

Основы теории множеств



Понятие множества

Понятие множества является основным, неопределяемым понятием, поэтому его можно ТОЛЬКО ПОЯСНИТЬ.

Учебные группы: 589-1, 589-2, 589-3

- Интуитивное определение «множества» принадлежит немецкому математику **Георгу Кантору** (1845-1918).



Георг Кантор

- Под **множеством S** будем понимать любое собрание определенных и различных между собою объектов, мыслимое как единое целое.
- Эти объекты называются **элементами** множества **S** .

- **Существенным** в определении *множества*, данном Кантором, является то, что само собрание предметов рассматривается как один предмет и мыслится как *единое целое*.
- Что касается самих предметов, которые входят во множество, то относительно них существует значительная свобода.

- Это может быть множество студентов в аудитории, множество целых чисел, множество точек плоскости.
- Важно, что *канторовская формулировка* позволяет рассматривать множества, элементы которых по той или иной причине нельзя точно указать (например, множество простых чисел, множество белых носорогов и т. п.).
 - Не следует думать, что множество обязательно должно содержать в каком-то смысле однородные объекты. Можно объединить в одно множество и королей, и капусту.

Интуитивные принципы Кантора

Принцип абстракции

Любой одноместный предикат $A(x)$ определяет некоторое множество X , а именно множество тех и только тех предметов x , для которых $A(x)$ – истинное предложение.

Принцип объемности

Множества A и B считаются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов.

(Часто это выражают словами: «**Множества равны, если их характеристические свойства эквивалентны**»).

Записывают $A=B$, если A и B равны,
в противном случае – $A \neq B$.

*

Пример. Проиллюстрируем принцип объёмности.

Множество A **всех положительных чётных чисел** равно множеству B **положительных целых чисел, представимых в виде суммы двух положительных нечетных чисел.**

Действительно, если $x \in A$, то для некоторого целого положительного числа m имеем $x = 2m$; тогда $x = (2m - 1) + 1$, т. е. $x \in B$.

Если $x \in B$, то для некоторых целых положительных p и q имеем $x = (2p - 1) + (2q - 1) = 2(p + q - 1)$, т.е. $x \in A$.

Обозначение конечных множеств

- Множество, элементами которого являются объекты a_1, a_2, \dots, a_n и только они, обозначают $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.
- Его определение через характеристическое свойство:

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{x \mid x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots \vee x = a_n\}.$$
- Исходя из этого тождества, можно видеть, в частности, что

$$\{a, b\} = \{b, a\}, \quad \{a, a\} = \{a\}.$$

- В общем случае порядок, в котором элементы расположены при описании множества, *не имеет значения*;
- не имеет значения также возможность *неоднократного повторения* одних и тех же элементов при описании множества.

- ещё одна тонкость:
Нужно строго различать x и $\{x\}$.

Первое выражение обозначает сам элемент,
а второе – множество, содержащее этот один элемент.

$$A = \{x, c, s, v, t\}$$

$$B = \{t, c, v, s, t, c, x, \}$$

$$A = B ?$$

Отношение принадлежности и характеристическое свойство

Символом \in обозначается **отношение принадлежности**.

- Запись $x \in S$ означает, что элемент x принадлежит множеству S .
- Если элемент x не принадлежит множеству S , то пишут $x \notin S$.

Множество всех объектов, обладающих свойством $A(x)$, обозначается $\{x \mid A(x)\}$.

- Если $Y = \{x \mid A(x)\}$, то $A(x)$ называется **характеристическим свойством** множества Y .

- По определению Y , выполнена следующая эквивалентность:
$$\forall y (y \in Y \sim A(y)).$$

Подмножества множества

- Множество A есть **подмножество** множества B (обозначается $A \subseteq B$), если каждый элемент A есть элемент B ; т.е. если $x \in A$, то $x \in B$.

Отношение \subseteq между множествами называется отношением **включения**.

- В частности, каждое **множество есть подмножество самого себя**.

Если A не является подмножеством B , то, значит, существует элемент A , не принадлежащий B .

Определить:

$$\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}?$$

$$\{1, 2, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}?$$

Если $A = \{x \mid x \text{ – футболист факультета}\}$, $B = \{x \mid x \text{ – спортсмен факультета}\}$, а $C = \{x \mid x \text{ – самый сильный математик факультета}\}$, то

$A \subseteq B$?

C является подмножеством B ?

запомнить:

а) $X \subseteq X$;

б) если $X \subseteq Y$, $Y \subseteq Z$, то $X \subseteq Z$;

в) если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, то $X = Y$.

