

Косова Г.Н., доцент кафедры физики и материаловедения

Курс «Физика»

Раздел «Механика»

Тема «Динамика вращательного движения»

Динамика вращательного движения

Момент силы.

Момент импульса.

Основной закон динамики
вращательного движения.

Момент силы.

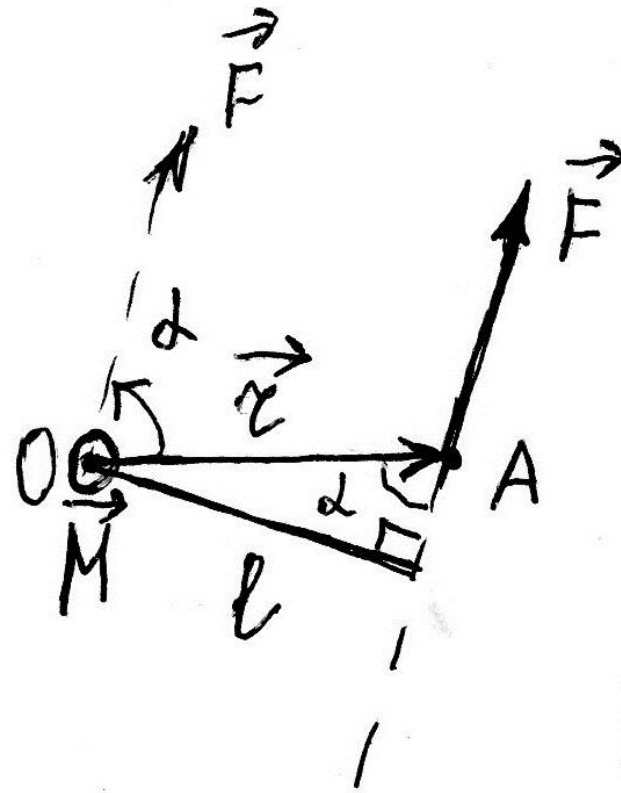
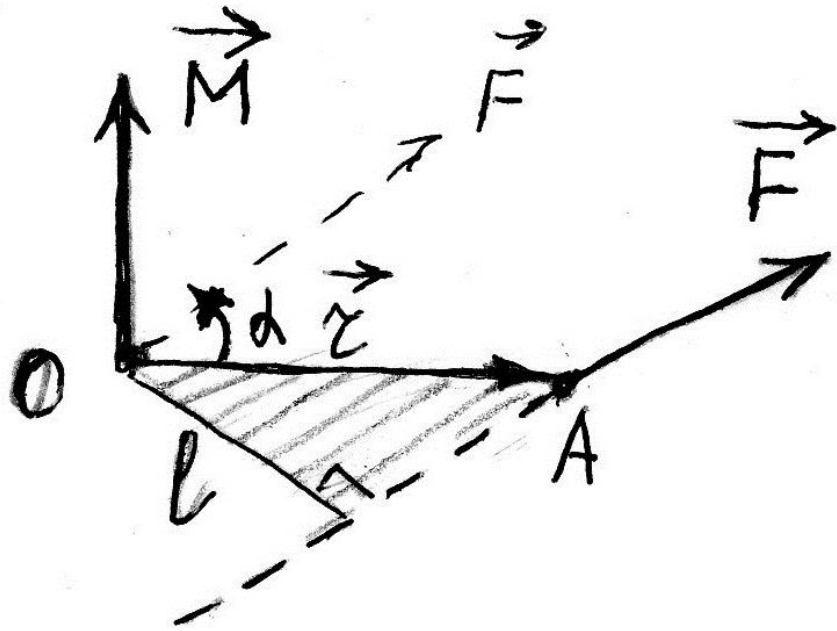
Момент силы относительно точки

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}];$$

Моментом силы \vec{F} относительно некоторой т. O называется векторное произведение радиуса-вектора, проведенного из т. O в т. приложения силы, на вектор силы.

