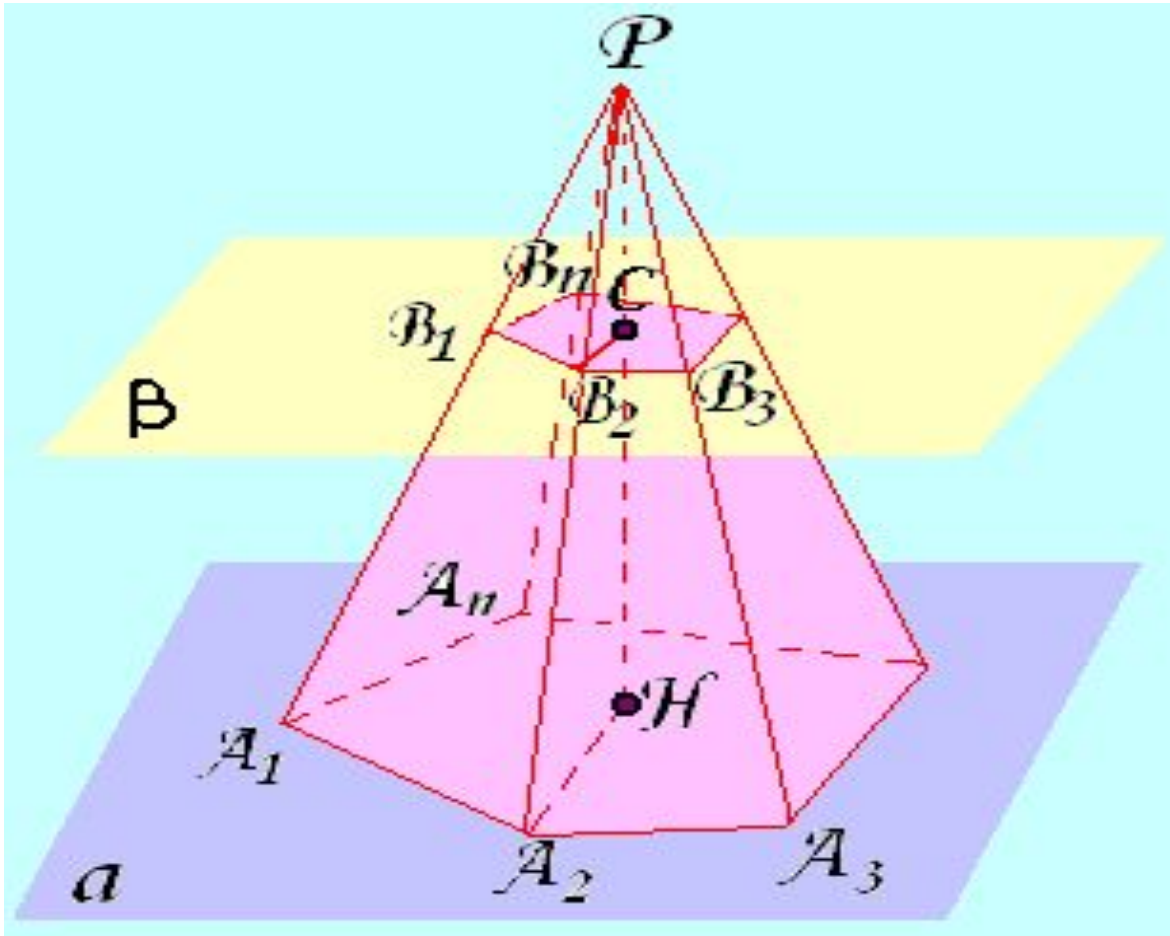
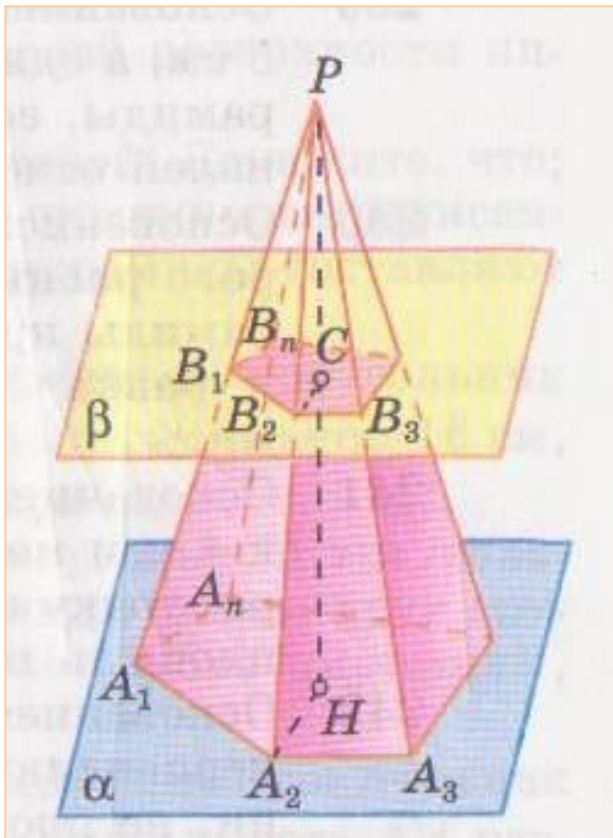