Если множество A есть **собственное подмножество** множества B , то пишут (обозначается $A \subset B$), если $A \subset B$ и $A \neq B$.

- Если A не является собственным подмножеством B , то это означает, что либо $A=B$, либо существует элемент A , не принадлежащий B .
- Отношение \subset между множествами называется отношением **строгого включения**.

*

Подмножества множества (продолжение)

*

- Множество всех подмножеств A называется **множеством-степенью** и обозначается $P(A)$.
- Из определения следует, что $X \in P(A)$, тогда и только тогда, когда $X \subseteq A$.
- **Пример.** Если $A = \{1, 2, 3\}$, то $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$.
- В дальнейшем неоднократно будем пользоваться утверждением, что **если множество A состоит из n элементов, то множество $P(A)$ состоит из 2^n элементов.**

Доказательство равенства множеств A и B состоит из двух этапов:

- 1) Доказать, что A есть подмножество B .
- 2) Доказать, что B есть подмножество A .

- Множество, не содержащее элементов, называется **пустым** и обозначается \emptyset .
- **Пустое множество есть подмножество любого множества.**

Очевидно, что пустое множество задается тождественно ложным характеристическим свойством, и соответственно все пустые множества равны.

- **Поэтому считается, что множество квадратных кругов равно множеству белых ворон.**

САМОСТОЯТЕЛЬНО изучить тему:

Классификация чисел

Натуральные числа - число натурального ряда 1, 2, 3, 4, .. и так до бесконечности; единица и все **числа**, которые можно получить в результате сложения единиц.

• **Натуральные числа это**

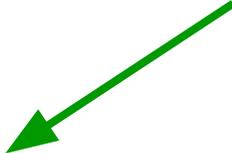
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15 и так далее.

Их используют при подсчёте предметов.

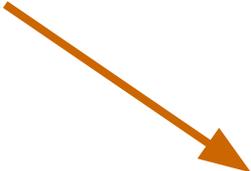
• **Ненатуральные числа** - это все другие числа (дробные, отрицательные, числа, получаемые после извлечения корня, значения тригонометрических функций, логарифмы)

Действительные числа (R) – действительное число или как его еще называют **вещественное число** - это любое положительное число, отрицательное число или нуль.

Действительные числа разделяются на



Рациональные



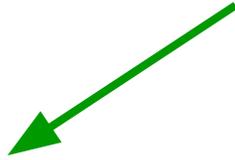
иррациональные



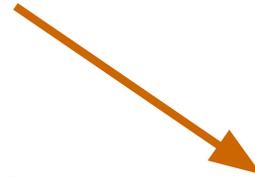
Иррациональное число (I), это число, которое в **десятичном** виде можно записать **только** непериодической бесконечной десятичной дробью. В том к ним относятся число **Пи** и **Экспонента**.

(Иррациональные числа не представимы в виде обыкновенной дроби).

Действительные числа разделяются на



**Рациональные
числа**



**Иррациональные
числа**



Рациональные числа (Q) - Рациональное число (лат. ratio — отношение, деление, дробь) — число, представляемое обыкновенной дробью , где числитель m — целое число, а знаменатель n — **натуральное** число.

Комплексные числа (C)

Комплексное число это упорядоченная пара чисел $Z=(x,y)$, где *первое число это действительная часть,*
второе число- мнимая часть числа C.

Для компл. чисел определили операции сложения и умножения

$$Z_1 + Z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) ;$$

$$Z_1 * Z_2 = (x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 * x_2 - y_1 * y_2, x_1 * y_2 + y_1 * x_2) .$$

Для этих действий не нарушаются всякие законы, типа переместительного и пр.

Поэтому ими можно пользоваться.

Проверим это :

- Действительные числа можно представлять в виде $z=(x,0)$.
- Мнимые в виде $Z=(0,y)$ или $Z= i*y$, где i - мнимая единица. $i=(0,1)$.

Проверка.

$$Z=(0,1)* (0,y)= (0*y-1*0, 0*0+1*y)= (0,y) .$$

Как и было написано сначала ($Z=(0,y)$)

- **Пример.** Пусть A обозначает множество чётных чисел, Q – множество рациональных чисел, R – множество действительных чисел, а C – множество комплексных чисел. Тогда выполняются строгие включения $A \subset Q$, $Q \subset R$, $R \subset C$.
- Очевидно, если $X \subset Y$, $Y \subset Z$, то $X \subset Z$.
- Не надо смешивать отношения принадлежности и включения. Например, имеем $\{1\} \in \{\{1\}\}$ и $\{1\}$ не является подмножеством $\{\{1\}\}$, с другой стороны $1 \notin \{\{1\}\}$, так как единственным элементом множества $\{\{1\}\}$ является $\{1\}$.

