ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Основные понятия и определения теории графов

Определение. Пусть задано множество $X = \{x1, x2, \ldots, xn\}$ и бинарная операция T, сопоставляющая каждому элементу $xi \in X$ множество $\{(xi, xj) | xi \in X, xj \in X\}$. Операцию T можно представить как $T = T(x1) \cup T(x2) \cup \ldots \cup T(xn)$, где $T(xi)$ – множество пар, у которых на первом месте стоит элемент xi. При этом элементы $xi \in X$ будем называть *вершинами*, а пары (xi, xj) – *дугами*, если они упорядочены, и *рёбрами*, если нет.

Говорят, что множество X и бинарная операция T задает *граф* $Г(X,T)$ или $Г$ и при этом:

- две вершины, определяющие ребро или дугу, называют *смежными*;

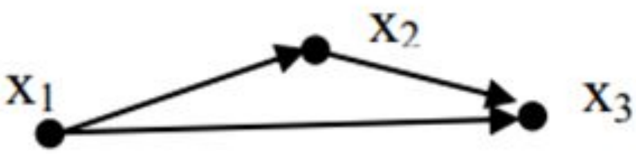
- два ребра, имеющие общую вершину, называют *смежными*;

- вершины, определяющие ребро (дугу), называют *инцидентными* этому ребру (дуге).

Граф, в котором операция T задаѐт упорядоченные пары, называется *ориентированным* или *орграфом*. Отношения порядка в графе задаются *стрелками*.

Основные понятия и определения теории графов

Пример 1.



Описать математически данный орграф.

Решение

$X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $T=T(x_1)\cup T(x_2)\cup T(x_3)$, $T(x_1)=\{(x_1,x_2),(x_1,x_3)\}$,
$T(x_2)=\{(x_2,x_3)\}$, $T(x_3)=\varnothing$, $T=\{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_3)\}$.

Ребро называется *петлёй*, если оно заканчивается в одной и той же вершине.

Основные понятия и определения теории графов

Если хотя бы одну пару вершин графа *Г* соединяют несколько ребер, то такой граф называют *мультиграфом*.

Вершину графа *Г* называют *изолированной*, если она не инцидентна ни одной вершине этого графа.

Граф *Г* называется *полным*, если каждая пара его вершин соединена ребром. Если граф *Г* не имеет ребер, то такой граф называется *нуль-графом*.

Основные понятия и определения теории графов

Операции над графами

Пусть заданы два неориентированных графа $Г_1(X_1,E_1)$ и $Г_2(X_2,E_2)$.

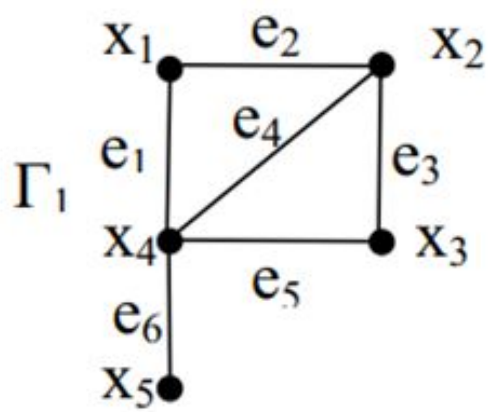
Определение. *Объединением* графов $Г_1(X_1,E_1)$ и $Г_2(X_2,E_2)$ называется граф $Г_3(X_3,E_3)$ ($Г_3= Г_1 \cup Г_2$), такой что $X_3= X_1 \cup X_2$, $E_3=E_1 \cup E_2$.

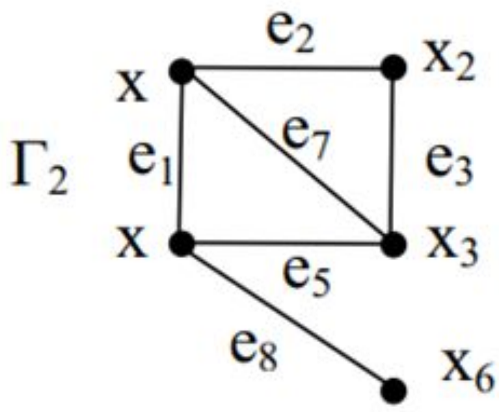
Определение. *Пересечением* графов $Г_1(X_1,E_1)$ и $Г_2(X_2,E_2)$ называется граф $Г_4(X_4,E_4)$ ($Г_4= Г_1 \cap Г_2$), такой что $X_4= X_1 \cap X_2$, $E_4=E_1 \cap E_2$.