«Усеченная пирамида»





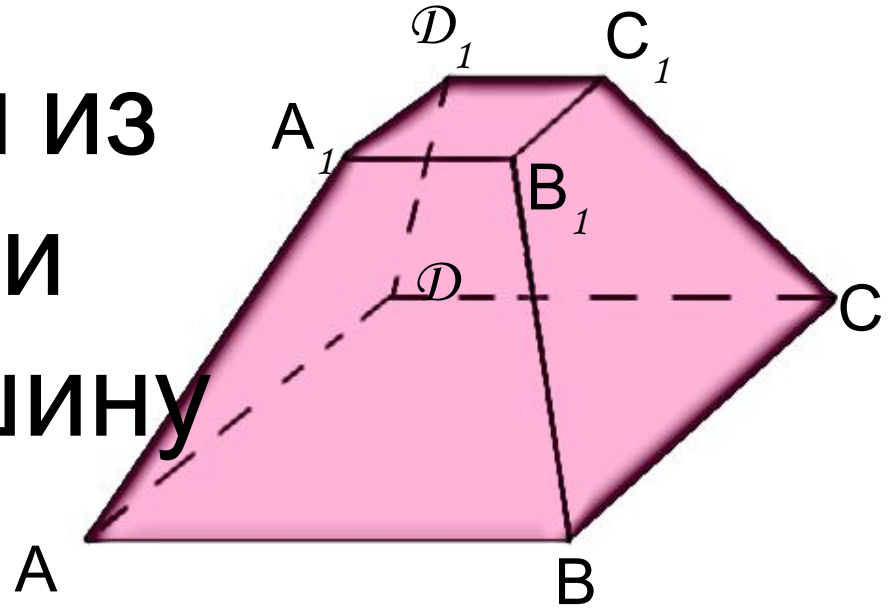
Возьмем произвольную пирамиду $PA_1A_2\dots A_n$ и проведем секущую плоскость $\beta \parallel \alpha$ основания пирамиды и пересекающую боковые ребра в точках B_1, B_2, \dots, B_n . Плоскость β разбивает пирамиду на 2 многогранника. Многогранник, гранями которого являются n -угольники $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$ (нижнее и верхнее основания), расположенные в параллельных плоскостях, и n четырехугольников $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \dots, A_nA_1B_1B_n$ (боковые

