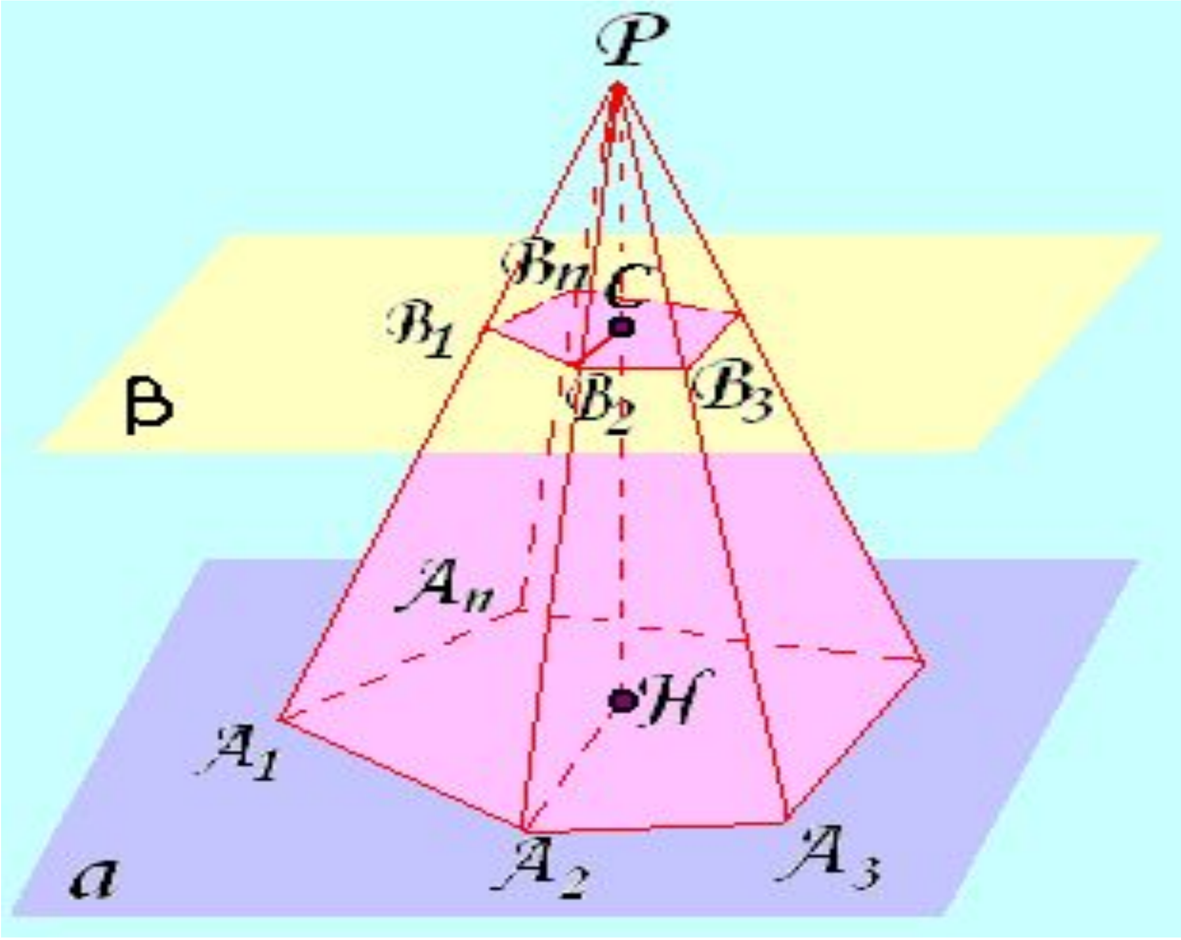
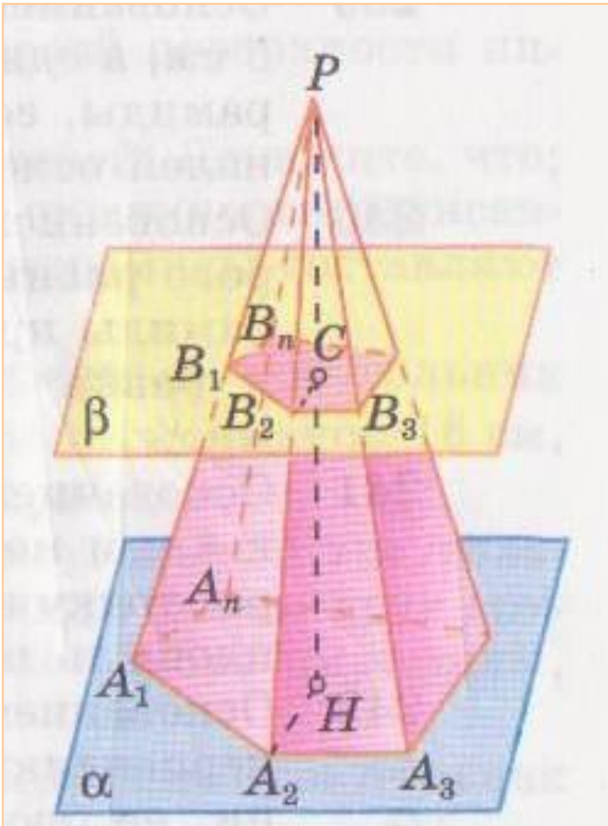
«Усеченная пирамид



