Алгебра

Кабанов Александр Николаевич
к.ф.-м.н., доцент кафедры кибернетики

2. Системы линейных уравнений

Понятие СЛУ

- Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

- В кратком виде такую систему записывают $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i, i = 1,...,m.$

Виды СЛУ

- СЛУ называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. Если решений нет, то несовместной.
- Совместная СЛУ называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, ели решений более одного.
- Две СЛУ называются равносильными, если они имеют одно и то же множество решений.
- Если все правые части в СЛУ равны 0, то система называется однородной. Иначе – неоднородной.

СЛУ в матричной форме

- Матрицей системы называется матрица коэффициентов при переменных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

СЛУ в матричной форме

- Матрица-столбец неизвестных: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

- Матрица-столбец свободных членов (правых частей): $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

- Тогда СЛУ можно записать в виде: $AX = B$.

Метод обратной матрицы

- Пусть в СЛУ $AX = B$ матрица A квадратная и невырожденная. Тогда для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}.
- Умножим слева обе части матричного уравнения на A^{-1}. Получим: $A^{-1}AX = A^{-1}B$.
- Отсюда: $X = A^{-1}B$.

Метод расширенной матрицы

- Составим расширенную матрицу системы $(A|B)$. Элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы приведем матрицу A к единичной. Тогда матрица B обратится в $A^{-1}B$.
- Расширенная матрица примет вид $(E|A^{-1}B)$.
- После чего можем использовать $X = A^{-1}B$.

Метод Крамера

- **Теорема Крамера:** Пусть матрица СЛУ квадратная и невырожденная. Пусть $|A_i|$ – определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой i-го столбца столбцом свободных членов B. Тогда система имеет единственное решение:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, i = 1, \ldots, n.$$

Элементарные преобразования в СЛУ

- **Теорема (о равносильности СЛУ):** При любых элементарных преобразованиях строк расширенной матрицы СЛУ (кроме транспонирования) получаются равносильные СЛУ.
- На этой идее основан метод Гаусса, заключающийся в последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований.

Метод Гаусса

- Построим для СЛУ расширенную матрицу.
- С помощью элементарных преобразований приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду.
- Если в матрице *A* образовалась нулевая строка при том, что в столбце правых частей в этой строке не ноль, то СЛУ несовместна.
- Если матрица *A* привелась к треугольному виду, то СЛУ имеет единственное решение.
- Если в ступенчатой матрице число неизвестных больше числа уравнений, то СЛУ имеет бесконечное множество решений.

Совместность СЛУ

- **Теорема Кронекера-Капелли (о совместности СЛУ):** СЛУ совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы.

Базисные переменные

- Пусть ранг r расширенной матрицы СЛУ меньше числа переменных. В этом случае СЛУ имеет бесконечное множество решений.
- Выберем r переменных и составим матрицу системы из коэффициентов только при этих переменных.
- Данная матрица будет квадратной или может быть приведена к квадратной элементарными преобразованиями.

Базисные решения

- Если эта матрица невырождена, то выбранные переменные называются основными или базисными.
- Оставшиеся переменные называются неосновными или свободными.
- