Основы теории множеств

Понятие множества

Понятие множества является основным, неопределяемым понятием, поэтому его можно только пояснить.

Учебные группы: 589-1, 589-2, 589-3

- Интуитивное определение «множества» принадлежит немецкому математику Георгу Кантору (1845-1918).

Георг Кантор

- Под **множеством** *S* будем понимать любое собрание определенных и различимых между собою объектов, мыслимое как единое целое.
- Эти объекты называются **элементами** множества *S*.

- **Существенным** в определении *множества*, данном Кантором, является то, что само собрание предметов рассматривается как один предмет и мыслится как *единое целое*.

- Что касается самих предметов, которые входят во множество, то относительно них существует значительная свобода.

- Это может быть множество студентов в аудитории, множество целых чисел, множество точек плоскости.
- Важно, что ***канторовская формулировка*** позволяет рассматривать множества, элементы которых по той или иной причине нельзя точно указать (например, множество простых чисел, множество белых носорогов и т. п.).
- Не следует думать, что множество обязательно должно содержать в каком-то смысле однородные объекты. Можно объединить в одно множество и королей, и капусту.

Интуитивные принципы Кантора

Принцип абстракции

Любой одноместный предикат $A(x)$ определяет некоторое множество X, а именно множество тех и только тех предметов x, для которых $A(x)$ – истинное предложение.

Принцип объемности

Множества A и B считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

(Часто это выражают словами: «Множества равны, если их характеристические свойства эквивалентны»).

Записывают $A=B$, если A и B равны,
в противном случае – $A \neq B$.

*

Пример.*Проиллюстрируем принцип объёмности*.

Множество A всех положительных *чётных* чисел равно множеству B положительных целых чисел, представимых в виде суммы двух положительных *нечетных* чисел.

Действительно, если $x \in A$, то для некоторого целого положительного числа m имеем $x = 2m$; тогда $x = (2m – 1) + 1$, т. е. $x \in B$.

Если $x \in B$, то для некоторых целых положительных p и q имеем $x = (2p – 1) + (2q - 1) = 2(p + q – 1)$, т.е. $x \in A$.

Обозначение конечных множеств

- Множество, элементами которого являются объекты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и только они, обозначают $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

- Его определение через характеристическое свойство:

  $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{x \mid x = a_1 \vee x , \ldots, a_1 \vee \ldots \vee x = a_n\}$.

- Исходя из этого тождества, можно видеть, в частности, что

  $\{a, b\} = \{b, a\}$, $\{a, a\} = \{a\}$.

- В общем случае порядок, в котором элементы расположены при описании множества, *не имеет значения*;
- не имеет значения также возможность *неоднократного повторения* одних и тех же элементов при описании множества.

- ещё одна тонкость:
  Нужно строго различать x и $\{x\}$.

Первое выражение обозначает сам элемент,

а второе – множество, содержащее этот один элемент.

$A = \{x, c, s, v, t\}$

$B = \{t, c, v, s, t, c, x, \}$

A = B ?

Отношение принадлежности и характеристическое свойство

Символом $\in$ обозначается **отношение принадлежности**.

- Запись $x \in S$ означает, что элемент x принадлежит множеству S.
- Если элемент x не принадлежит множеству S, то пишут $x \notin S$.

Множество всех объектов, обладающих свойством $A(x)$, обозначается $\{x \mid A(x)\}$.

- Если $Y = \{x \mid A(x)\}$, то $A(x)$ называется **характеристическим свойством** множества Y.

- По определению Y, выполнена следующая эквивалентность:

$$\forall y (y \in Y \sim A(y)).$$

Подмножества множества

- Множество A есть **подмножество** множества B (обозначается $A \subseteq B$), если каждый элемент A есть элемент B; т.е. если $x \in A$, то $x \in B$.

  Отношение $\subseteq$ между множествами называется отношением **включения**.

- В частности, каждое множество есть подмножество самого себя.

  Если A не является подмножеством B, то, значит, существует элемент A, не принадлежащий B.

Определить:

$$\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}?$$

$$\{1, 2, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}?$$

Если $A = \{x|\ x$ – футболист факультета$\}$, $B = \{x|,\ x$ спортсмен факультета$\}$, а $C = \{x|\ x$ – самый сильный математик факультета$\}$, то

$A \subseteq B$?

C является подмножеством B?

запомнить:

а) $X \subseteq X$;

б) если $X \subseteq Y$, $Y \subseteq Z$, то $X \subseteq Z$;

в) если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, то $X = Y$.

