

Сравнительный анализ
методов полиэдральной аппроксимации
при построении гарантирующего решения
в задаче быстрогодействия
для линейной дискретной системы

Григорьева М.А. – студентка гр.80-404Б
Ибрагимов Д.Н. - канд. физ.-мат. наук

Москва, 2020

1. Постановка задачи

• Линейная система с дискретным временем и ограниченным управлением (A, \mathcal{U}) :

$$\begin{aligned}x(i + 1) &= Ax(i) + u(i) \\x(0) &= x_0 \\u(i) &\in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n, i \in \mathbb{N} \cup \{0\},\end{aligned}$$

$x(i) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u(i) \in \mathbb{R}^n$ – вектор управления, матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ невырожденная.

2. Постановка задачи (продолжение)

ления называется множеством θ -управляемости за N шагов:

$$\mathcal{X}(N) = \begin{cases} \{x_0 : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}, & N \in \mathbb{N}, \\ 0, & N = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

10

Тогда N_{min} можно также определить с помощью класса множеств θ -управляемости:

$$N_{min} = \min \{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_0 \in \mathcal{X}(N)\}. \quad (1.3)$$

3. Постановка задачи (продолжение)

Следствие 1.1.

Пусть семейство множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется соотношениями (1.2). Тогда справедливы соотношения

$$\mathcal{X}(N + 1) = A^{-1}(\mathcal{X}(N) + \mathcal{U}).$$

Лемма 1.3.

Пусть $\mathcal{U} = \text{conv} \{w^1, \dots, w^M\}$, тогда для любой $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ выполняется равенство

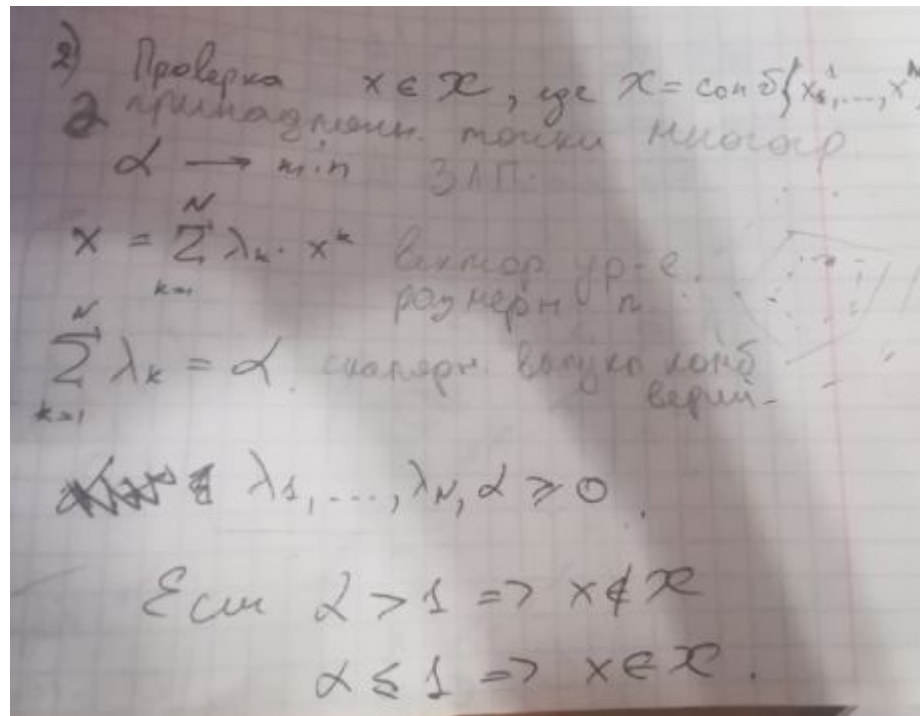
$$A\mathcal{U} = \text{conv} \{Aw^1, \dots, Aw^M\}.$$

Лемма 1.4.

Пусть $\mathcal{U} = \text{conv} \{w^1, \dots, w^M\}$, $\mathcal{X} = \text{conv} \{v^1, \dots, v^S\}$. Тогда справедливо представление:

$$\mathcal{U} + \mathcal{X} = \text{conv} \{w^1 + v^1, w^1 + v^2, \dots, w^M + v^S\}.$$

4. Постановка задачи (продолжение)



