Сравнительный анализ методов полиэдральной аппроксимации при построении гарантирующего решения в задаче быстродействия для линейной дискретной системы

Григорьева М.А. – студентка гр.8О-404Б
Ибрагимов Д.Н. - канд. физ.-мат. наук

Москва, 2020

1. Постановка задачи

- Линейная система с дискретным временем и ограниченным управлением $(A, \mathcal{U})$:

$$x(i+1) = Ax(i) + u(i)$$
$$x(0) = x_0$$
$$u(i) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n, i \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$x(i) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u(i) \in \mathbb{R}^n$ – вектор управления, матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ невырожденная.

2. Постановка задачи (продолжение)

ления называется множеством 0-управляемости за N шагов:

$$\mathcal{X}(N) = \begin{cases} \{x_0 : \exists u(0), \ldots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}, & N \in \mathbb{N}, \\ 0, & N = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

10

Тогда N_{min} можно также определить с помощью класса множеств 0-управляемости:

$$N_{min} = \min\{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_0 \in \mathcal{X}(N)\}. \quad (1.3)$$

3. Постановка задачи (продолжение)

Следствие 1.1.

Пусть семейство множеств $\{\mathfrak{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ *определяется соотношениями* (1.2). *Тогда справедливы соотношения*

$$\mathfrak{X}(N+1) = A^{-1}(\mathfrak{X}(N) + \mathfrak{U}).$$

Лемма 1.3.

Пусть $\mathfrak{U} = conv\,\{w^1, \ldots, w^M\}$**, тогда для любой** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **выполняется равенство**

$$A\mathfrak{U} = conv\,\{Aw^1, \ldots, Aw^M\}\,.$$

Лемма 1.4.

Пусть $\mathfrak{U} = conv\,\{w^1, \ldots, w^M\}\,, \mathfrak{X} = conv\,\{v^1, \ldots, v^S\}$. **Тогда справедливо представление:**

$$\mathfrak{U} + \mathfrak{X} = conv\,\{w^1 + v^1, w^1 + v^2, \ldots, w^M + v^S\}\,.$$

4. Постановка задачи (продолжение)

2) Проверка $x \in \mathcal{X}$, где $\mathcal{X} = \mathrm{conv}\{x^1, \dots, x^N\}$

принадлежн. точки многогр

$\alpha \to \min$ ЗЛП.

$x = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \cdot x^k$ вектор ур-е. размерн n

$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k = \alpha$. скалярн. выпукл. комб. верш.

$\lambda_1, \dots, \lambda_N, \alpha \geq 0$.

Если $\alpha > 1 \Rightarrow x \notin \mathcal{X}$

$\alpha \leq 1 \Rightarrow x \in \mathcal{X}$.

Что-то сказать про это $\overline{N_{\min}} = N_{\min} = \underline{N_{\min}}.$

5. Метод сближающихся многогранников

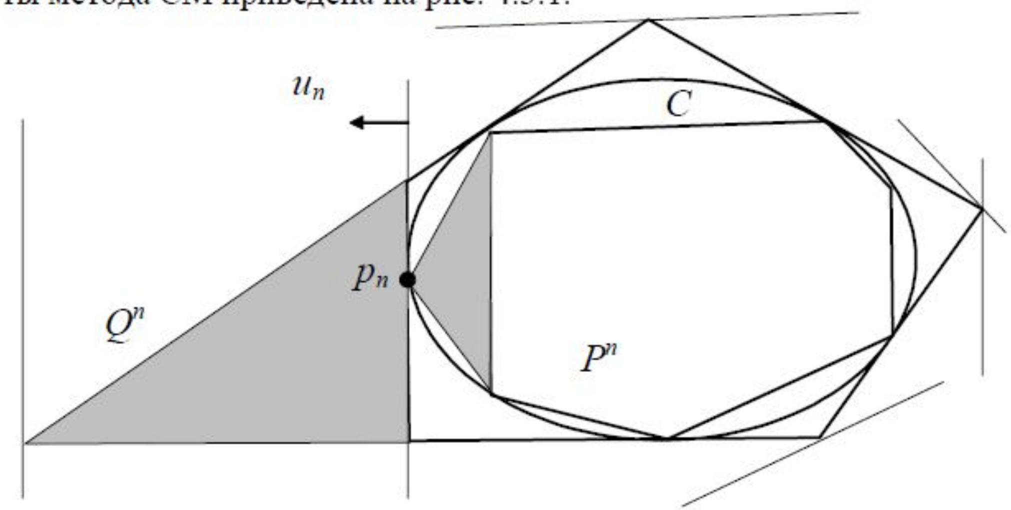
Пусть для $C\in\mathscr{C}$ и $P^0\in\mathscr{P}^i(C)$, $Q^0\in\mathscr{P}^c(C)$ построены $P^n\in\mathscr{P}^i(C)$ и $Q^n\in\mathscr{P}^e(C)$. Для построения P^{n+1} и Q^{n+1} выполняются следующие про-

Шаг 1. a). Найти $u_n := \arg\max\,\{g(u, Q^n) - g(u, P^n) \colon u\in M^f(P^n)\}$.

b). Найти $p_n\in T(u_n, C)$.