Еще одно определение усеченной

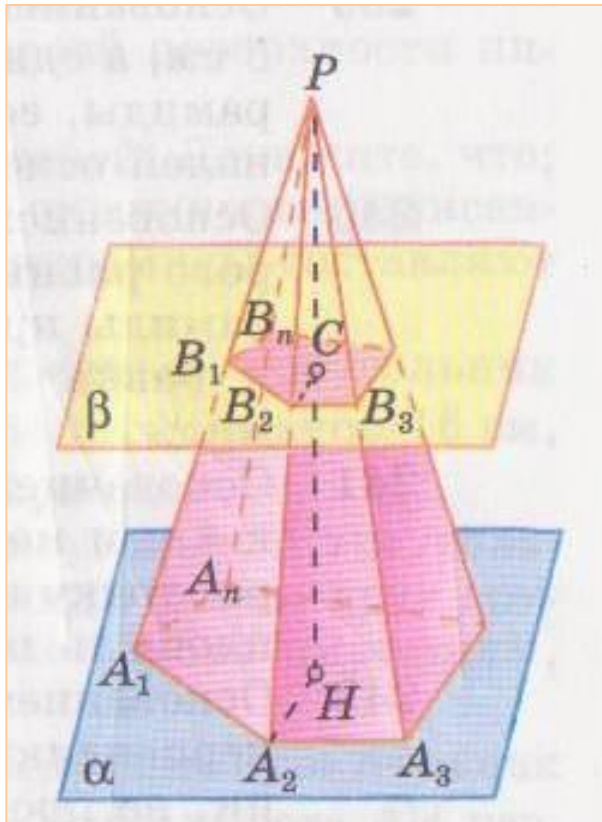
Тело, пирамиды.

получающееся из пирамиды, если отсечь ее вершину плоскостью, параллельной основанию, называется

усеченной



Усеченную пирамиду с основаниями $A_1 A_2 \dots A_n$ и $B_1 B_2 \dots B_n$ обозначают так: $A_1 A_2 \dots A_n B_1 B_2 \dots B_n$.



Четырехугольники

$A_1 A_2 B_2 B_1, A_2 A_3 B_3 B_2, \dots,$
 $A_n A_1 B_1 B_n$ – **боковые**

грани, n -угольники

$A_1 A_2 \dots A_n$ и $B_1 B_2 \dots B_n$ –

основания усеченной пирамиды.

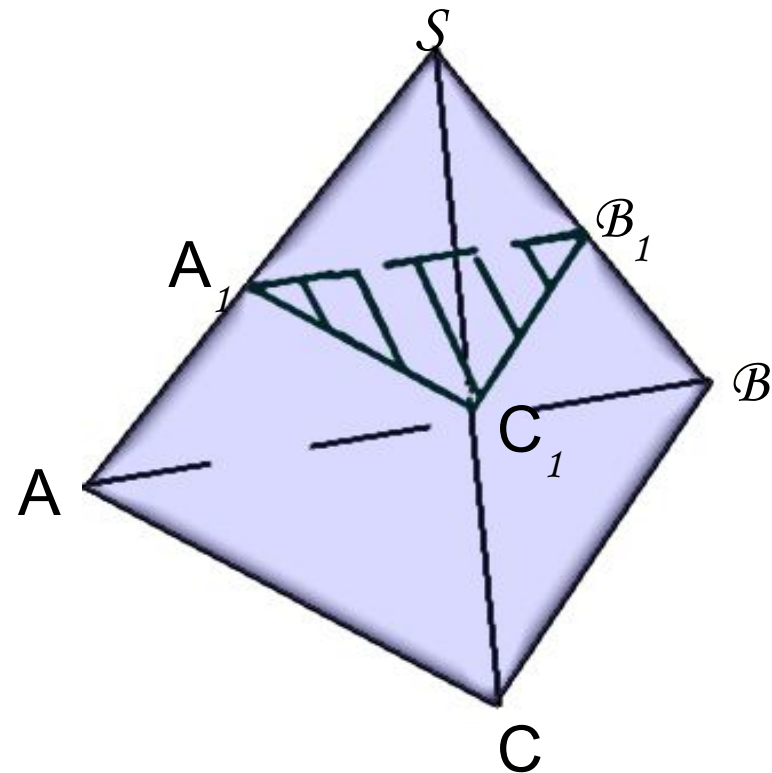
Отрезки $A_1 B_1, A_2 B_2,$
 $A_3 B_3, \dots, A_n B_n$ –

боковые ребра

усеченной пирамиды.