$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha$; Направляется по правилу правого винта.

Момент силы



$$l = r \cdot \sin \alpha$$

$$M = F \cdot l$$

Момент силы.

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x & z \\ F_x & F_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \underbrace{(yF_z - zF_y)}_{M_x} - \vec{j} \underbrace{(xF_z - zF_x)}_{-M_y} + \vec{k} \underbrace{(xF_y - yF_x)}_{M_z}\end{aligned}$$

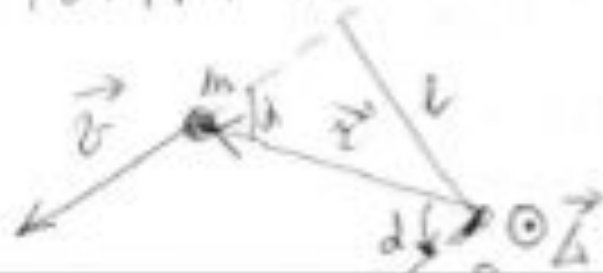
Момент импульса

Момент импульса м.т. относительно точки.

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$$

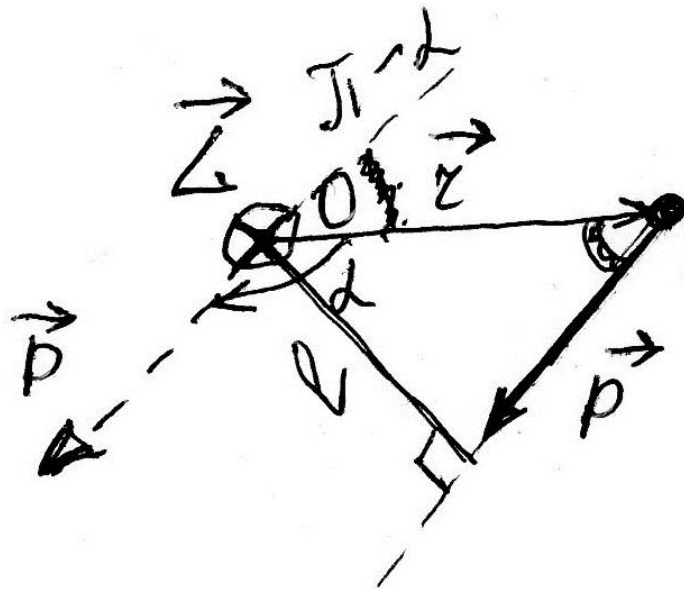
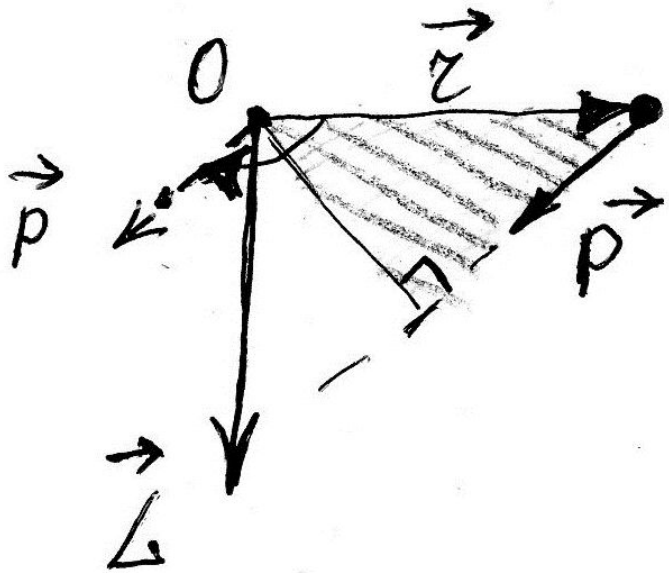
Моментом импульса м.т. относительно некоторой точки $T.O$ называется векторное произведение радиус-вектора, проведённого из $T.O$ к данной м.т., на вектор импульса