Что-то сказать про это

$$\overline{N_{\min}} = N_{\min} = \underline{N_{\min}}.$$

5. Метод сближающихся многогранников

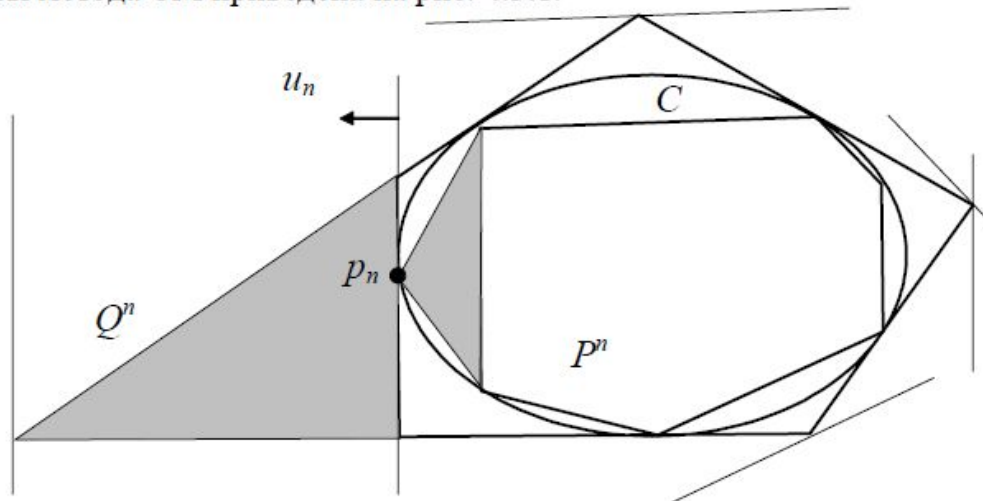
Пусть для $C \in \mathcal{C}$ и $P^0 \in \mathcal{F}^i(C)$, $Q^0 \in \mathcal{F}^e(C)$ построены $P^n \in \mathcal{F}^i(C)$ и $Q^n \in \mathcal{F}^e(C)$. Для построения P^{n+1} и Q^{n+1} выполняются следующие про-

Шаг 1. а). Найти $u_n := \arg \max \{g(u, Q^n) - g(u, P^n) : u \in M^f(P^n)\}$.

б). Найти $p_n \in T(u_n, C)$.

Шаг 2. Построить $P^{n+1} := \text{conv} \{p_n, P^n\}$ и $Q^{n+1} := Q^n \cap L(u_n, C)$.

Метод СМ обозначим через $M_{\text{СМ}}$. Двумерная иллюстрация работы метода СМ приведена на рис. 4.3.1.



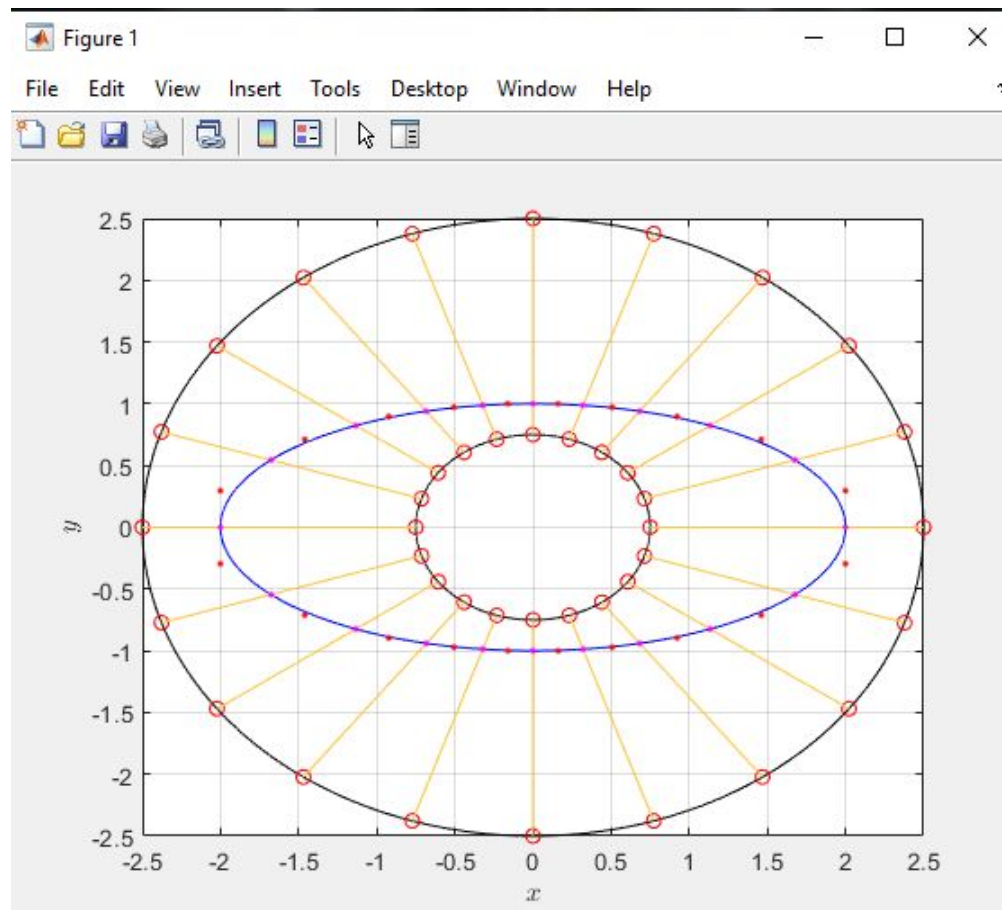
6. Метод сближающихся многогранников (продолжение)