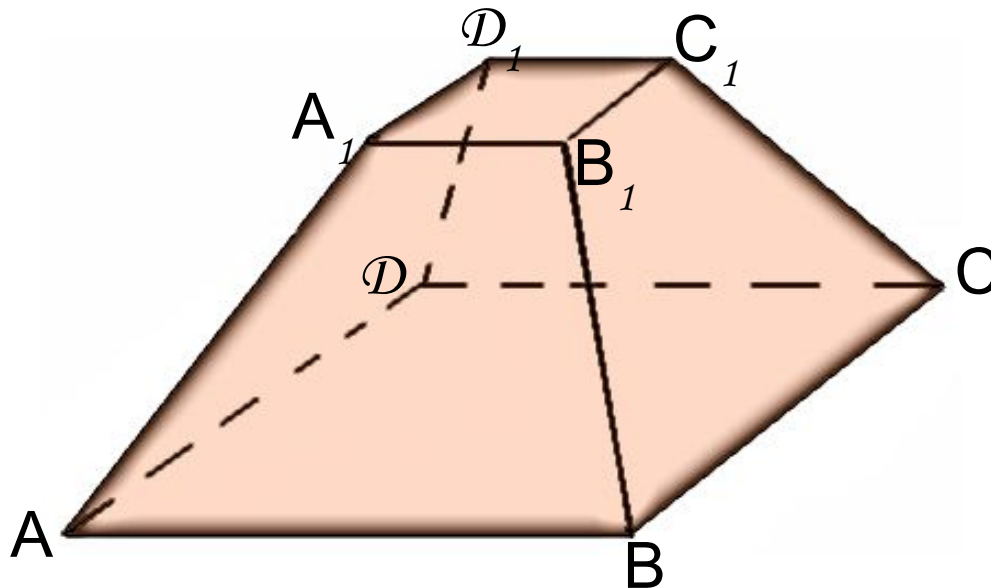
Теорема (свойство усеченной пирамиды):

«Боковые грани усеченной пирамиды – трапеции».



Определения.

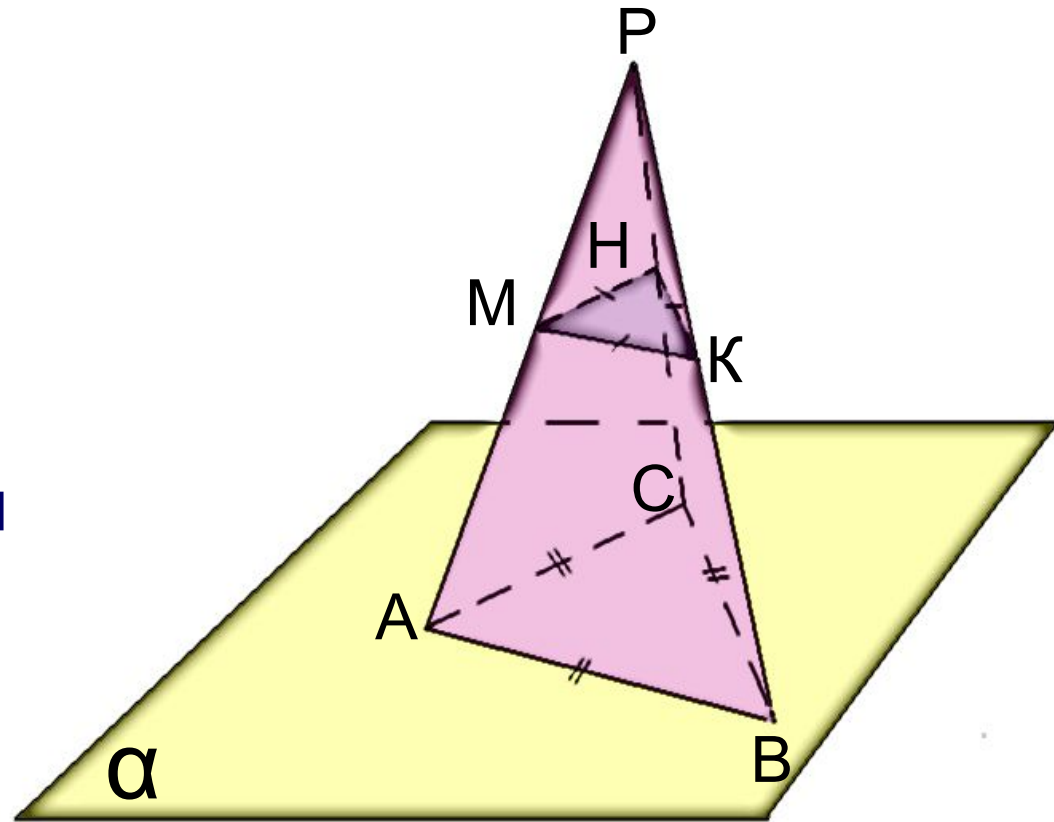
Площадью боковой поверхности
усеченной пирамиды называется
сумма площадей ее боковых граней.