$|\vec{L}| = |\vec{r}| |\vec{p}| \cdot \sin \alpha$. Направление по правилу правого винта



$$l = r \cdot \sin \alpha; \quad L = p \cdot l = m v l$$

Момент импульса.



$$l = r \cdot \sin(\pi - \alpha) = r \cdot \sin \alpha$$

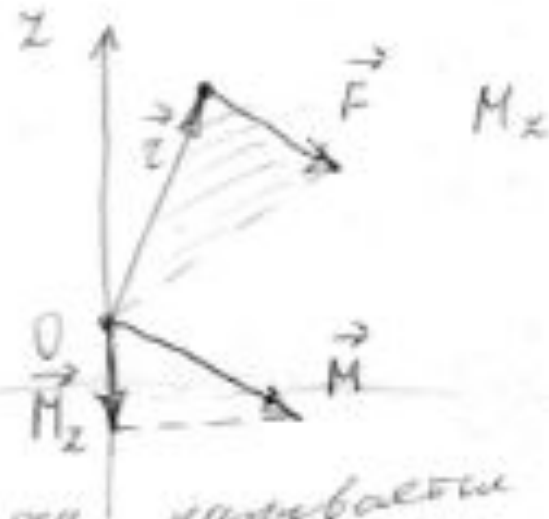
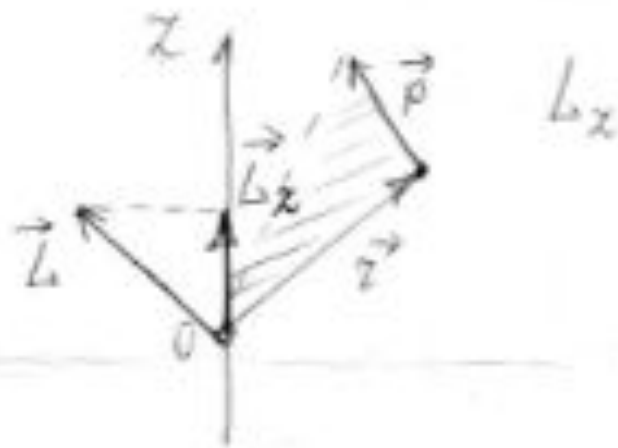
$$L = p l$$

Момент импульса

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y & z \\ p_y & p_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x & z \\ p_x & p_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x & y \\ p_x & p_y \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \underbrace{(y p_z - z p_y)}_{L_x} - \vec{j} \underbrace{(x p_z - z p_x)}_{-L_y} + \vec{k} \underbrace{(x p_y - y p_x)}_{L_z} \end{aligned}$$

Момент силы (импульса) относительно оси.

Моментом импульса относительно оси называется проекция на эту ось момента импульса, найденного отн-но любой T , принадлежащей этой оси.



Моментом силы относительно оси называется проекция на эту ось момента силы, найденного отн-но любой T , принадлежащей этой оси.

Основной закон динамики вращательного движения относительно точки.