7. Сеточный метод

Идея метода:

- вписать окружность
- построить на окружности сетку
- из центра окружности, через точку сетки провести прямую до пересечения с аппроксимируемым телом
- полученная точка - вершиной для внутреннего многогранника и точка касания для внешнего

8. Сеточный метод(продолжение)



9. Расчеты N_{min}

Размерность: 2

Матрица системы A:

0.100000	-0.200000
0.400000	0.300000

Координаты точки x:

10.000000	10.000000
-----------	-----------

Значения величин полуосей:

a: 1.000000

b: 2.000000

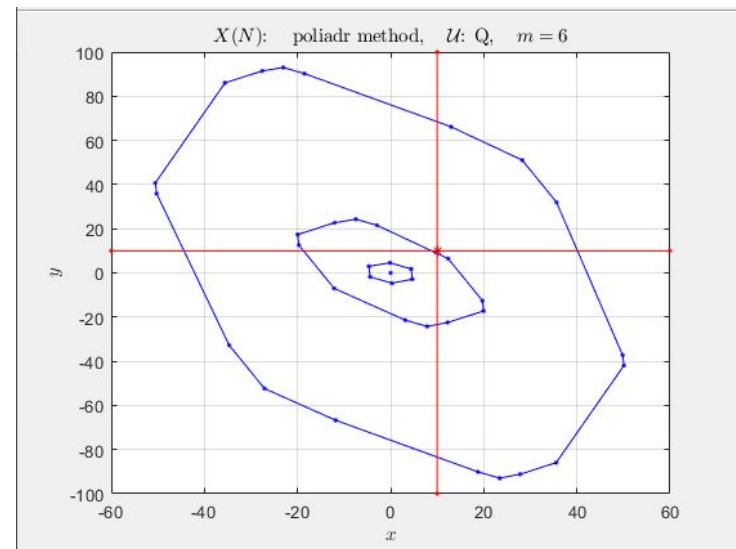
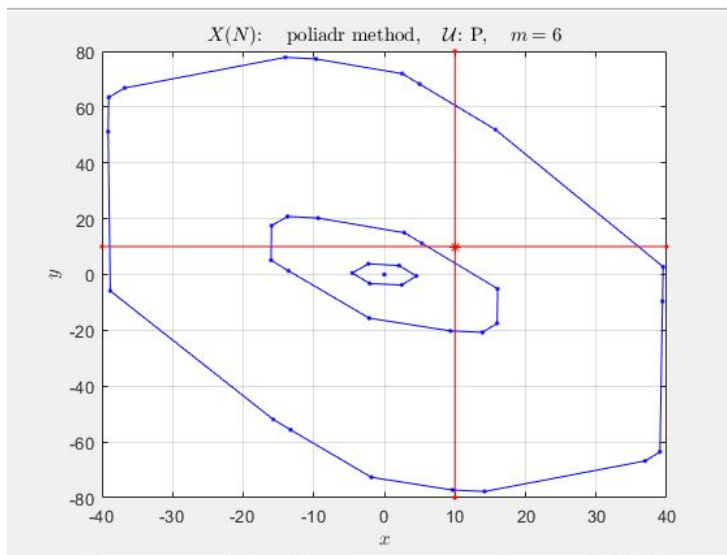
Координаты X, Y (Z) центра эллипса:

X: 0.000000

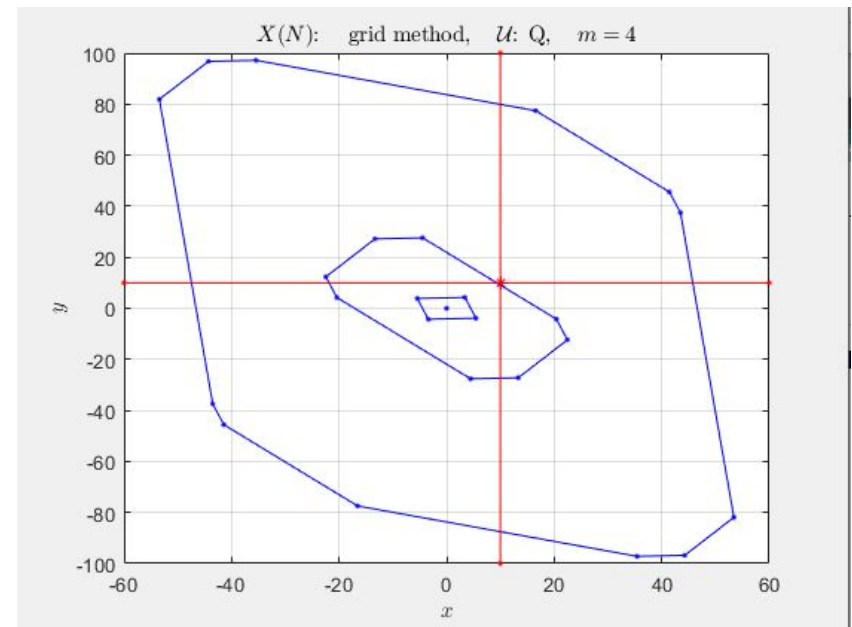
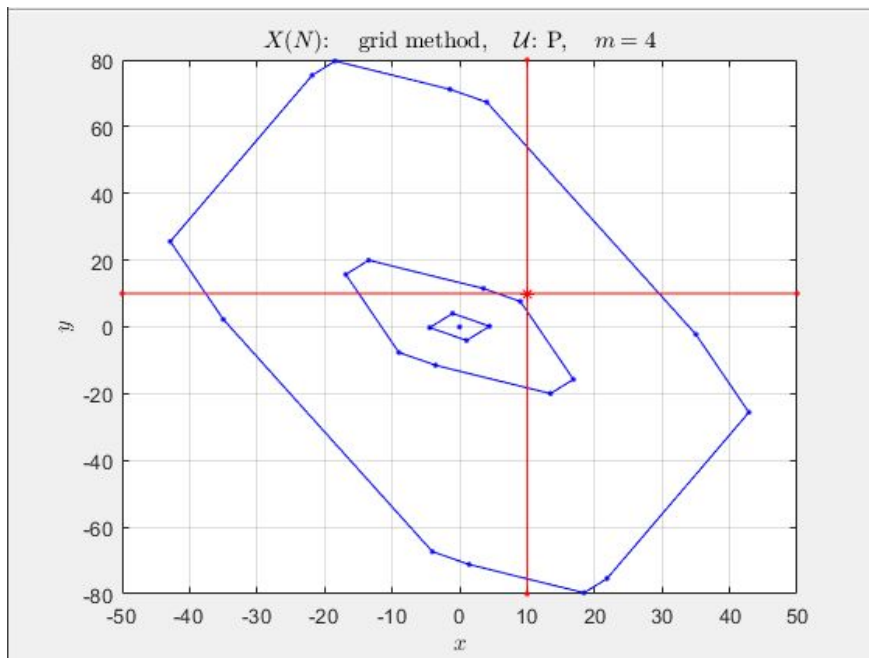
Y: 0.000000

Количество начальных точек на многограннике P: 3

- Множества 0-упрпавляемости в методе СМ



- Множества 0-управляемости в сеточном методе



-- Полиэдральная аппроксимация --

Оценки NP_{\min} и NQ_{\min} для текущего значения m точек многогранника P :

m	NP_{\min}	NQ_{\min}
-----	-------------	-------------

3	3	2
---	---	---

4	3	2
---	---	---

5	3	2
---	---	---

6	3	3
---	---	---

Оценка N_{\min} полиэдральным методом: 3

Потребовалось точек множества U : 6

-- Сеточная аппроксимация --

Оценки NP_{\min} и NQ_{\min} для текущего значения m точек многогранника P :

m	NP_{\min}	NQ_{\min}
-----	-------------	-------------

3	3	3
---	---	---

10. Расчеты N_{min} (продолжение)

Размерность: 2

Матрица системы A:

0.100000	-0.200000
0.400000	0.300000

Координаты точки p:

-35.000000 56.000000

Значения величин полуосей:

a: 1.000000

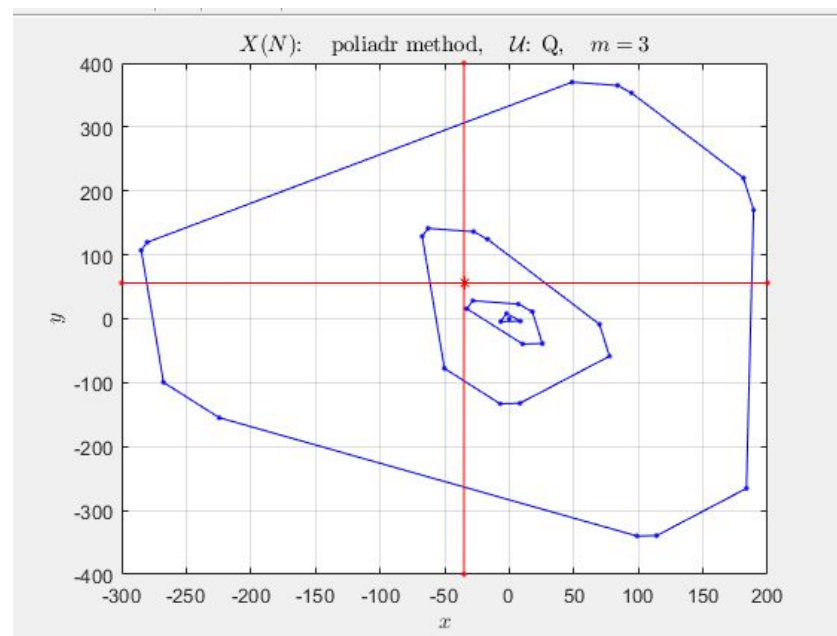
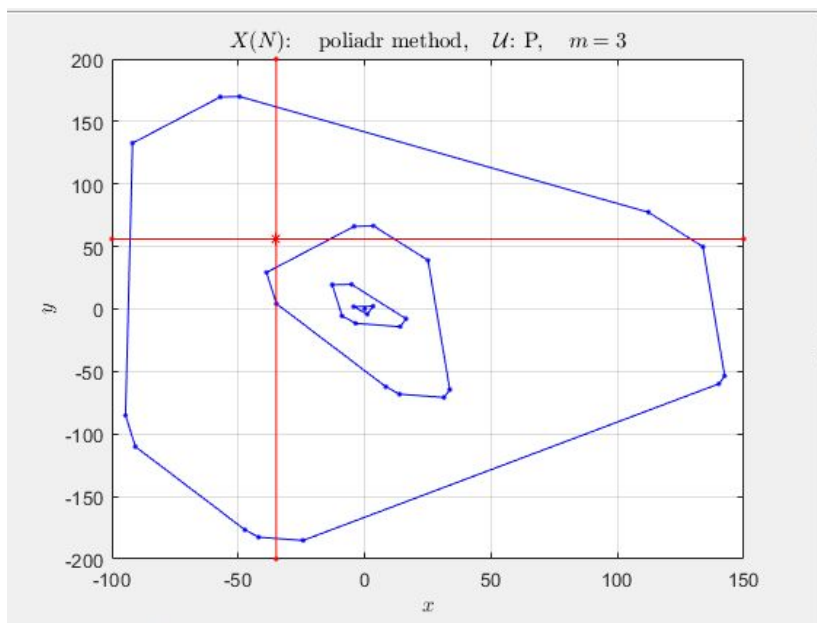
b: 2.000000

Координаты X, Y (Z) центра эллипса:

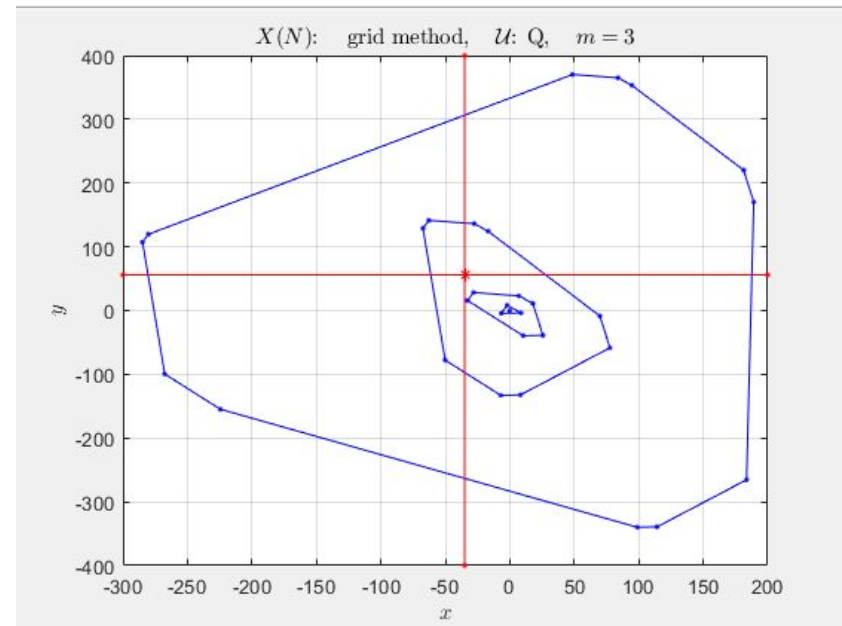
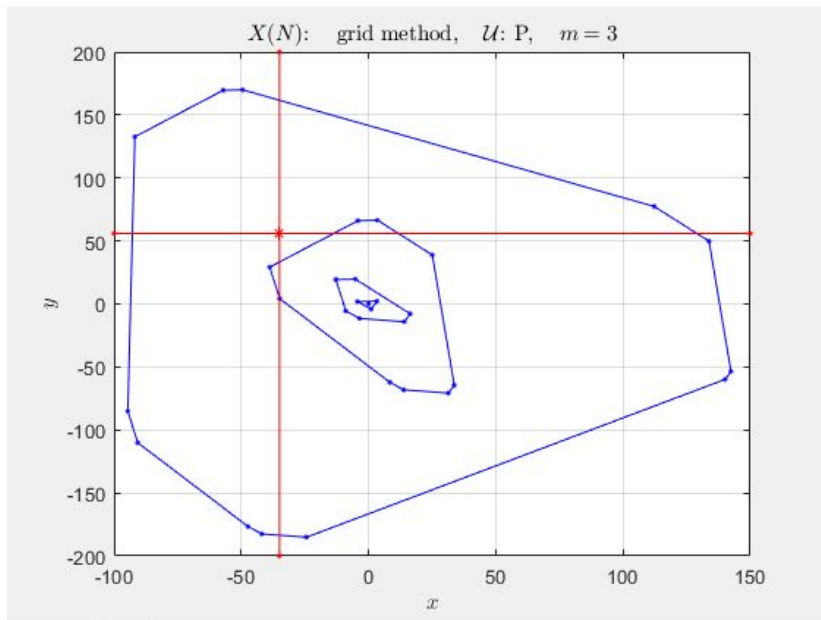
X: 0.000000