Если множество A есть **собственное подмножество** множества B, *то пишут* (обозначается $A \subset B$), если $A \subset B$ и $A \neq B$.

- Если A не является собственным подмножеством B, то это означает, что либо $A=B$, либо существует элемент A, не принадлежащий B.

- Отношение $\subset$ между множествами называется отношением **строгого включения**.

*

Подмножества множества (продолжение)

*

- Множество всех подмножеств *A* называется **множеством-степенью** и обозначается $P(A)$.

- Из определения следует, что $X \in \mathrm{P}(A)$, тогда и только тогда, когда $X \subseteq A$.

- **Пример**. Если $A = \{1,2,3\}$, то $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2,3\}, A\}$.

- В дальнейшем неоднократно будем пользоваться утверждением, что если множество *A* состоит из *n* элементов, то множество $P(A)$ состоит из 2^n элементов.

Доказательство равенства множеств A и B состоит из двух этапов:

1) Доказать, что A есть подмножество B.
2) Доказать, что B есть подмножество A.

- Множество, не содержащее элементов, называется **пустым** и обозначается $\varnothing$.
- Пустое множество есть подмножество любого множества.

  Очевидно, что пустое множество задается тождественно ложным характеристическим свойством, и соответственно все пустые множества равны.
- Поэтому считается, что множество квадратных кругов равно множеству белых ворон.

САМОСТОЯТЕЛЬНО изучить тему:

Классификация чисел

Натуральные числа - ***число натурального*** ряда 1, 2, 3, 4, .. и так до бесконечности**;** единица и все ***числа***, которые можно получить в результате сложения единиц.

- ***Натуральные числа это***
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15 и так далее.
Их используют при подсчёте предметов.

- ***Ненатуральные числа*** - это все другие числа (дробные, отрицательные, числа, получаемые после извлечения корня, значения тригонометрических функций, логарифмы)

Действительные числа (*R*) *–действительное число или как его еще называют* ***вещественное число*** *- это любое положительное число, отрицательное число или нуль.*

Действительные числа разделяются на

Рациональные	***иррациональные***

Иррациональное число (I), это число, которое в ***десятичном*** виде можно записать ***только*** непериодической бесконечной десятичной дробью. В том к ним относятся число **Пи и Экспонента**.

(Иррациональные числа не представимы в виде обыкновенной дроби).

Действительные числа разделяются на

Рациональные числа

Иррациональные числа

Рациональные числа (Q) - Рациональное число (лат. ratio — отношение, деление, дробь) — число, представляемое обыкновенной дробью , где числитель m — целое число, а знаменатель n — ***натуральное*** число.

Комплексные числа (*C*)

Комплексное число это упорядоченная пара чисел Z=(x,y) , где *первое число это действительная часть*,
второе число- мнимая часть числа С.

Для компл. чисел определили операции сложения и умножения

$Z1+Z2=(x1,y1)+(x2,y2)= (x1+x1, y1+y2)$;

$Z1*Z2=(x1,y1)*(x2,y2)=(x1*x2-y1*y2, x1*y2+y1*x2)$.

Для этих действий не нарушаются всякие законы, типа переместительного и пр.
Поэтому ими можно пользоваться.

Проверим это :

- ***Действительные числа*** **можно представлять в виде $z=(x,0)$.**
- ***Мнимые в виде*** **$Z=(0,y)$ или $Z= i*y$, где i- мнимая единица. $i=(0,1)$.**

Проверка.

$$Z=(0,1)*(0,y)=(0*y-1*0,\ 0*0+1*y)=(0,y)\ .$$

Как и было написано сначала ($Z=(0,y)$)

- **Пример**. Пусть A обозначает множество чётных чисел, Q – множество рациональных чисел, R – множество действительных чисел, а C – множество комплексных чисел. Тогда выполняются строгие включения $A \subset Q$, $Q \subset R$, $R \subset C$.
- Очевидно, если $X \subset Y$, $Y \subset Z$, то $X \subset Z$.
- Не надо смешивать отношения принадлежности и включения. Например, имеем $\{1\} \in \{\{1\}\}$ и $\{1\}$ не является подмножеством $\{\{1\}\}$, с другой стороны $1 \notin \{\{1\}\}$, так как единственным элементом множества $\{\{1\}\}$ является $\{1\}$.

Пример 2. **Множество чётных чисел (А)**

Решить аналитически:

Множество чётных чисел (А) является подмножеством комплексных чисел (С) ?

Решение примера 2.

Обозначим классы чисел:

R – множество действительных чисел.

Q - множество рациональных чисел.

C - множество комплексных чисел.

