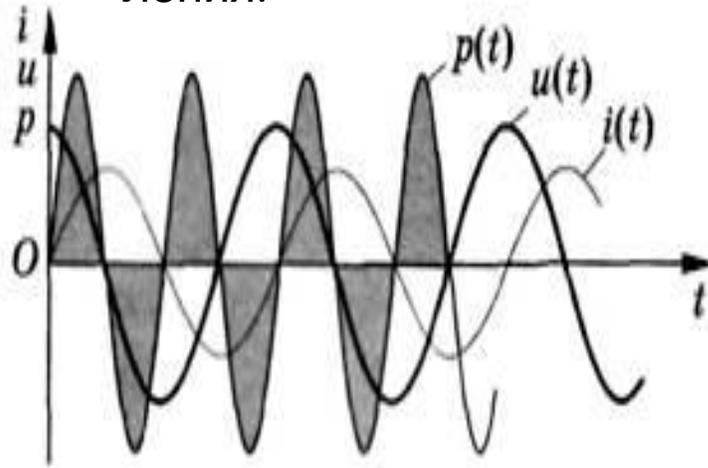


График колебаний мощности при наличии в цепи переменного тока только индуктивного сопротивления.



Из этого графика видно, что в течение одной четверти периода мощность положительна и энергия от сети поступает к данному участку цепи; но в течение следующей четверти периода мощность отрицательна, и данный участок отдает без потерь обратно в сеть полученную ранее энергию. Поступающая в течение четверти периода энергия запасается в магнитном поле тока, а затем без потерь

Лишь при наличии проводника с активным сопротивлением в цепи, электромагнитная энергия превращается во внутреннюю энергию проводника, который нагревается. Обратного превращения внутренней энергии в электромагнитную на участке с активным сопротивлением уже не происходит, энергия в сеть не возвращается.

**Механический резонанс** – увеличение амплитуды механических (звуковых) колебаний под влиянием внешних воздействий. В индийской классической музыке известен такой факт: если поместить гитару в пустой комнате в углу, а напротив искусный музыкант-гитарист станет играть, то другая гитара начнет вибрировать с той же частотой, что и первый, повторяя мелодию. Певец силой голоса может разбить вдребезги бокал при условии, что взятая нота точно соответствует частотным характеристикам этого бокала.

Известный индийский гомеопат Раджан Шанкаран также экспериментировал с резонансом и пением песен, стараясь войти в резонанс с пациентом