Момент импульса системы м.т. относительно т. О

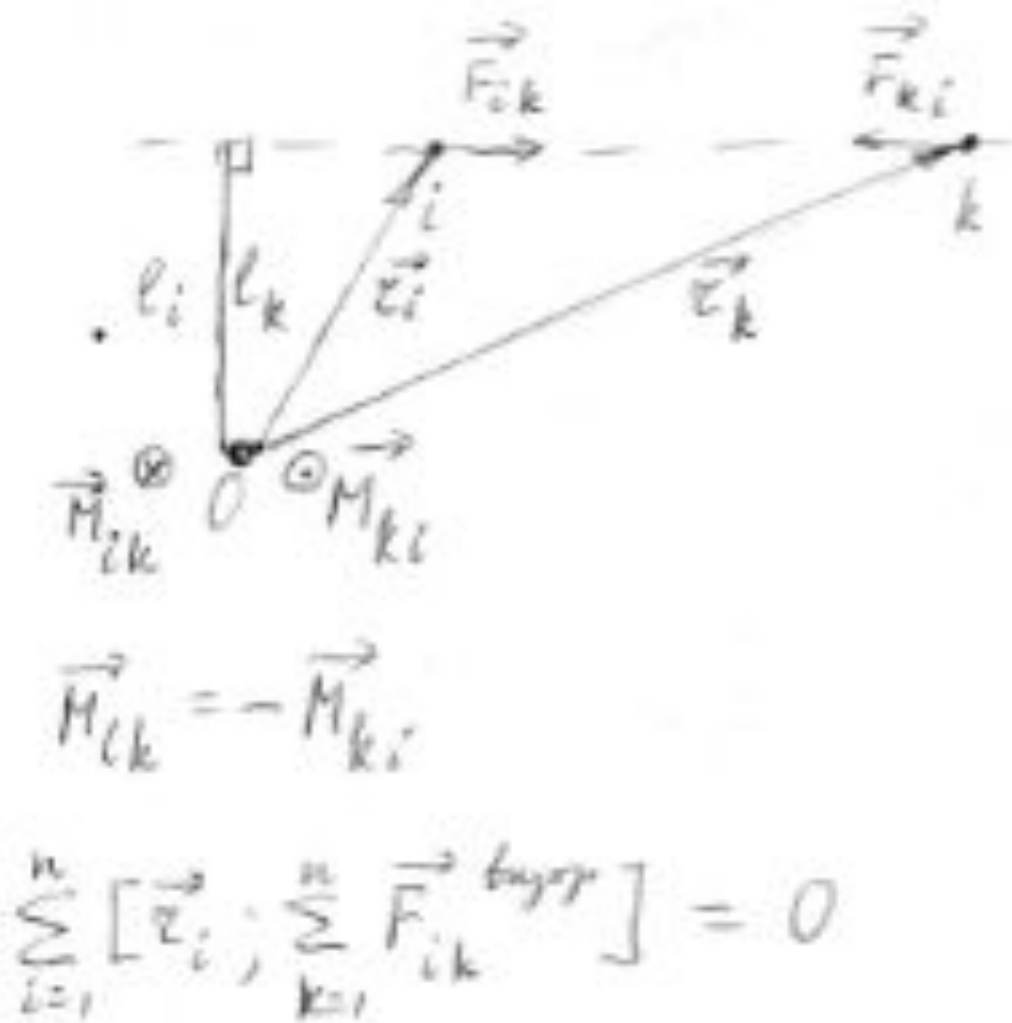
$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i \quad \vec{L}_i = [\vec{r}_i; \vec{p}_i]$$

Продифференцируем по времени

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \vec{L}_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = \sum_{i=1}^n \left(\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}, \vec{p}_i \right] + \left[\vec{r}_i, \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right] \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left([\vec{v}_i, \vec{p}_i] + \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{k \neq i}^n \vec{F}_{ik}^{\text{внут}} \right] \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{k \neq i}^n \vec{F}_{ik}^{\text{внут}} \quad ; \quad [\vec{v}_i, m_i \vec{v}_i] = 0 ;$$

Основной закон динамики вращательного движения относительно точки.



$$\vec{M}_{ik} = [\vec{r}_i; \vec{F}_{ik}]; \vec{M}_{ki} = [\vec{r}_k; \vec{F}_{ki}]$$

$$M_{ik} = |\vec{F}_{ik}| \cdot l_i; \quad M_{ki} = |\vec{F}_{ki}| \cdot l_k$$

$$|\vec{F}_{ik}| = |\vec{F}_{ki}| \text{ — по III з. Н.}$$

$l_i = l_k$ — по определению — длина силы

$M_{ik} = M_{ki}$; направлены в противополож. стор.