Определение. Граф $Г_5(X_5,E_5)$ называется ***кольцевой суммой*** графов $Г_1(X_1,E_1)$ и $Г_2(X_2,E_2)$ ($Г_5= Г_1 \otimes Г_2$), если он представляет собой граф, не имеющий изолированных вершин и порожденный на множестве ребер $E_5= E_1 \otimes E_2$, то есть состоит только из ребер присутствующих в $Г_1$ или в $Г_2$, но не в обоих графах одновременно.

Основные понятия и определения теории графов

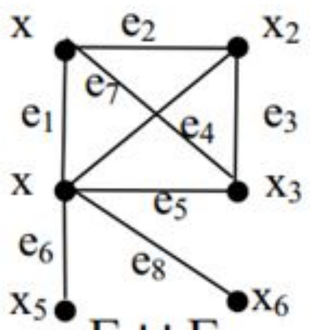
Пример 2. Заданы графы $\Gamma_1(X_1,E_1)$ и $\Gamma_2(X_2,E_2)$.



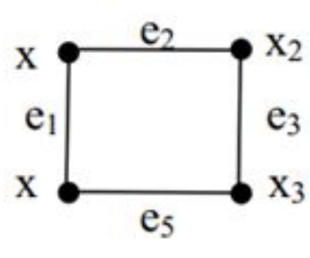


Построить: $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$, $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2$.

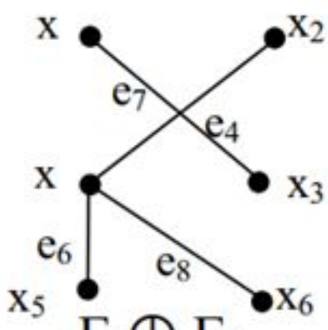
Решение



$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$



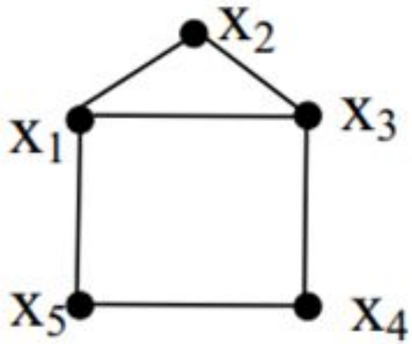
$\Gamma_1 \cap \Gamma_2$



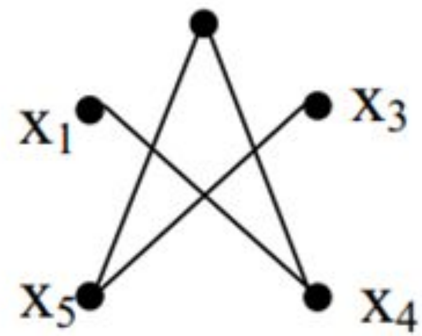
$\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$

Основные понятия и определения теории графов

Определение. Граф $\overline{\Gamma}(X,\overline{E})$ называется дополнением исходного графа $\Gamma(X,E)$, если ребро $(e_i,e_j) \in \overline{E} \Leftrightarrow (e_i,e_j) \notin E.$



$\Gamma(X,E)$



$\overline{\Gamma}(X,\overline{E})$

Матрицы графов

Для представления графов в памяти ЭВМ используют матрицы.

Матрица инцидентности. Рассмотрим граф *Г* без петель, определенный на *n* вершинах и *m* ребрах. Матрица инцидентности $A=[a_{ij}]$ графа *Г* имеет *n* строк (по одной на каждую вершину) и *m* столбцов (по одному на каждую дугу).