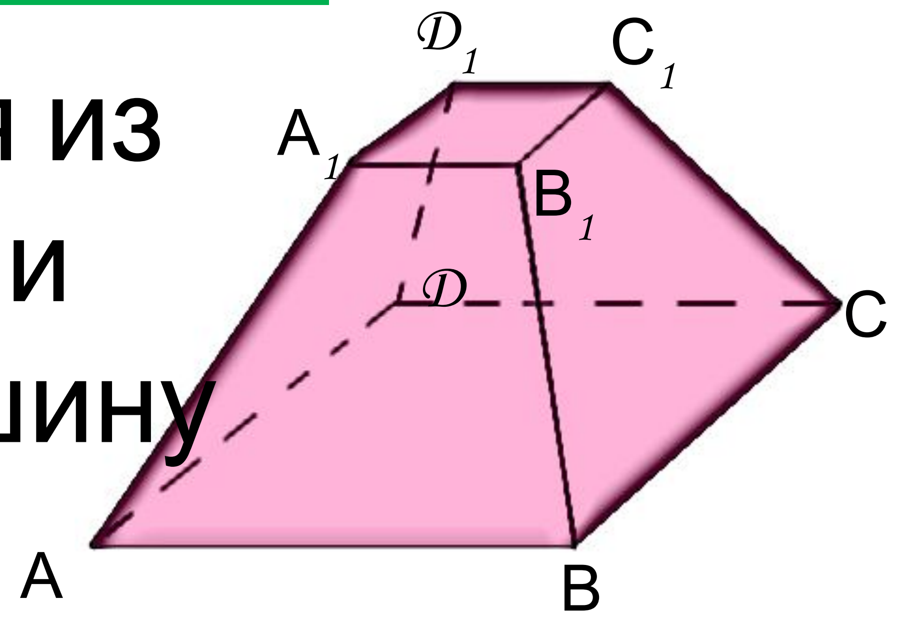
.

Возьмем произвольную пирамиду $PA_1A_2\ldots A_n$ и проведем секущую плоскость β | |α основания пирамиды и пересекающую боковые ребра в точках $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Плоскость β разбивает пирамиду на 2 многогранника. Многогранник, гранями которого являются n–угольники $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ (нижнее и верхнее основания), расположенные в параллельных плоскостях, и n четырехугольников $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, …, $A_nA_1B_1B_n$ (боковые

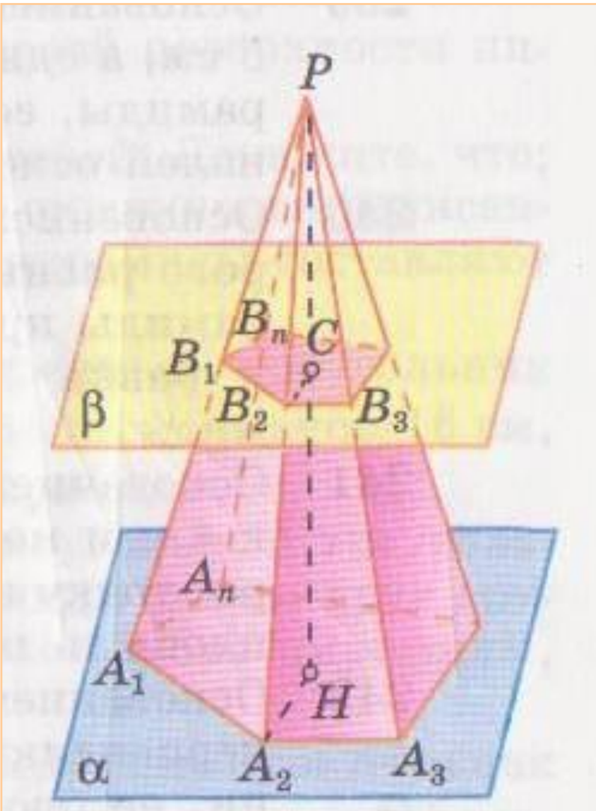


Еще одно определение усеченной пирамиды.