Основной закон динамики вращательного движения относительно точки.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i; \vec{F}_i^{\text{внеш}}] = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i^{\text{внеш}} = \vec{M}^{\text{внеш}} - \text{главный вектор момента внешних сил}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}}$$

Скорость изменения момента импульса системы м.т. относительно которой $\tau \cdot O$ равна суммарному моменту внешних сил относительно этой же точки

В проекциях на оси координат

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x; \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z$$

Динамика вращательного движения твердого тела.

Момент инерции.

Момент импульса твердого тела.

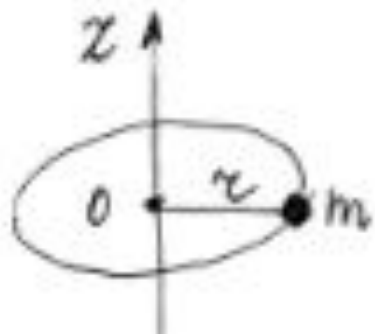
Основной закон динамики
вращательного движения твердого
тела.

Закон сохранения момента импульса.

Момент инерции относительно оси вращения.

- Мера инертности тела к вращательному движению.
- Зависит от распределения массы относительно оси вращения.

- Мо



$$J = m r^2 \text{ [кг} \cdot \text{м}^2 \text{] ч.ки.}$$

- Момент инерции относительно оси вращения для материальных точек.

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Момент инерции относительно оси вращения.

- Момент инерции твердого тела.

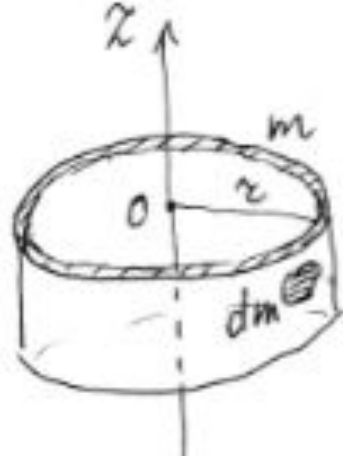


$$dJ = z^2 dm$$

$$J = \int_0^m z^2 dm = \int_0^V z^2 \rho dV$$

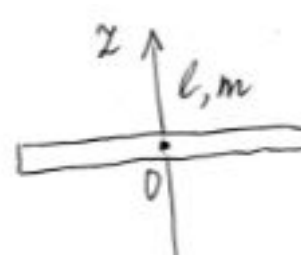
Моменты инерции тел правильной формы.

- Полый тонкостенный цилиндр (обруч)



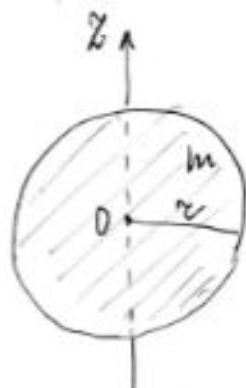
$$J = \int_0^m r^2 dm = r^2 \int_0^m dm = r^2 m$$

- Прямой тонкий стержень



$$J = \frac{1}{12} m l^2$$

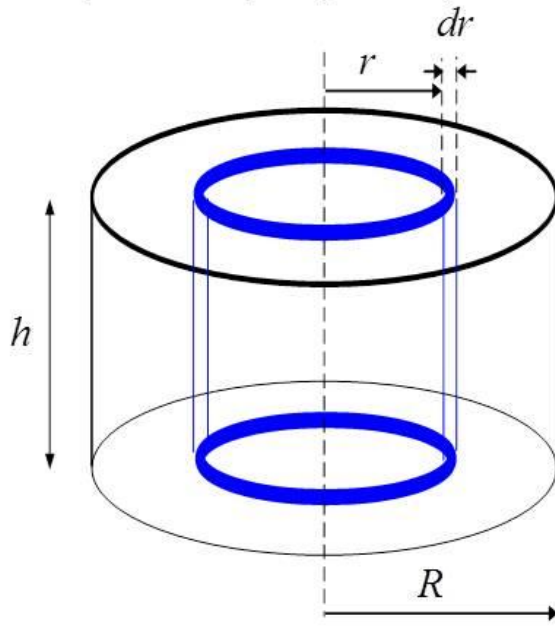
- Шар



$$J = \frac{2}{5} m r^2$$

Момент инерции сплошного цилиндра (диска)

Пример: расчет момента инерции сплошного цилиндра радиуса R , высотой h .