$$S_{\text{бок.}} = S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} + S_{CC_1D_1D} +$$

Усеченная пирамида называется правильной, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной плоскости основания.

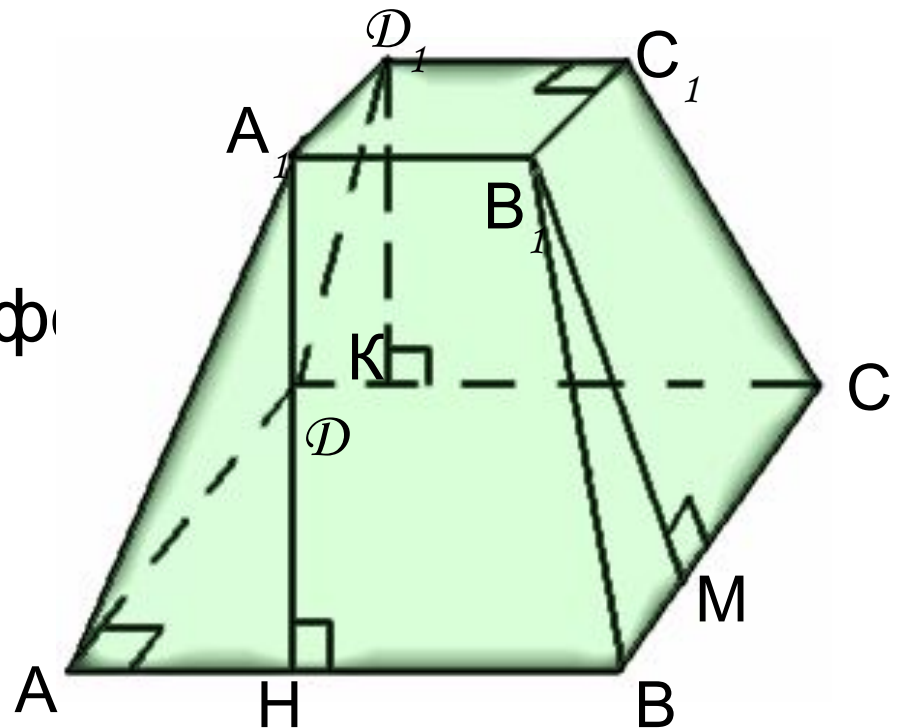
Основания правильной усеченной пирамиды – правильные многоугольники а



1. $(MNK) \parallel \alpha$;
2. $ACNM, AMKB, BСNK$ – равнобедренные трапеции, т.е. $AM=KB=NC$

Высоты боковых граней правильной усеченной пирамиды называются апофемами.