Знаем —

$R = \{ \{Q\}, \{I_p\}\}$

Тогда :

$A \subset Q;$

$Q \subset R;$ $R \subset C;$ $\Rightarrow$ $A \subset C.$

Операции над множествами

Получения новых множеств из уже существующих

- **Объединением** множеств *A* и В называется множество $A \cup B$, все элементы которого являются элементами множества *A* или *B*:

  $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.
- **Пересечением** множеств *A* и *B* называется множество $A \cap B$, элементы которого являются элементами обоих множеств *A* и *B*:

  $A \cap B = \{ x \mid x \in A \;\&\; x \in B\}$.

Выполняются включения $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ и $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.

Говорят, что два множества не пересекаются, если их пересечение – пустое множество.

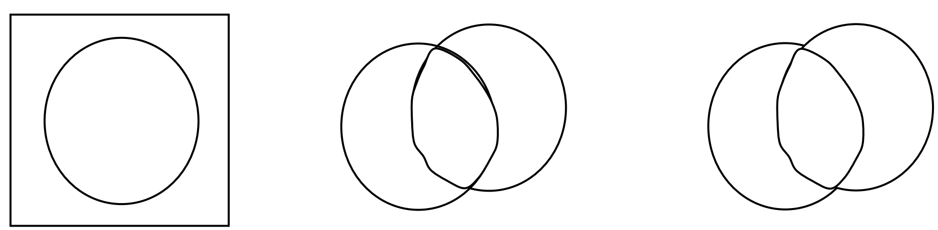
- **Относительным дополнением** множества *A* до множества *X* называется множество $X \setminus A$ всех тех элементов множества *X*, которые не принадлежат множеству *A*:

  $X \setminus A = \{x \mid x \in X \;\&\; x \notin A\}$. (также называют разностью множеств *X* и *A*)
- **Симметрической разностью** множеств A и B называется множество $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. *)
- Когда фиксирован универсум *U* **абсолютным дополнением** множества *A* называется множество   всех тех элементов *x*, которые не принадлежат множеству *A*:

  $\overline{A} = \{ x \mid x \in U \;\&\; x \notin A\}$.
- Заметим, что $\overline{A} = U \setminus A$. Часто вместо $\overline{A}$ будем писать $\neg A$ или *A’*.

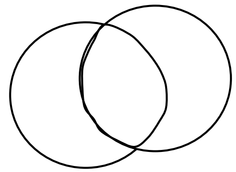
Диаграммы Эйлера

- Первым стал использовать теперь общепринятые обозначения операций над множествами Джузеппе Пеано (1888 г.).
- Для наглядного представления отношений между подмножествами какого-либо универсума используются диаграммы Эйлера. В этом случае множества обозначают областями на плоскости и внутри этих областей условно располагают элементы множества.
- Часто все множества на диаграмме размещают внутри квадрата, который представляет собой универсум *U*.
- Если элемент принадлежит более чем одному множеству, то на диаграмме области, отвечающие таким множествам, должны перекрываться, чтобы общий элемент мог одновременно находиться в соответствующих областях.

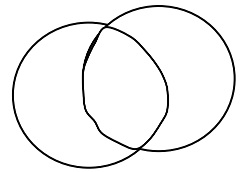


$\neg A$ $A \cap B$ $A \cup B$

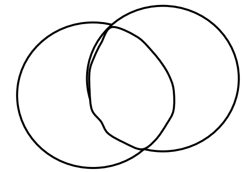
Диаграммы Эйлера (продолжение)



$A \setminus B$



$B \setminus A$



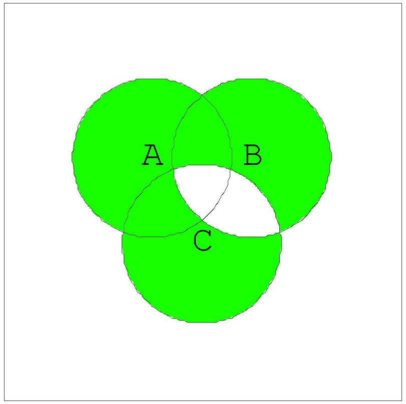
$A \div B$

- Здесь не имеет значения относительный размер кругов либо других замкнутых областей, но лишь их взаимное расположение.
- Безусловно, такие диаграммы могут играть в логике лишь ту роль, что чертежи в геометрии: они иллюстрируют, помогают представить и доказать, но сами ничего не доказывают.
- Объединение, пересечение и дополнение обычно называются **булевскими операциями**, составленные из множеств с их помощью выражения – **булевыми выражениями**, значение такого выражения – **булевой комбинацией** входящих в него множеств, а равенство двух булевых выражений – **булевыми тождествами**.