Тело, получающееся из пирамиды, если отсечь ее вершину плоскостью, параллельной основанию, называется **усеченной**



Усеченную пирамиду с основаниями $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ обозначают так: $\mathbf{A_1A_2\ldots A_nB_1B_2\ldots B_n}$.

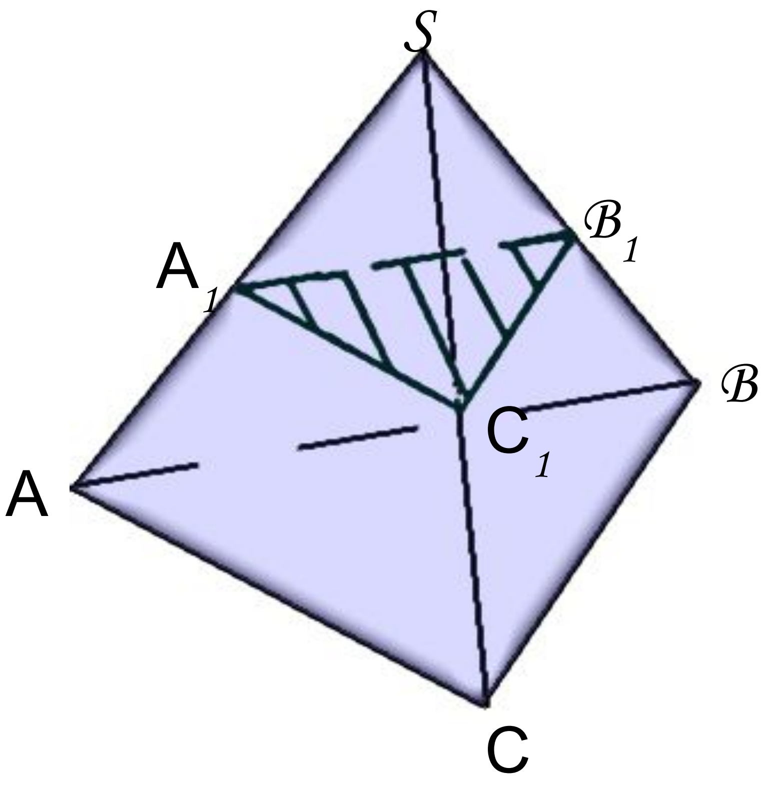


Четырехугольники $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, …, $A_nA_1B_1B_n$ – **боковые грани**, n –угольники $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ – **основания** усеченной пирамиды.

Отрезки A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,…, A_nB_n – **боковые ребра** усеченной пирамиды.

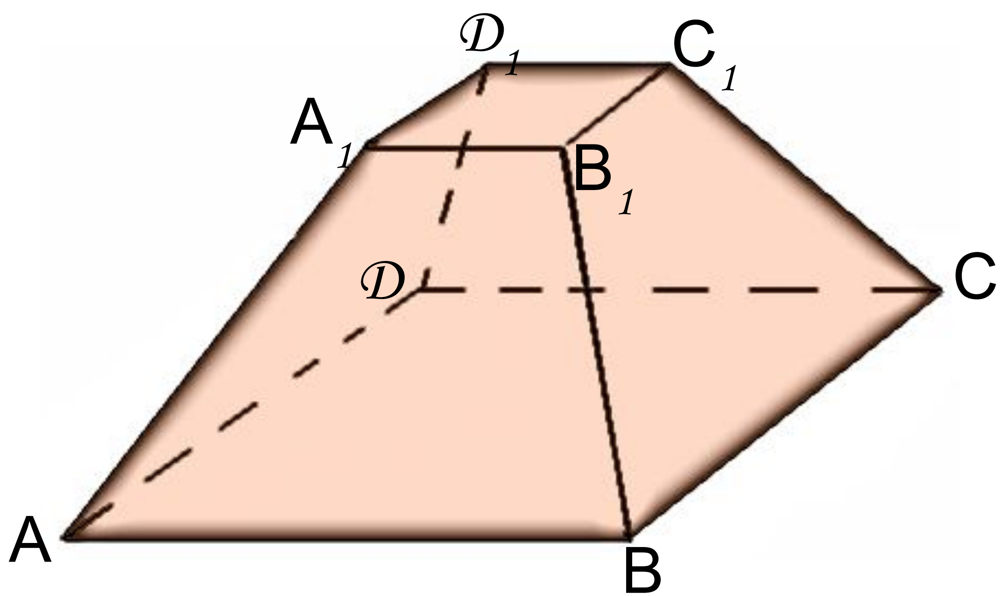
Теорема (свойство усеченной пирамиды):

«Боковые грани усеченной пирамиды – трапеции».



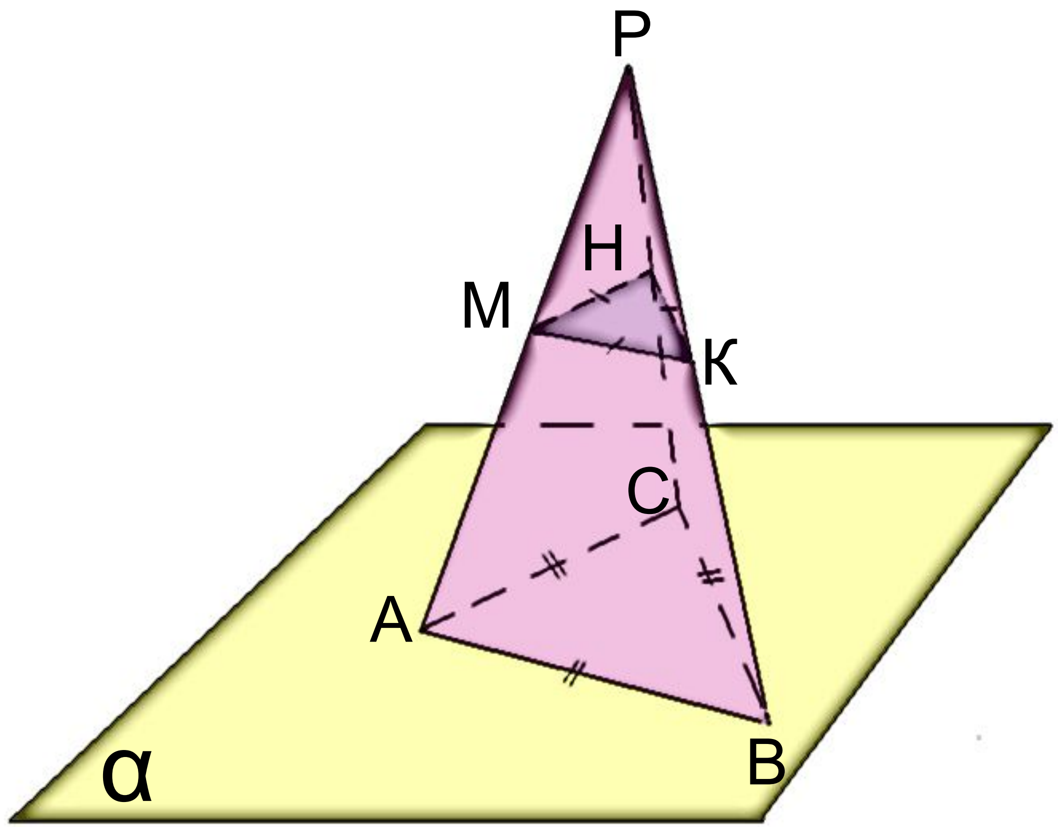
Определения.

Площадью боковой поверхности усеченной пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней.



$$S_{\text{бок.}} = S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} + S_{CC_1D_1D} +$$

Усеченная пирамида называется **правильной**, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной плоскости основания.