Y: 0.000000

- Множества 0-упрпавляемости в методе СМ



- Множества 0-управляемости в сеточном методе



-- Полиэдральная аппроксимация --

Оценки NP_{min} и NQ_{min} для текущего значения m точек многогранника P :

$m \mid NP_{min} \mid NQ_{min}$

3 4 4

Оценка N_{min} полиэдральным методом: 4

Потребовалось точек множества U : 3

-- Сеточная аппроксимация --

Оценки NP_{min} и NQ_{min} для текущего значения m точек многогранника P :

$m \mid NP_{min} \mid NQ_{min}$

3 4 4

11. Расчеты N_{min} (продолжение)

Размерность: 2

Матрица системы A:

0.100000	-0.200000
0.400000	0.300000

Координаты точки p:

270.000000	-560.000000
------------	-------------

Значения величин полуосей:

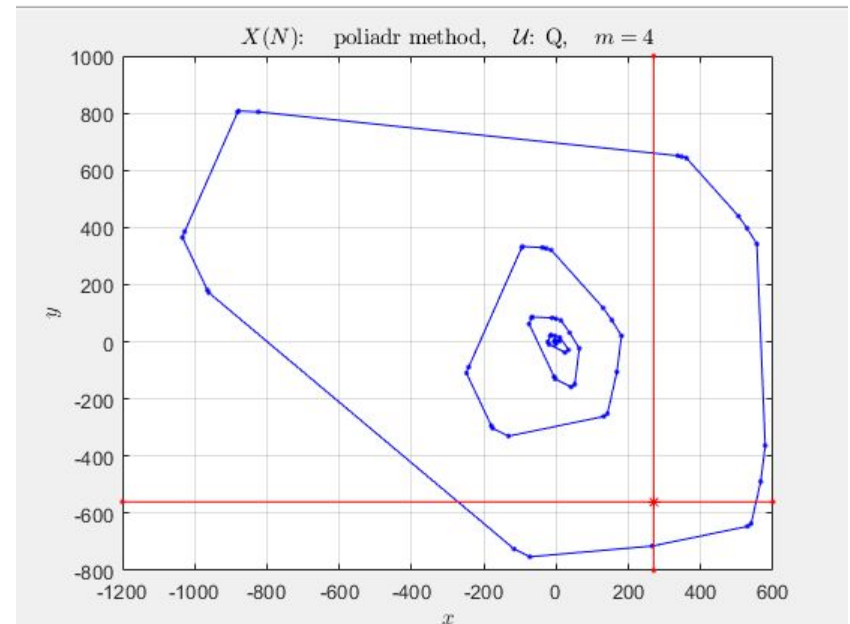
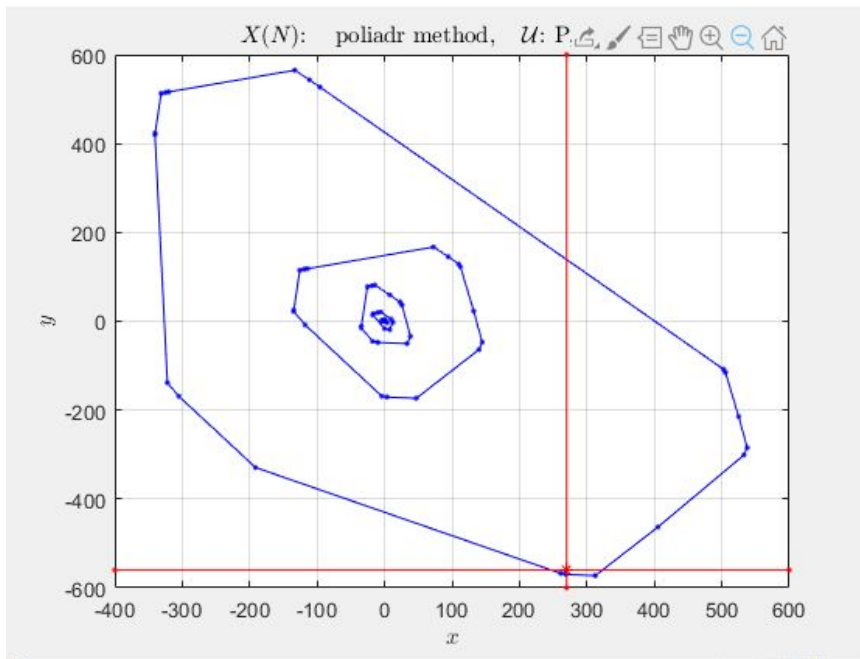
a: 1.000000
b: 2.000000