Элемент матрицы *A* определяется следующим образом:

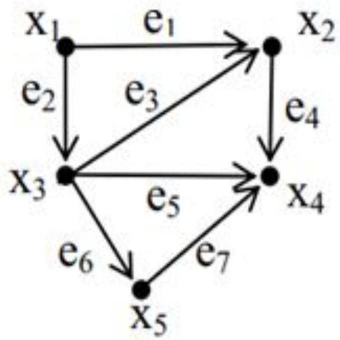
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } j - \text{я дуга инцидентна } i - \text{й вершине и исходит из неё;} \\ -1, \text{если } j - \text{я дуга инцидентна } i - \text{й вершине и заходит в неё;} \\ 0, \text{если } j - \text{я дуга не инцидентна } i - \text{й вершине.} \end{cases}$$

Для неориентированного графа *Г*:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } j - \text{е ребро инцидентно } i - \text{й вершине;} \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

Матрицы графов

Пример 3. Для заданного графа построить матрицу инцидентности.



Решение

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Матрицы графов

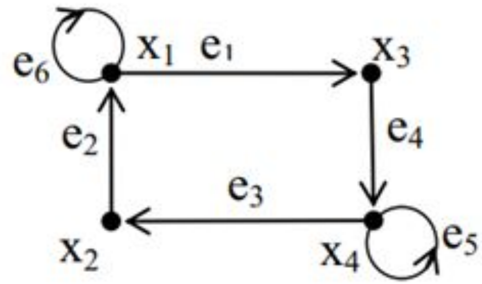
Определение. Число ребер, инцидентных вершине $x \in X$ графа $Г(X,E)$, называется *локальной степенью* вершины x и обозначается $d(x)$.

Матрица смежности. Пусть $Г(X,E)$ – ориентированный граф, не имеющий параллельных дуг, определенный на n вершинах. Матрицей смежности $M=[m_{ij}]$ графа $Г$ называется матрица порядка $n \times n$, элементы которой определяются следующим образом:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } (x_i, x_j) \in E; \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Матрицы графов

Пример 4. Для заданного графа построить матрицу смежности:



Решение:

$$M = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Если граф *Г(X,E)* содержит параллельные ориентированные ребра, то элемент mij матрицы смежности *M* такого графа равен сумме чисел ориентированных ребер, идущих из в (или чисел неориентированных ребер, соединяющих эти вершины).

НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

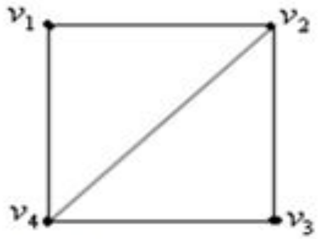
Граф G(V, E) состоит из непустого множества **вершин** V и множества **ребер** E. Каждое ребро соединяет пару вершин. Если ребро соединяет вершины V_1 и V_2, то говорят, что ребро E и вершины V_1 и V_2 **инцидентны.** Степенью d(v) вершины v называется количество ребер, инцидентных этой вершине.

Обозначение: p – число вершин графа, q – число ребер.

Матрица смежности – это квадратная матрица размера p×p, где

$$M(i,j) = \begin{cases} 1, \text{ если имеется ребро, соединяющее вершины } v_i \text{ и } v_j, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пример 10.1.



Граф

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	0	1
v_2	1	0	1	1
v_3	0	1	0	1
v_4	1	1	1	0

Матрица смежности

НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

Маршрутом в графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер, в которой любые два соседних элемента инцидентны.

Маршрут называется **замкнутым**, если он начинается и заканчивается в одной вершине, в противном случае – открытым.

Цепь – это маршрут, в котором нет повторяющихся ребер.

Простой цепью называется маршрут, в котором все вершины и ребра различны, кроме, может быть, первой и последней.

Цикл – замкнутая цепь.

Простым циклом называется замкнутая простая цепь.

Расстоянием между вершинами U и V называется длина кратчайшей цепи, соединяющей вершины U и V.

НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

Нахождение расстояния между вершинами U и V

1. Разметим вершины:

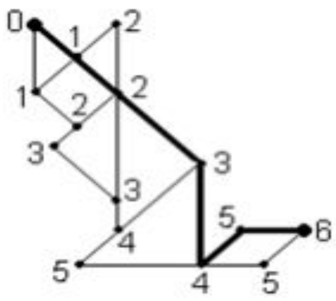
а) вершину U пометим нулем;

б) если на некотором шаге разметки имеются вершины U_j, помеченные числом j, то все еще не помеченные вершины, смежные с U_j, помечаем числом j+1;

в) как только вершина V окажется помечена, разметка прекращается.

2. Строим кратчайшую цепь, соединяющую вершины U и V.

Пример 10.2. Найдем расстояние между вершинами



Расстояние равно 6.

НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

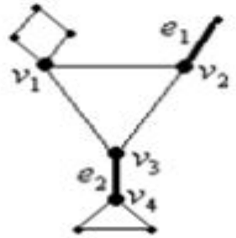
Под **операцией удаления вершины** из графа G понимается операция, заключающаяся в удалении некоторой вершины вместе с инцидентными ей ребрами.

Операция удаления ребра из графа G заключается в удалении соответствующей пары из E, при этом вершины сохраняются.

Вершина графа называется **разделяющей вершиной** (**точкой сочленения**), если ее удаление увеличивает число компонент связности.

Мост – ребро, удаление которого увеличивает число компонент связности.

Пример 10.3.



e_1, e_2 – мосты,

v_1, v_2, v_3, v_4 – точки сочленения.

НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

Методика выделения компонент связности

Пример 10.4.

Пусть граф задан матрицей смежности:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
a	0	1	0	0	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	1	0	0
c	0	1	0	0	0	1	0	0
d	0	0	0	0	1	0	1	0
e	0	0	0	1	0	0	1	0
f	0	1	1	0	0	0	0	1
g	0	0	0	1	1	0	0	0
h	0	0	0	0	0	1	0	0

Составим вспомогательную таблицу:

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
1	2	3	0	0	3	0	4

Вершину *a* пометим единицей.

Вершины, смежные с *a*, пометим числом 2 (*b*).

Вершины, смежные с *b* и еще не помеченные, пометим числом 3 (*c*, *f*).

НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

Вершины, смежные с c и f и еще не помеченные, пометим числом 4 (h).

На этом процесс обрывается, так как с вершиной h смежна только вершина f, но она уже помечена, получаем первую компоненту связанности: a, b, c, f, h.

Рассмотрим оставшиеся вершины.

d	e	g
1	2	2

Вершину d пометим единицей.

С вершиной d смежны вершины e и g, пометим их числом 2.

Получаем вторую компоненту связности: d, e, g.

Полные графы

Полным называется граф, в котором каждая пара вершин соединена ребром.

Обозначение: K_p.

НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

Двудольные графы

Двудольный граф – это граф G (V, E), такой, что множество V разбито на два непересекающихся множества V_1 и V_2, причем всякое ребро из E инцидентно вершине из V_1 и вершине из V_2.

Множества V_1 и V_2 называются **долями** двудольного графа.

Если двудольный граф содержит все рёбра, соединяющие множества V_1 и V_2 , то он называется **полным двудольным графом**.

Обозначение: $K_{m,n}$, где m – количество вершин в доле V_1 , n – количество вершин в доле V_2 .

НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

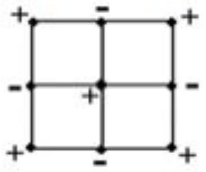
Методика проверки графа на двудольность

1. Выберем одну из вершин и пометим ее знаком «+».

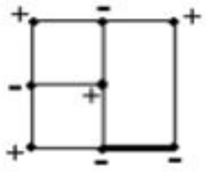
2. Берём уже помеченную вершину X_i и помечаем все смежные с ней и ещё непомеченные вершины знаком, противоположным тому, которым помечена вершина X_i. Продолжаем эту операцию до тех пор, пока не будут помечены все вершины.

3. Если каждое ребро соединяет две вершины, помеченные противоположными знаками, то граф двудолен. Если найдется ребро, соединяющее вершины, помеченные одинаковыми знаками, то граф не двудолен.

Пример 10.5.



граф двудолен.



граф не двудолен.