



Математический анализ  
2 семестр  
Занятие №4

Интегрирование дробно-  
рациональных и  
тригонометрических  
функций

## Занятие 4. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\begin{aligned}\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2Mx + Mp - Mp + 2N}{x^2 + px + q} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{M d(x^2 + px + q)}{(x^2 + px + q)} + \frac{1}{2} (2N - Mp) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)} = \\ &= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + (N - Mp/2) \int \frac{dx}{(x + p/2)^2 + (q - p^2/4)} = \\ &= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{N - Mp/2}{\sqrt{q - p^2/4}} \int \frac{1}{\left(\frac{x + p/2}{\sqrt{q - p^2/4}}\right)^2 + 1} d\left(\frac{x + p/2}{\sqrt{q - p^2/4}}\right) = \\ &= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{N - Mp/2}{\sqrt{q - p^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{x + p/2}{\sqrt{q - p^2/4}} + C\end{aligned}$$

## Занятие 4. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x dx}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{3} \left\{ \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{-x+1}{x^2+x+1} dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1+1/2}{\sqrt{1-1/4}} \operatorname{arctg} \frac{x+1/2}{\sqrt{1-1/4}} \right\} + C$$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1} = \frac{1/3}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + Mx^2 + Nx - Mx - N}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{x-1} + \frac{-x+1}{x^2+x+1} \right]$$

$$A = \frac{x}{x^2+x+1} \Big|_{x=1} = \frac{1}{3} \quad x^0: \frac{1}{3} - N = 0 \quad x^2: \frac{1}{3} + M = 0 \quad N = 1/3$$

$$M = -1/3$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{N-Mp/2}{\sqrt{q-p^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} + C$$

## Занятие 4. Интегрирование дробно-рациональных функций

$$1. \int \frac{3dx}{(x+1)(x^2 - x + 1)}$$

$$2. \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$$

$$3. \int \frac{3xdx}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$$

$$4. \int \frac{dx}{x(x+1)(x^2 + 1)}$$

$$5. \int \frac{x^2 dx}{(x-1)(x+1)(x^2 + 1)}$$

$$6. \int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} dx$$

$$7. \int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$$

$$8. \int \frac{5xdx}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)}$$

$$9. \int \frac{5x^2 + 9x + 4}{(x+2)(x^2 + 2x + 3)} dx$$

$$10. \int \frac{dx}{(x-2)(x^2 - 4x + 5)}$$

$$11. \int \frac{x^2 + 3x + 6}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)} dx$$

## Занятие 4. Интегрирование тригонометрических функций

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \quad t = \sin x$$

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \quad t = \cos x$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{\cos x(1 + \cos^2 x)} dx &= \left\langle \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\rangle = -\int \frac{dt}{t(1 + t^2)} = \\ &= \int \frac{tdt}{1 + t^2} - \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln(1 + t^2) - \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln(1 + \cos^2 x) - \ln|\cos x| + C \end{aligned}$$

## Занятие 4. Интегрирование тригонометрических функций

1.  $\int \cos^5 x \, dx$

2.  $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x \, dx$

3.  $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

4.  $\int \frac{2dx}{\sin x}$

5.  $\int \frac{dx}{\cos x}$

6.  $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x}$

7.  $\int \frac{\sin x \, dx}{1 + \cos^2 x}$

8.  $\int \frac{2 \sin x \, dx}{(\cos x - 1)(1 + \cos^2 x)}$

9.  $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^5 x}$

10.  $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$



Спасибо за  
внимание

Занятие окончено