Координаты X, Y (Z) центра эллипса:

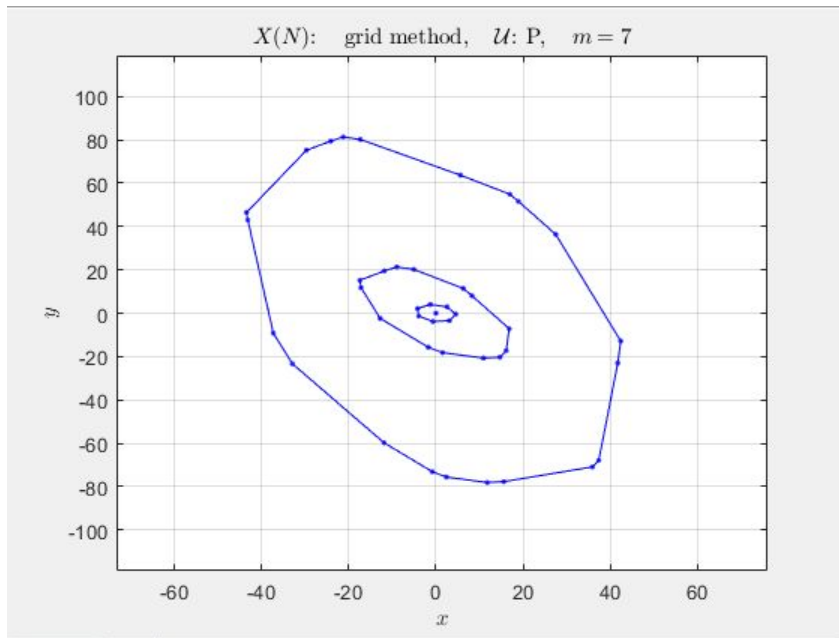
X: 0.000000
Y: 0.000000

Количество начальных точек на многограннике P: 3

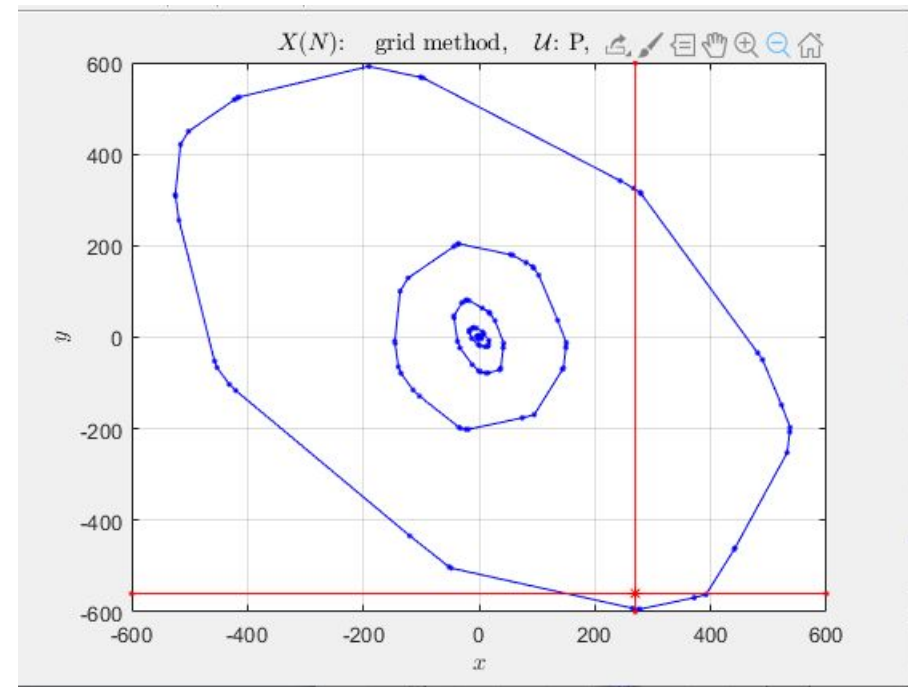
- Множества 0-упрпавляемости в методе СМ