Разобьем на полые цилиндры $r, r + dr, dr \rightarrow 0$.

$dr \ll r \Rightarrow dJ = r^2 dm$,
 dm – масса всего полого цилиндра.

$$dV = 2\pi r h dr \Rightarrow$$

$$dm = 2\pi r h \rho dr \Rightarrow$$

$$dJ = 2\pi h \rho r^3 dr \Rightarrow$$

$$J = \int dJ = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi h R^4 \rho, (V = \pi R^2 h) \Rightarrow$$

$$dV = \pi (r+dz)^2 \cdot h - \pi r^2 h$$
$$dV = (\pi r^2 + 2\pi r dz + dz^2 - \pi r^2) h$$

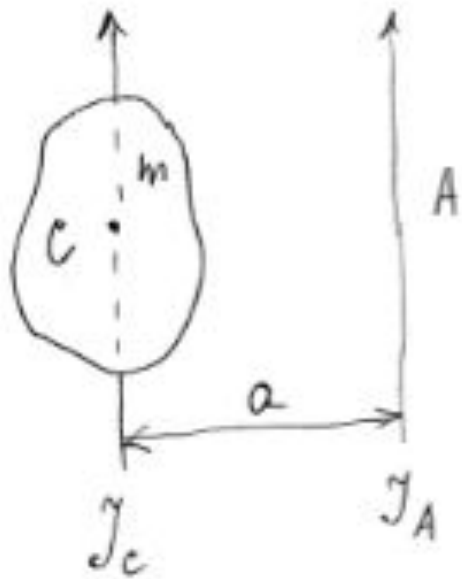
$\downarrow 0$

$$dV = 2\pi r dz h$$

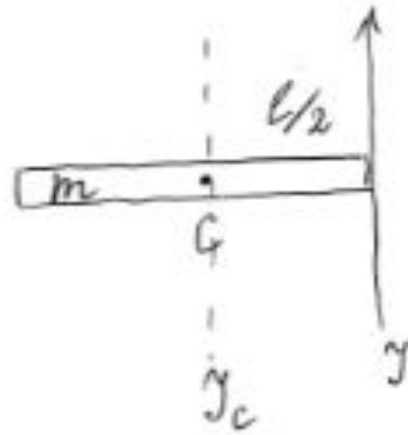
$$m = \rho V = \rho \pi R^2 h$$

$$J = \frac{m R^2}{2}$$

Теорема Штейнера.



$$J_A = J_C + ma^2$$



$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{12} ml^2 + \frac{m \cdot l^2}{4} = \\ &= \frac{1}{3} ml^2 \end{aligned}$$

Момент импульса твердого тела.



$$\begin{aligned}L_{iz} &= m_i v_i r_i \\L_z &= \sum_{i=1}^n L_{iz} = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i = \\&= \sum_{i=1}^n m_i \omega r_i^2 = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \\L_z &= J_z \omega\end{aligned}$$

Основной закон динамики вращательного движения твёрдого тела.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z; \quad L_z = J_z \omega$$

$$\frac{d(J_z \omega)}{dt} = M_z; \quad J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z$$

$$J_z \varepsilon = M_z; \quad J_z \vec{\varepsilon} = \vec{M}$$
$$m \vec{a} = \vec{F}$$

Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}},$$

$$\vec{M}_{\text{внеш}} = 0; \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$$\vec{L} = \text{const}$$

Закон сохранения момента импульса

1. Моменты внешних сил компенсируют друг друга.
2. Равен нулю момент внешних сил относительно к-л оси.