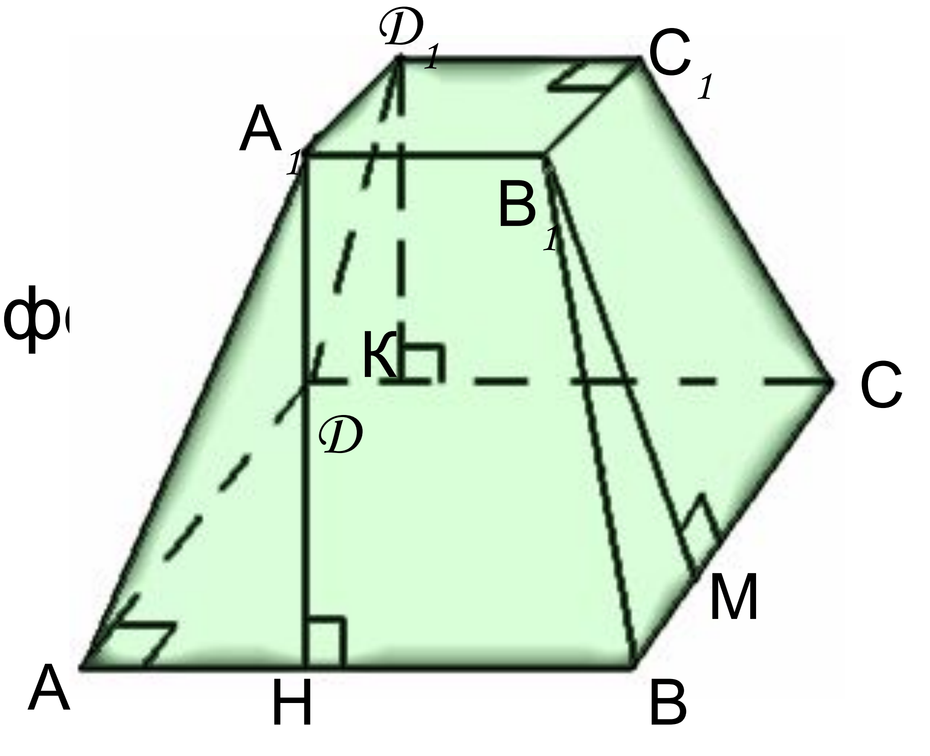


1. (МНК) | | α;
2. АСНМ,АМКВ,ВСНК – равнобедренные трапеции, т.е. АМ=КВ=НС

Основания правильной усеченной пирамиды – правильные многоугольники, а

Высоты боковых граней правильной усеченной пирамиды называются <u>апофемами</u>.

1. $ABC\mathcal{D}A_1B_1C_1\mathcal{D}_1$ – правильная усеченная пирамида;
2. $ABC\mathcal{D}$ и $A_1B_1C_1\mathcal{D}_1$ – квадраты;
3. A_1H, B_1M, $\mathcal{D}_1K$ – апоф

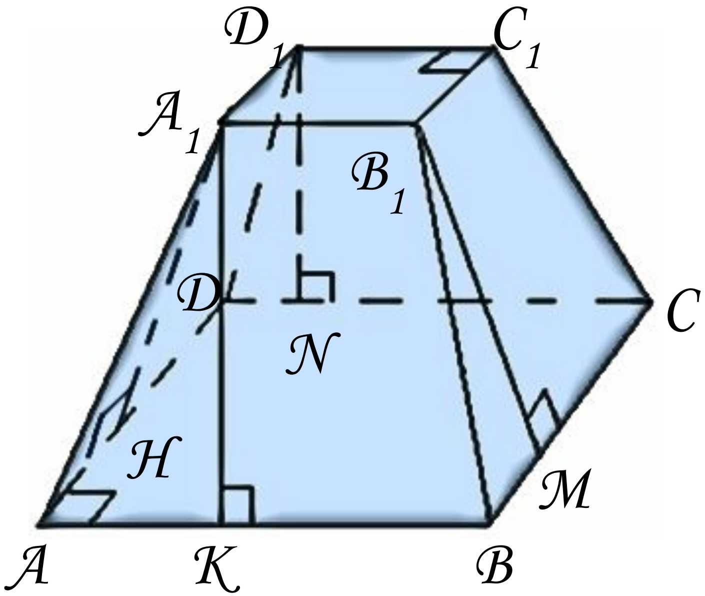


Теорема:

«Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды

равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему».

$$S_{\text{бок. пр. пир.}} = \frac{1}{2} \cdot (P_{\text{осн}\,1} + P_{\text{осн}\,2}) \cdot d$$



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная усеченная пирамида; A_1K, B_1M, D_1N, A_1H – апофемы, т.е. $A_1K \perp AB$, $B_1M \perp BC$, $D_1N \perp DC$, $A_1H \perp AD$

Доказать: $S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot (P_{ABCD} + P_{A1B1C1D1})$

$$S_{бок} = S_{ABB1A1} + S_{BCC1B1} + S_{CDD1C1} + S_{ADD1A1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot A_1K \cdot (AB + A_1B_1) + \frac{1}{2} \cdot B_1M \cdot (BC + B_1C_1) + \frac{1}{2} \cdot D_1N \cdot (CD + C_1D_1) +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot A_1H \cdot (AD + A_1D_1)$$

Но (по свойству) $A_1K = B_1M = D_1N = A_1H = d$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot (AB + A_1B_1 + BC + B_1C_1 + CD + C_1D_1 + AD + A_1D_1) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot d \cdot ((AB + BC + CD + AD) + (A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + A_1D_1)) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot d \cdot (P_{ABCD} + P_{A1B1C1D1})$$

Теорема.

Объем V усеченной пирамиды, высота которой равна h, а площади оснований равны S и S_1, вычисляется по формуле

$$V_{усеч.пир} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}\right)$$