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная усеченная пирамида;
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $A_1B_1C_1D_1$ – квадраты;
3. A_1H , B_1M , D_1K – апофемы

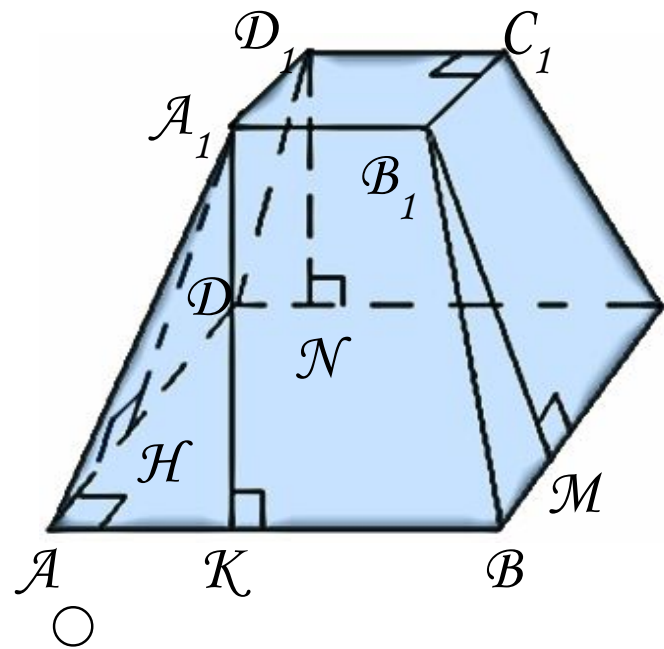


Теорема:

«Площадь боковой поверхности
правильной усеченной
пирамиды

равна произведению полусуммы
периметров оснований на
апофему».

$$S_{\text{бок. пр. пир.}} = \frac{1}{2} \cdot (P_{\text{осн}1} + P_{\text{осн}2}) \cdot d$$

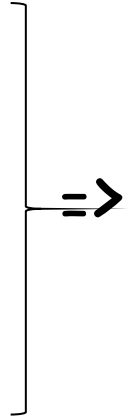


Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – правильная усеченная пирамида; $A K, B_1 M, D_1 N, A_1 H$ – апофемы, т.е. $A K \perp AB, B_1 M \perp BC, D_1 N \perp DC, A_1 H \perp AD$

Доказать: $S_{\text{бок}}$

$$= \frac{1}{2} \cdot d \cdot (P_{ABCD} + P_{A_1 B_1 C_1 D_1})$$

$$\begin{aligned}
 S_{\text{бок}} &= S_{ABB_1A_1} + S_{BCC_1B_1} + S_{CDD_1C_1} + S_{ADD_1A_1} = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot A_1 K \cdot (AB + A_1 B_1) + \frac{1}{2} \cdot B_1 M \cdot (BC + B_1 C_1) + \frac{1}{2} \cdot D_1 N \cdot (CD + C_1 D_1) + \\
 &+ \frac{1}{2} \cdot A_1 H \cdot (AD + A_1 D_1)
 \end{aligned}$$



Но (по свойству) $A_1 K = B_1 M = D_1 N = A_1 H = d$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow S_{\text{бок}} &= \frac{1}{2} \cdot d \cdot (AB + A_1 B_1 + BC + B_1 C_1 + CD + C_1 D_1 + AD + A_1 D_1) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot d \cdot ((AB + BC + CD + AD) + (A_1 B_1 + B_1 C_1 + C_1 D_1 + A_1 D_1)) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot d \cdot (P_{ABCD} + P_{A_1 B_1 C_1 D_1})
 \end{aligned}$$



Теорема.

Объем V усеченной пирамиды,
высота которой равна h , а площади
оснований равны S и S_1 , вычисляется
по формуле

$$V_{\text{усечпир}} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1} \right)$$