Шаг 2. Построить $P^{n+1} := \operatorname{conv}\,\{p_n, P^n\}$ и $Q^{n+1} := Q^n\cap L(u_n, C)$.

Метод СМ обозначим через M_{CM}. Двумерная иллюстрация работы метода СМ приведена на рис. 4.3.1.



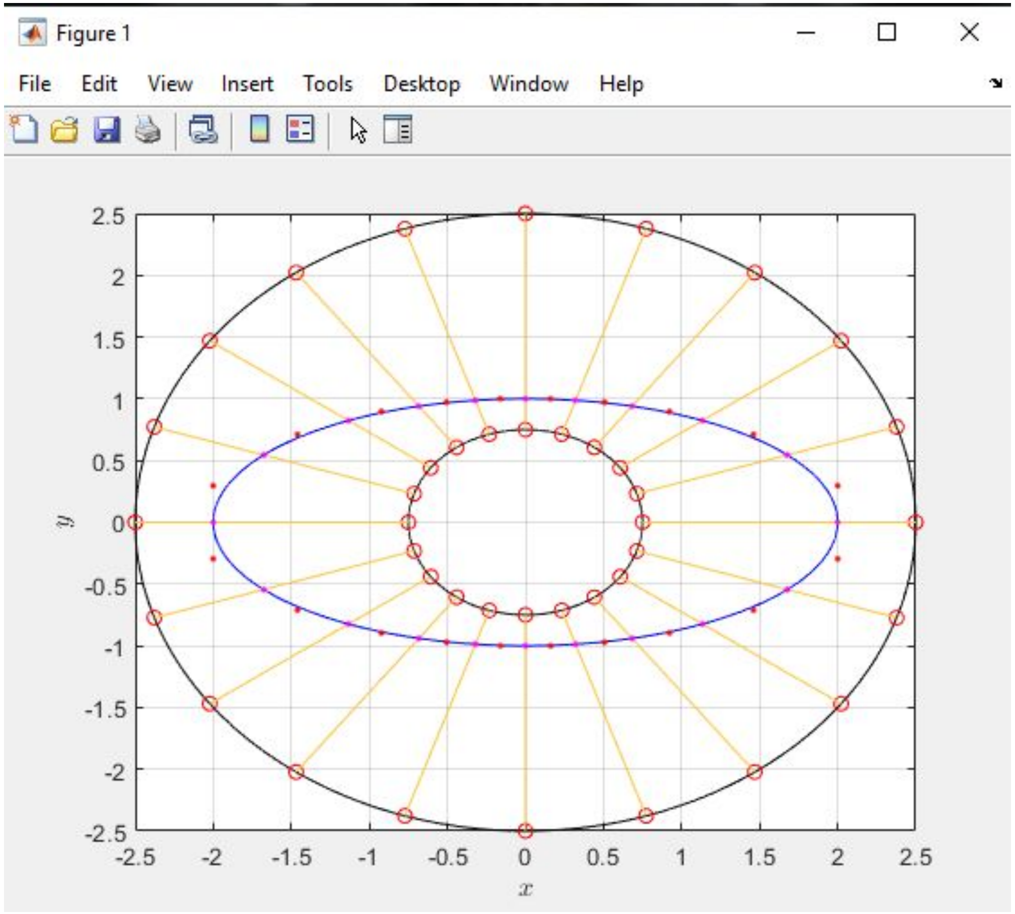
6. Метод сближающихся многогранников (продолжение)

7. Сеточный метод

Идея метода:

- вписать окружность
- построить на окружности сетку
- из центра окружности, через точку сетки провести прямую до пересечения с аппроксимируемым телом
- полученная точка - вершиной для внутреннего многогранника и точка касания для внешнего

8. Сеточный метод(продолжение)



9. Расчеты N_{min}

Размерность: 2

Матрица системы A:

0.100000	-0.200000
0.400000	0.300000

Координаты точки x:

10.000000	10.000000

Значения величин полуосей:

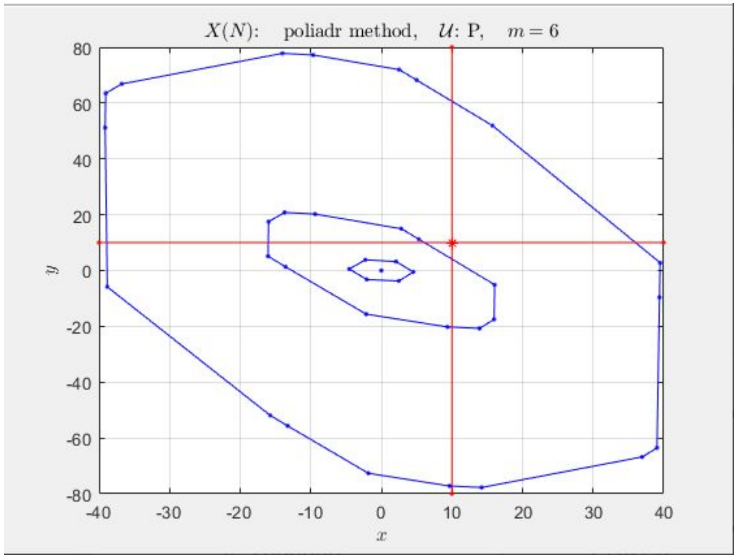
a: 1.000000
b: 2.000000

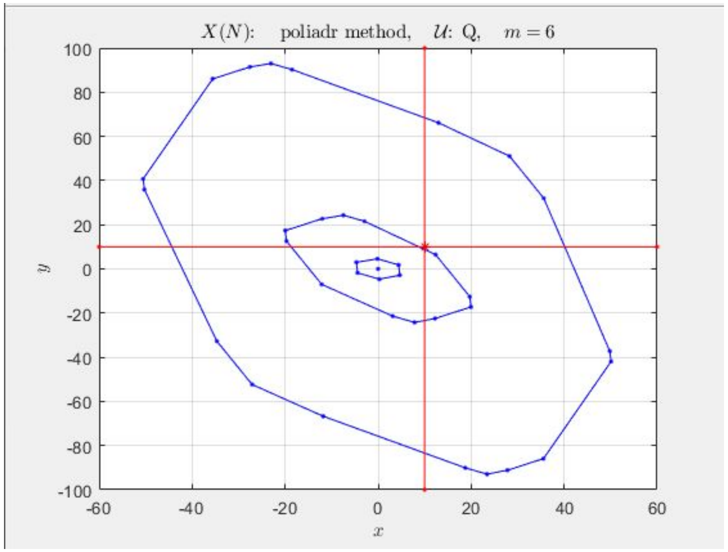
Координаты X, Y (Z) центра эллипса:

X: 0.000000
Y: 0.000000

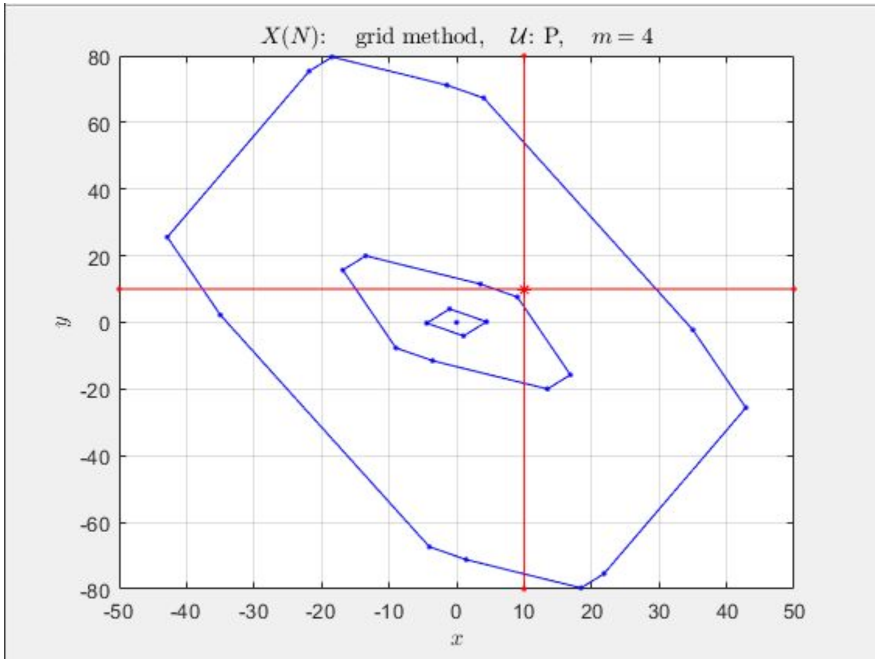
Количество начальных точек на многограннике P: 3