Диаграммы Эйлера (продолжение)

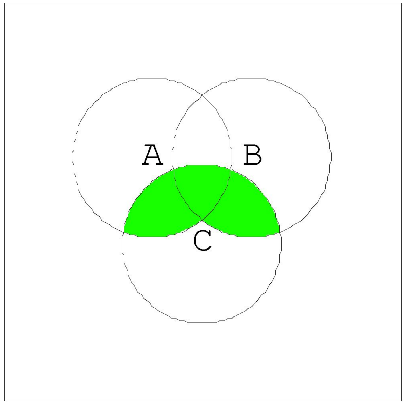
Пример. Отношения между религиями

Булевы выражения



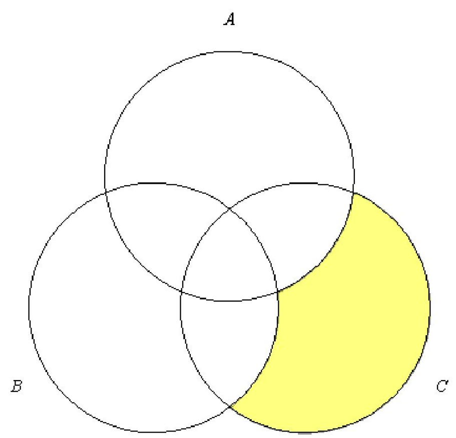
$(A \cup B \cup C) \setminus (C \cap B) =$
$(C \div B) \cup (A \setminus (A \cap B \cap C))$

Джордж Буль

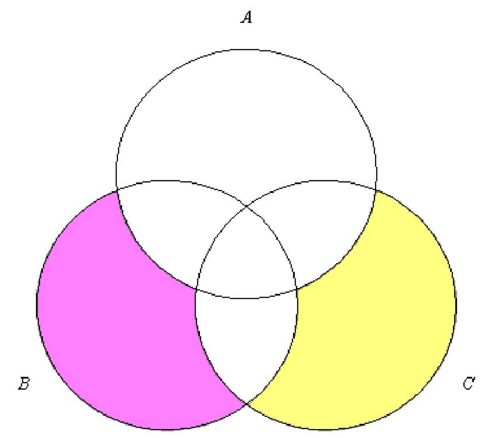


$(A \cap C) \cup (B \cap C) =$
$C \setminus \neg(A \cup B)$

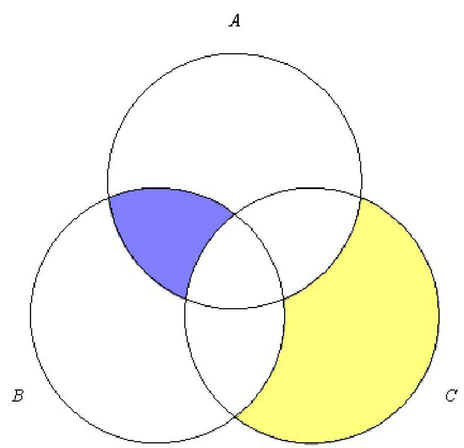
Булевы выражения (продолжение)



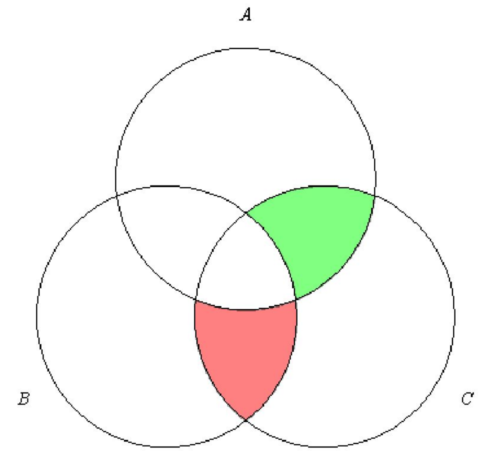
$C \cap A' \cap B'$



$(B \cup C) \cap A' \cap (B \cap C)'$



$(C \cap A' \cap B') \cup (A \cap B \cap C')$



$(A \cap C \cap B') \cup (B \cap C \cap A')$

Булевы тождества

Теорема 4. Для любых подмножеств A, B и C универсума U выполняются следующие основные булевы тождества:

1	$A \cup B = B \cup A$ (коммутативность $\cup$)	$A \cap B = B \cap A$ (коммутативность $\cap$)
2	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность $\cup$)	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность $\cap$)
3	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность $\cup$ относительно $\cap$)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность $\cap$ относительно $\cup$)
4	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap U = A$
5	$A \cup \neg A = U$	$A \cap \neg A = \varnothing$
6	$A \cup A = A$ (идемпотентность $\cup$)	$A \cap A = A$ (идемпотентность $\cap$)

Булевы тождества (продолжение)

Теорема 4 (продолжение).