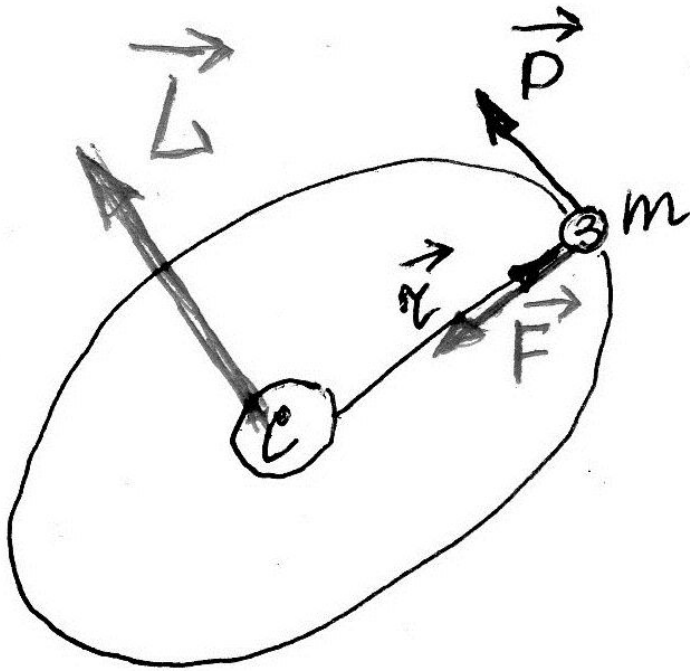
$$M_x = 0 \Rightarrow L_x = \text{const}$$

$$M_y = 0 \Rightarrow L_y = \text{const}$$

$$M_z = 0 \Rightarrow L_z = \text{const}$$

3. Моментом внешних сил можно пренебречь

ЗСМИ. Примеры.



$$M = r \cdot F \cdot \sin 180^\circ = 0$$

$\vec{L} = \text{const}$ и по величине
и по направлению

ЗСМИ. Примеры.

$$L_z = J_z \omega_z$$

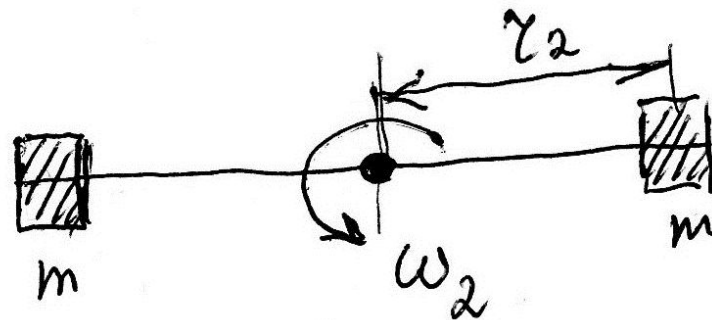
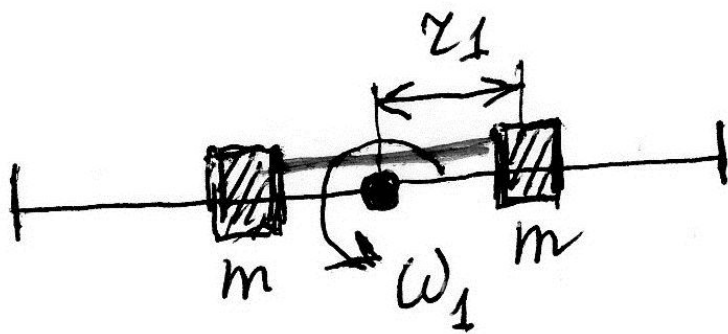
$$M_z = 0 \Rightarrow L_z = \text{const}$$

$$J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2$$

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{J_1}{J_2}$$

ЗСМИ. Примеры.

$$\Delta_1 = 2m\tau_1^2\omega_1$$



$$\Delta_2 = 2m\tau_2^2\omega_2$$

$$2m\tau_1^2\omega_1 = 2m\tau_2^2\omega_2$$

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2}$$



Спасибо за внимание!

Желаю удачи!