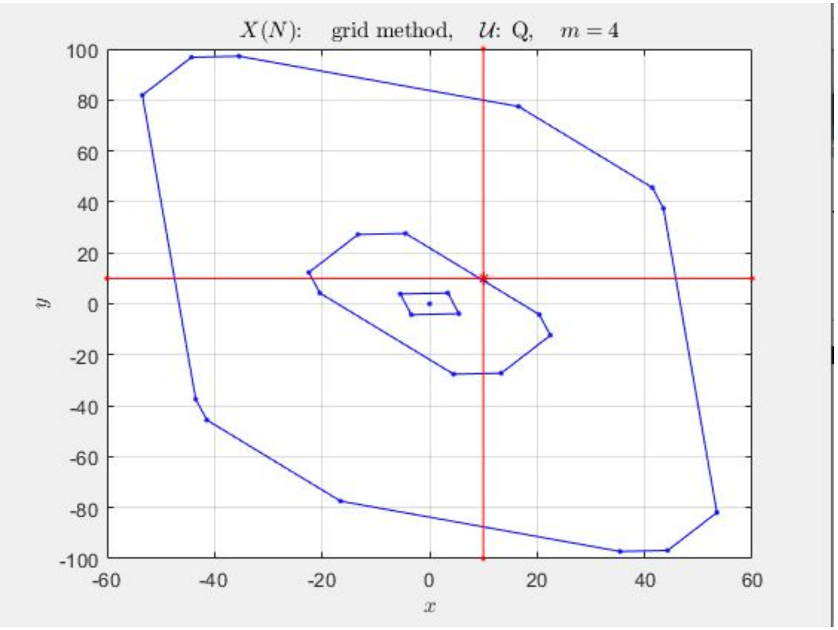
- Множества о-упрпавляемости в методе СМ





- Множества 0-упрпавляемости в сеточном методе





-- Полиэдральная аппроксимация --

Оценки NPmin и NQmin для текущего значения m точек многогранника P:

m	NPmin	NQmin
3	3	2
4	3	2
5	3	2
6	3	3

Оценка Nmin полиэдральным методом: 3

Потребовалось точек множества U: 6

-- Сеточная аппроксимация --

Оценки NPmin и NQmin для текущего значения m точек многогранника P:

m	NPmin	NQmin

10. Расчеты N_{min} (продолжение)

Размерность: 2

Матрица системы А:

0.100000	-0.200000
0.400000	0.300000

Координаты точки р:

-35.000000 56.000000

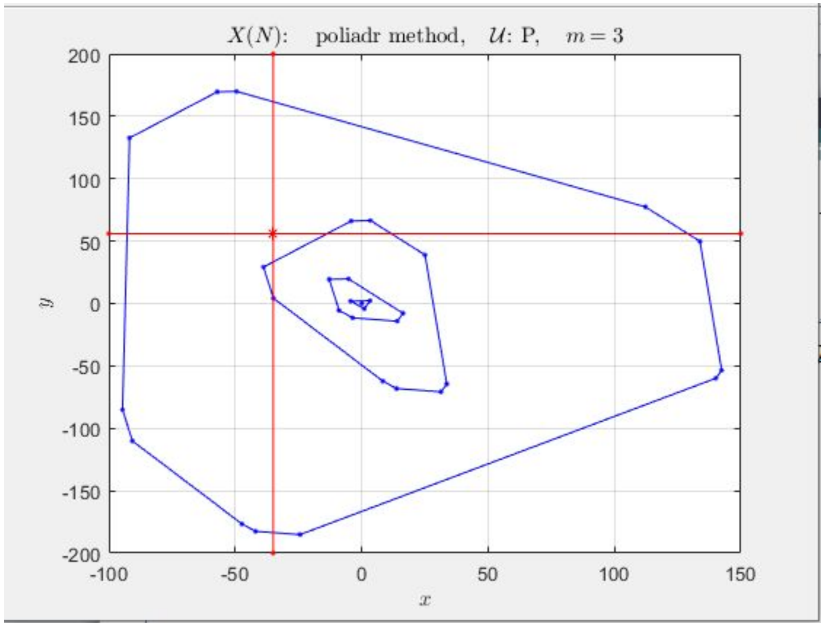
Значения величин полуосей:

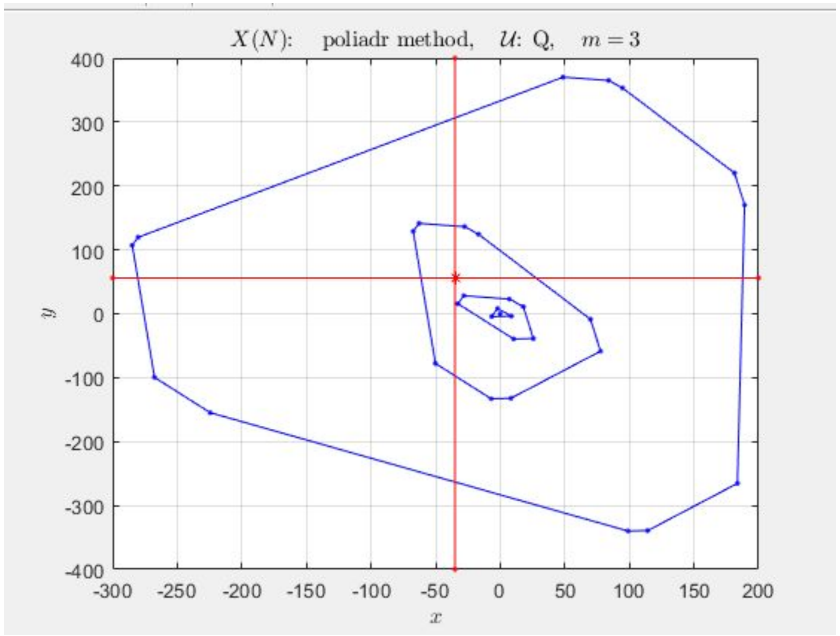
a: 1.000000
b: 2.000000

Координаты X, Y (Z) центра элипса:

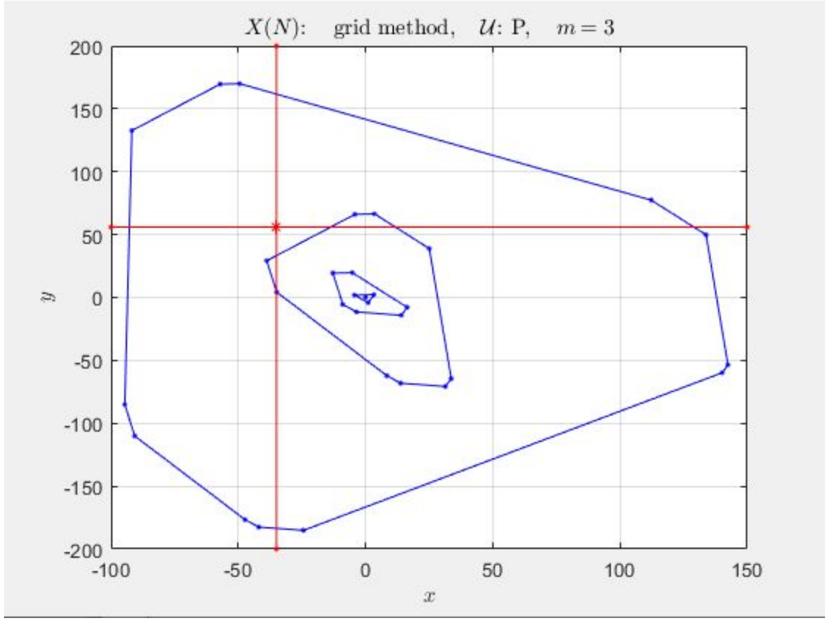
X: 0.000000
Y: 0.000000

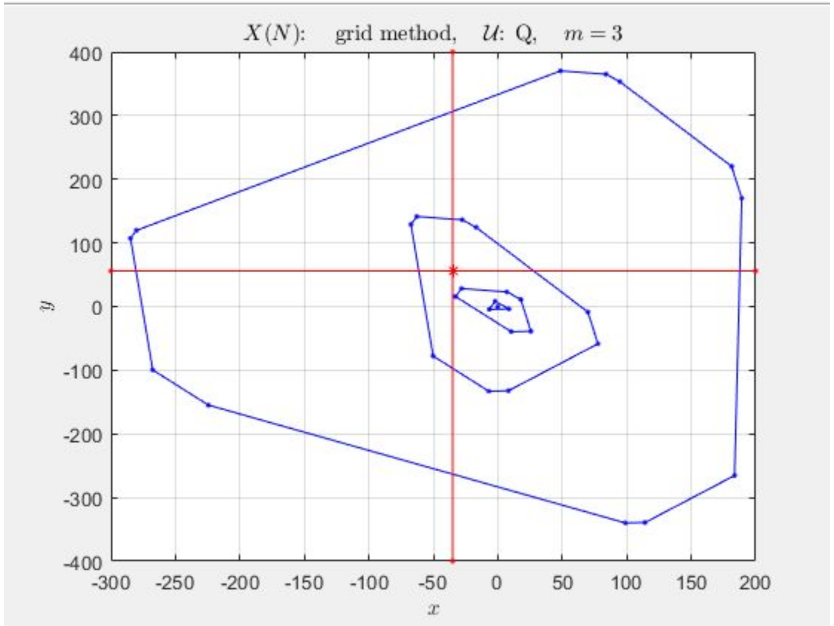
- Множества 0-упрпавляемости в методе СМ





- Множества 0-упрпавляемости в сеточном методе





-- Полиэдральная аппроксимация --

Оценки NPmin и NQmin для текущего значения m точек многогранника P:

m | NPmin | NQmin
----
3 4 4

Оценка Nmin полиэдральным методом: 4

Потребовалось точек множества U: 3

-- Сеточная аппроксимация --

Оценки NPmin и NQmin для текущего значения m точек многогранника P:

m | NPmin | NQmin
----
3 4 4

11. Расчеты N_{min} (продолжение)

Размерность: 2

Матрица системы А:

0.100000 -0.200000
0.400000 0.300000

Координаты точки р:

270.000000 -560.000000

Значения величин полуосей:

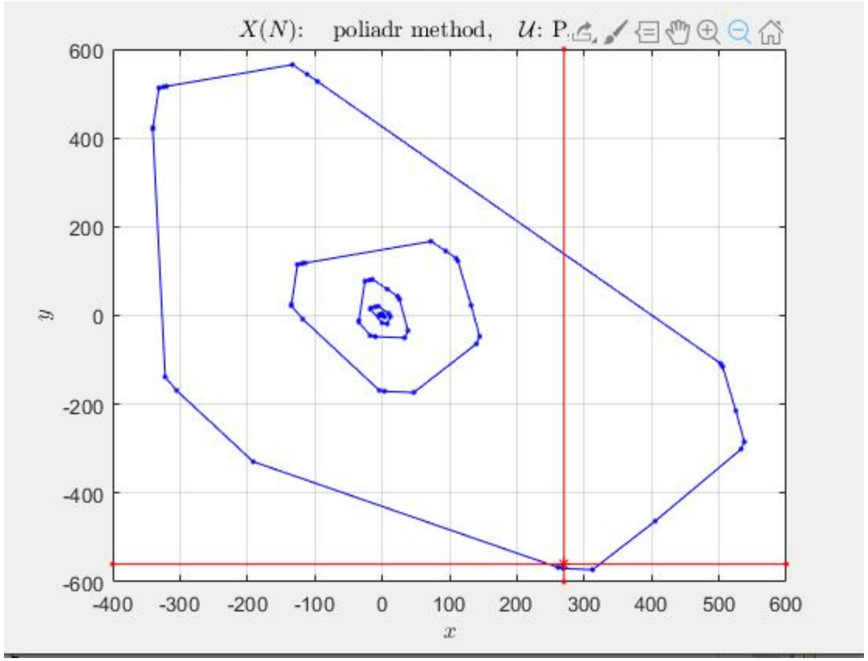
a: 1.000000
b: 2.000000

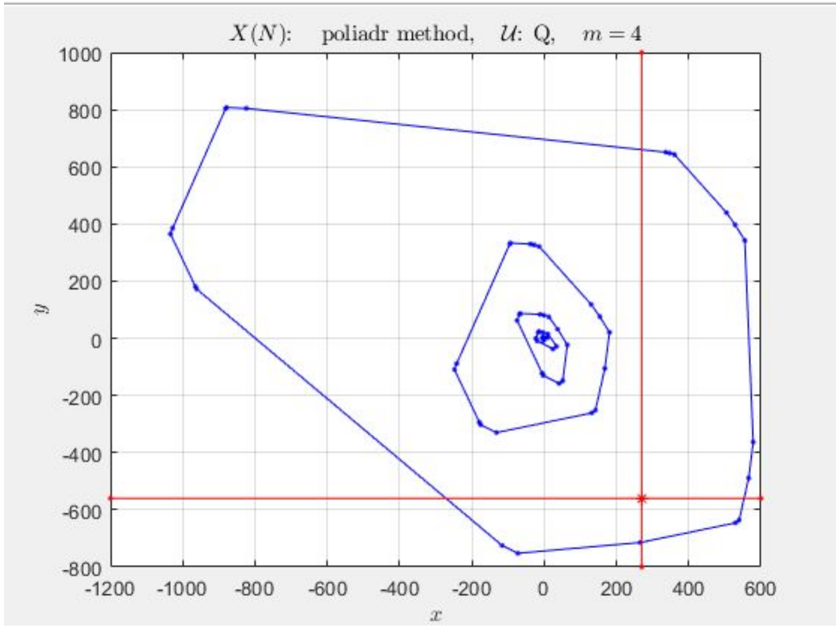
Координаты X, Y (Z) центра элипса:

X: 0.000000
Y: 0.000000

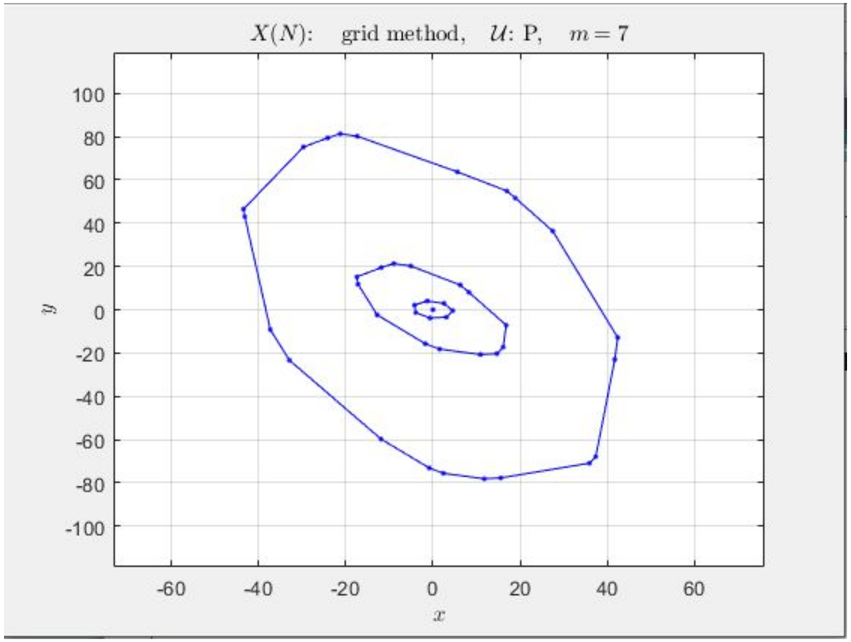
Количество начальных точек на многограннике Р: 3

• Множества 0-упрпавляемости в методе СМ

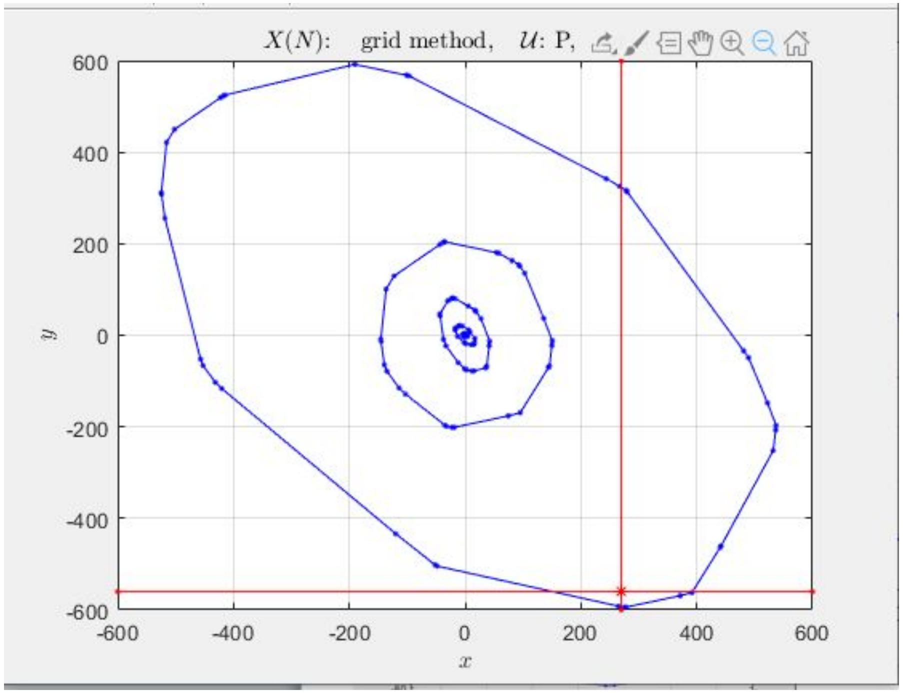




- Множества 0-упрпавляемости в сеточном методе

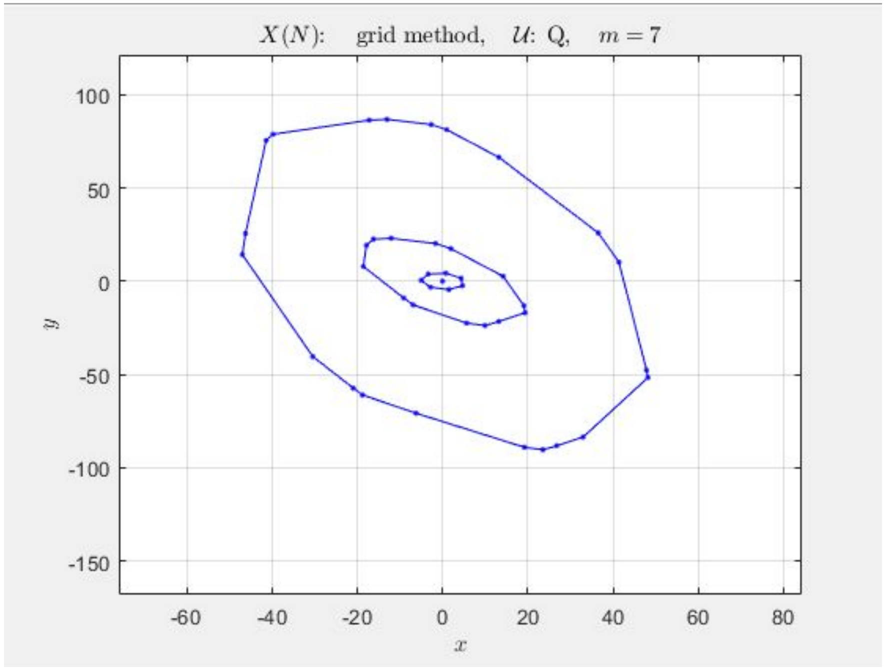


$N = \overline{1,3}$

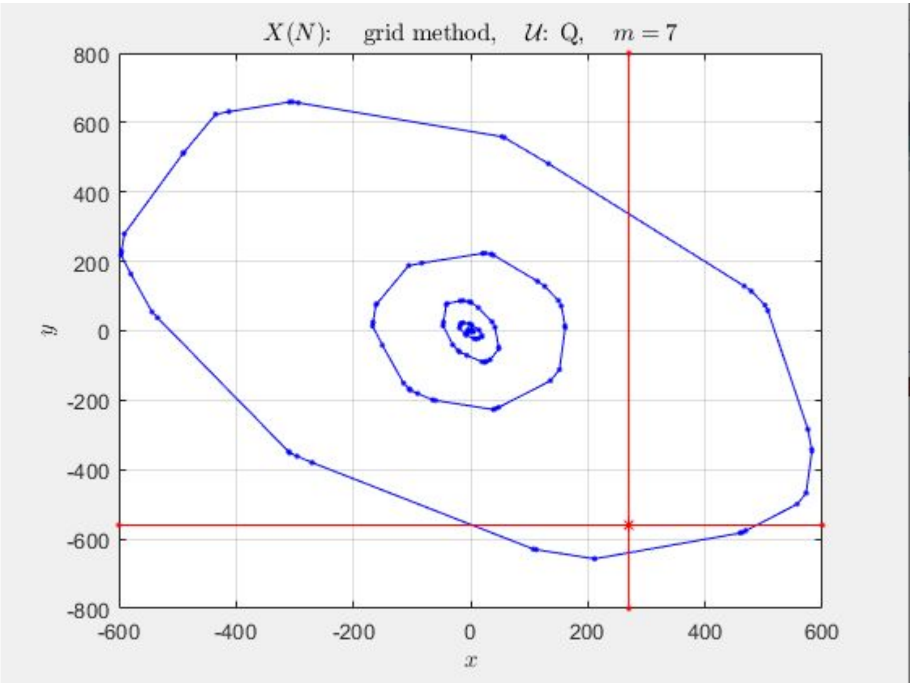


$N = \overline{4,5}$

- Множества о-упрпавляемости в сеточном методе (продолжение)



$N = \overline{1,3}$



$N = \overline{4,5}$

-- Полиэдральная аппроксимация --
Оценки NPmin и NQmin для текущего значения m точек многогранника P:

m | NPmin | NQmin
----
3 6 5
4 5 5

Оценка Nmin полиэдральным методом: 5
Потребовалось точек множества U: 4

-- Сеточная аппроксимация --
Оценки NPmin и NQmin для текущего значения m точек многогранника P:

m | NPmin | NQmin
----

12. Результаты Выпускной Квалификационной Работы

- Реализована аппроксимация множества методом сближающихся многогранников
- Реализована аппроксимация множества сеточным методом