7	$A \cup U = U$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
8	$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$ (закон де Моргана)	$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$ (закон де Моргана)
9	$A \cup (A \cap B) = A$ (закон поглощения)	$A \cap (A \cup B) = A$ (закон поглощения)

10 $A \setminus B = A \cap \neg B$

Докажем тождество $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Сначала покажем, что $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Действительно, если $x \in A \cup (B \cap C)$, то $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Если $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$. Отсюда $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, а значит, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

ПРИМЕРЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Доказать: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Имеем $A \cup (B \cap C) = \{x \mid x \in A \cup (B \cap C)\} =$

(по определению объединения и пересечения множеств)

$\{x \mid x \in A \vee (x \in B \,\&\, x \in C)\} =$

(дистрибутивность $\vee$ относительно &)

$\{x \mid (x \in A \vee x \in B) \,\&\, (x \in A \vee x \in C)\} = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Продолжение
(*доказательство справа*)

•**Доказем тождество $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$.**

Пусть $x \in \neg(A \cup B)$.

Тогда $x \in U$ и $x \notin A \cup B$.

Следовательно, $x \notin A$ и $x \notin B$.

Отсюда $x \in \neg A$ и $x \in \neg B$,

значит, $x \in \neg A \cap \neg B$.

Итак доказали, что $\neg(A \cup B) \subseteq \neg A \cap \neg B$.

Пусть теперь, $x \in \neg A \cap \neg B$.

Тогда $x \in \neg A$ и $x \in \neg B$.

Следовательно, $x \in U$ и $x \notin A$ и $x \notin B$.

Значит, $x \notin A \cup B$, т.е. $x \in \neg(A \cup B)$.

Итак, $\neg A \cap \neg B \subseteq \neg(A \cup B)$.

Второй способ доказательства.

- Имеем $\neg(A \cup B) = \{x \mid x \in \neg(A \cup B)\} =$
- (по определению дополнения и объединения)
- $\{ x \mid x \in U \;\&\; \neg (x \in A \vee x \in B)\} =$

  (закон де Моргана для $\vee$)

  $\{ x \mid x \in U \;\&\; \neg(x \in A) \;\&\; \neg(x \in B)\} =$

  (определение дополнения)

  $\{ x \mid x \in \neg A \;\&\; x \in \neg B\} = \neg A \cap \neg B$.

Остальные тождества доказываются аналогично. Справедливость этих тождеств можно наглядно проиллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера, *но это не является доказательством*.

С другой стороны, диаграмму вполне можно использовать, чтобы на частном примере *опровергнуть* какое-нибудь общее утверждение.

Второй способ доказательства.

- Имеем $\neg(A \cup B) = \{x \mid x \in \neg(A \cup B)\} =$
- (по определению дополнения и объединения)
- $\{ x \mid x \in U \ \& \ \neg (x \in A \lor x \in B)\} =$

  (закон де Моргана для $\lor$)

  $\{ x \mid x \in U \ \& \ \neg(x \in A) \ \& \ \neg(x \in B)\} =$

  (определение дополнения)

  $\{ x \mid x \in \neg A \ \& \ x \in \neg B\} = \neg A \cap \neg B$.

Теорема 5.

Рассмотрим предложения о произвольных множествах *A* и *B* - (попарно эквивалентны):

1) $A \cap B = A$

2) $A \cup B = B$

3) $A \subseteq B$

Доказательство.

Докажем, что из первого предложения следует второе.

Действительно, так как $A \cap B = A$, то достаточно показать, что в этом случае $A \subseteq A \cap B$.

Но если $x \in A$, то $x \in B$, так как $A \subseteq B$, следовательно, $x \in A \cap B$.

Докажем, что из второго предложения следует третье.

Так как $A \cap B = A$, то $A \cup B = (A \cap B) \cup B$.

По закону поглощения (см. тождества) запишем:

$$B \cup (A \cap B) = B.$$

Отсюда, используя закон коммутативности, получаем $A \cup B = B$.

Докажем, что из третьего предложения следует первое.

Так как $A \subseteq A \cup B$, а по условию третьего предложения $A \cup B = B$, то $A \subseteq B$.