Пример 2. Множество чётных чисел (A)

Решить аналитически:

Множество чётных чисел (A) является подмножеством комплексных чисел (C) ?

Решение примера 2.

Обозначим классы чисел:

R – множество действительных чисел.

Q - множество рациональных чисел.

C - множество комплексных чисел.

Знаем —

$$R = \{ \{Q\}, \{I_p\} \}$$

Тогда :

$$A \subset Q;$$

$$Q \subset R; \quad R \subset C; \quad \longrightarrow \quad A \subset C.$$

Операции над множествами

Получения новых множеств из уже существующих

- **Объединением** множеств A и B называется множество $A \cup B$, все элементы которого являются элементами множества A или B :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

- **Пересечением** множеств A и B называется множество $A \cap B$, элементы которого являются элементами обоих множеств A и B :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \& \ x \in B\}.$$

Выполняются включения $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ и $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.

Говорят, что два множества **не пересекаются**, если их пересечение – пустое множество.

- **Относительным дополнением** множества A до множества X называется множество $X \setminus A$ всех тех элементов множества X , которые не принадлежат множеству A :

$$X \setminus A = \{x \mid x \in X \ \& \ x \notin A\}. \text{ (также называют разностью множеств } X \text{ и } A)$$

- **Симметрической разностью** множеств A и B называется множество $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.^{*}

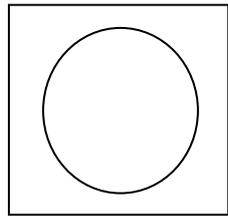
- Когда фиксирован универсум U **абсолютным дополнением** множества A называется множество всех тех элементов x , которые не принадлежат множеству A :

$$\bar{A} = \{x \mid x \in U \ \& \ x \notin A\}.$$

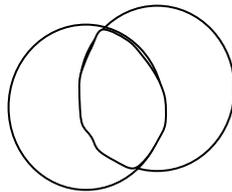
- Заметим, что $\bar{A} = U \setminus A$. Часто вместо \bar{A} будем писать $\neg A$ или A' .

Диаграммы Эйлера

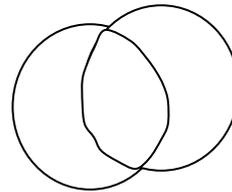
- Первым стал использовать теперь общепринятые обозначения операций над множествами **Джузеппе Пеано** (1888 г.).
- Для наглядного представления отношений между подмножествами какого-либо универсума используются диаграммы Эйлера. В этом случае множества обозначают областями на плоскости и внутри этих областей условно располагают элементы множества.
- Часто все множества на диаграмме размещают внутри квадрата, который представляет собой универсум U .
- Если элемент принадлежит более чем одному множеству, то на диаграмме области, отвечающие таким множествам, должны перекрываться, чтобы общий элемент мог одновременно находиться в соответствующих областях.



$\neg A$

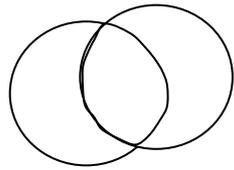


$A \cap B$

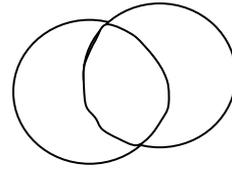


$A \cup B$

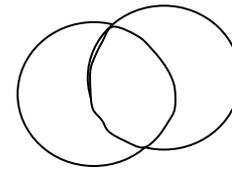
Диаграммы Эйлера (продолжение)



$A \setminus B$



$B \setminus A$



$A \div B$

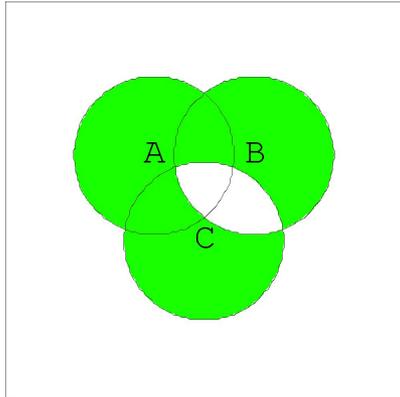
- Здесь не имеет значения относительный размер кругов либо других замкнутых областей, но лишь их взаимное расположение.
- Безусловно, такие диаграммы могут играть в логике лишь ту роль, что чертежи в геометрии: они иллюстрируют, помогают представить и доказать, но сами ничего не доказывают.
- Объединение, пересечение и дополнение обычно называются **булевыми операциями**, составленные из множеств с их помощью выражения – **булевыми выражениями**, значение такого выражения – **булевой комбинацией** входящих в него множеств, а равенство двух булевых выражений – **булевыми тождествами**.