- Множества 0-упрпавляемости в сеточном методе

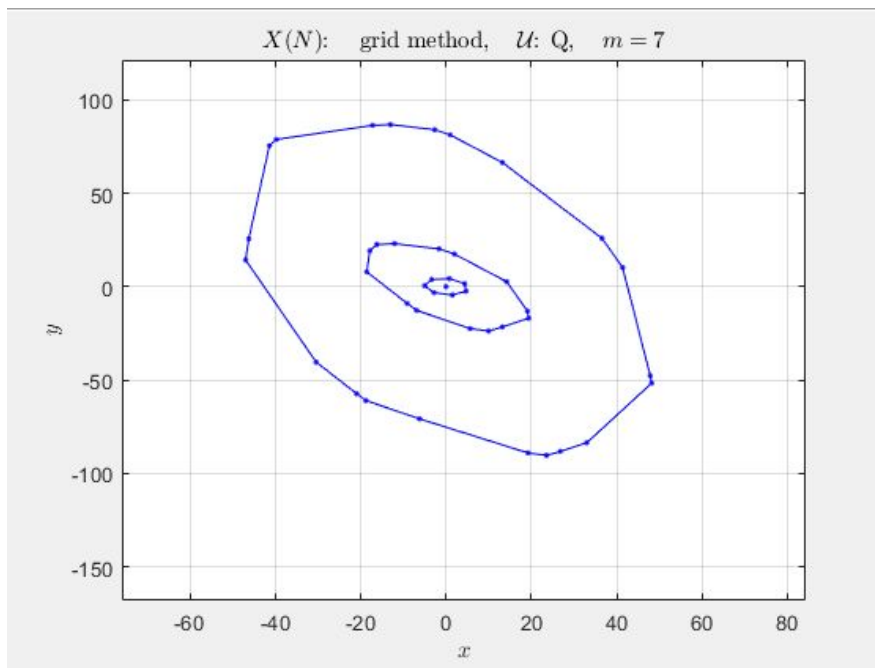


$$N = \overline{1,3}$$

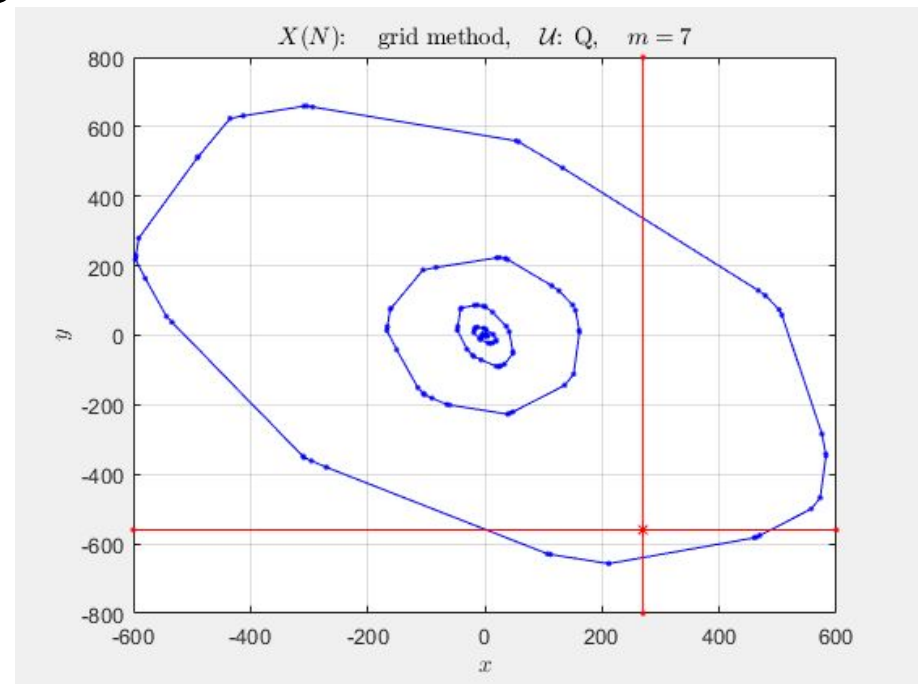


$$N = \overline{4,5}$$

- Множества 0-управляемости в сеточном методе (продолжение)



$$N = \overline{1,3}$$



$$N = \overline{4,5}$$

-- Полиэдральная аппроксимация --

Оценки NP_{\min} и NQ_{\min} для текущего значения m точек многогранника P :

m	NP_{\min}	NQ_{\min}
-----	-------------	-------------

3	6	5
---	---	---

4	5	5
---	---	---

Оценка N_{\min} полиэдральным методом: 5

Потребовалось точек множества U : 4

-- Сеточная аппроксимация --

Оценки NP_{\min} и NQ_{\min} для текущего значения m точек многогранника P :

m	NP_{\min}	NQ_{\min}
-----	-------------	-------------

3	6	5
---	---	---

12. Результаты Выпускной Квалификационной Работы

- Реализована аппроксимация множества методом сближающихся многогранников
- Реализована аппроксимация множества сеточным методом