Диаграммы Эйлера (продолжение)

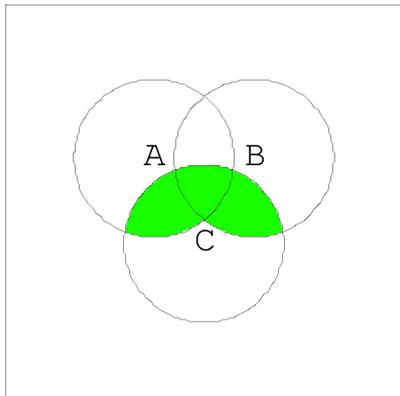


Пример. Отношения между религиями

Булевы выражения



$$(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = (C \div B) \cup (A \setminus (A \cap B \cap C))$$

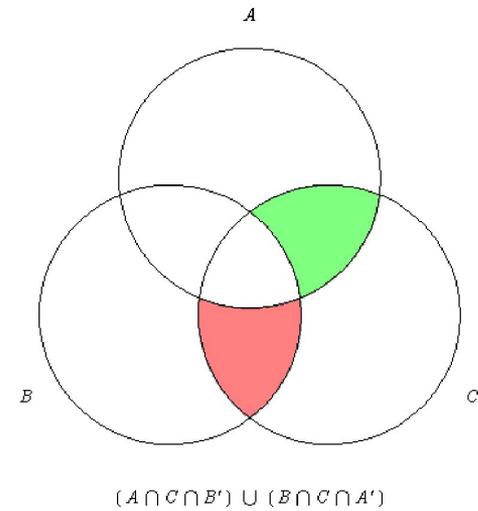
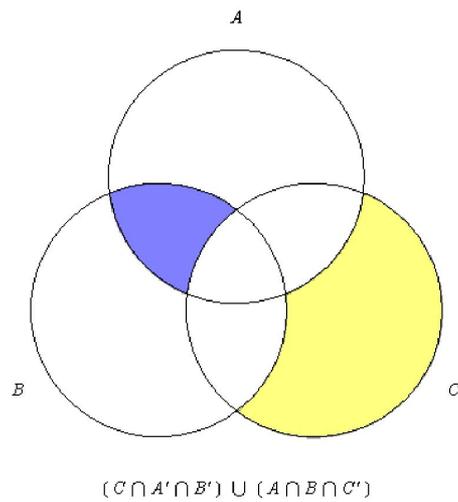
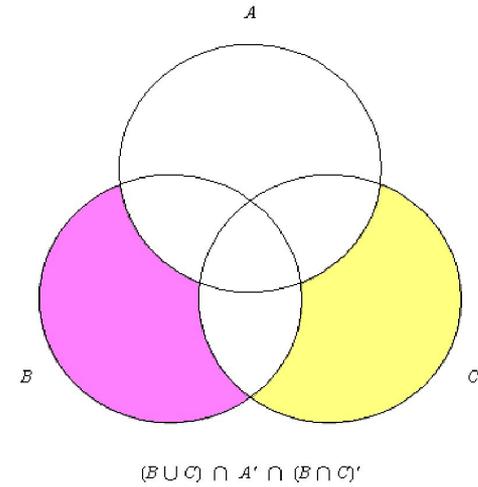
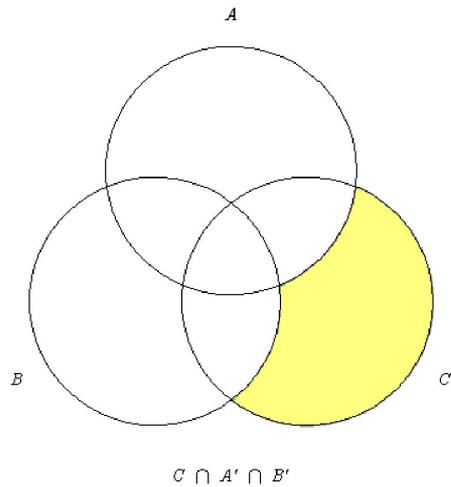


$$(A \cap B) \cap C = C \setminus \neg(A \cup B)$$



Джордж Буль

Булевы выражения (продолжение)



Булевы тождества

Теорема 4. Для любых подмножеств A , B и C универсума U выполняются следующие основные булевы тождества:

1	$A \cup B = B \cup A$ (коммутативность \cup)	$A \cap B = B \cap A$ (коммутативность \cap)
2	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность \cup)	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность \cap)
3	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность \cup относительно \cap)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность \cap относительно \cup)
4	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap U = A$
5	$A \cup \neg A = U$	$A \cap \neg A = \emptyset$
6	$A \cup A = A$ (идемпотентность \cup)	$A \cap A = A$ (идемпотентность \cap)

Булевы тождества (продолжение)

Теорема 4 (продолжение).

7	$A \cup U = U$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
8	$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$ (закон де Моргана)	$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$ (закон де Моргана)
9	$A \cup (A \cap B) = A$ (закон поглощения)	$A \cap (A \cup B) = A$ (закон поглощения)

$$10 \quad A \setminus B = A \cap \neg B$$

Докажем тождество $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Сначала покажем, что $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Действительно, если $x \in A \cup (B \cap C)$, то $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Если $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$. Отсюда $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, а значит, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

ПРИМЕРЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Доказать: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Имеем $A \cup (B \cap C) = \{x \mid x \in A \cup (B \cap C)\} =$

(по определению объединения и пересечения множеств)

$\{x \mid x \in A \vee (x \in B \ \& \ x \in C)\} =$

(дистрибутивность \vee относительно $\&$)

$\{x \mid (x \in A \vee x \in B) \ \& \ (x \in A \vee x \in C)\} = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

Продолжение
(доказательство справа)

• Докажем тождество $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$.

Пусть $x \in \neg(A \cup B)$.

Тогда $x \in U$ и $x \notin A \cup B$.

Следовательно, $x \notin A$ и $x \notin B$.

Отсюда $x \in \neg A$ и $x \in \neg B$,

значит, $x \in \neg A \cap \neg B$.

Итак доказали, что $\neg(A \cup B) \subseteq \neg A \cap \neg B$.

Пусть теперь, $x \in \neg A \cap \neg B$.

Тогда $x \in \neg A$ и $x \in \neg B$.

Следовательно, $x \in U$ и $x \notin A$ и $x \notin B$.

Значит, $x \notin A \cup B$, т.е. $x \in \neg(A \cup B)$.

Итак, $\neg A \cap \neg B \subseteq \neg(A \cup B)$.

Второй способ доказательства.

- Имеем $\neg(A \cup B) = \{x \mid x \in \neg(A \cup B)\} =$
- (по определению дополнения и объединения)
- $\{x \mid x \in U \ \& \ \neg(x \in A \vee x \in B)\} =$
(закон де Моргана для \vee)
 $\{x \mid x \in U \ \& \ \neg(x \in A) \ \& \ \neg(x \in B)\} =$
(определение дополнения)
 $\{x \mid x \in \neg A \ \& \ x \in \neg B\} = \neg A \cap \neg B.$

Остальные тождества доказываются аналогично. Справедливость этих тождеств можно наглядно проиллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера, *но это не является доказательством.*

С другой стороны, диаграмму вполне можно использовать, чтобы на частном примере *опровергнуть* какое-нибудь общее утверждение.

Второй способ доказательства.

- Имеем $\neg(A \cup B) = \{x \mid x \in \neg(A \cup B)\} =$
- (по определению дополнения и объединения)
- $\{x \mid x \in U \ \& \ \neg(x \in A \vee x \in B)\} =$
(закон де Моргана для \vee)
 $\{x \mid x \in U \ \& \ \neg(x \in A) \ \& \ \neg(x \in B)\} =$
(определение дополнения)
 $\{x \mid x \in \neg A \ \& \ x \in \neg B\} = \neg A \cap \neg B.$

Теорема 5.

Рассмотрим предложения о произвольных множествах A и B - (попарно эквивалентны):

1) $A \cap B = A$

2) $A \cup B = B$

3) $A \subseteq B$

Доказательство.

*Докажем, что из первого предложения
следует второе.*

**Действительно, так как $A \cap B = A$, то
достаточно показать, что в этом случае $A \subseteq$
 $A \cap B$.**

**Но если $x \in A$, то $x \in B$, так как $A \subseteq B$,
следовательно, $x \in A \cap B$.**

*Докажем, что из второго предложения
следует третье.*

Так как $A \cap B = A$, то $A \cup B = (A \cap B) \cup B$.

По закону поглощения (см. тождества) запишем:

$$B \cup (A \cap B) = B.$$

Отсюда, используя закон коммутативности, получаем

$$A \cup B = B.$$

*Докажем, что из третьего предложения
следует первое.*

**Так как $A \subseteq A \cup B$, а по условию
третьего предложения $A \cup B = B$,
то $A \subseteq B$.**

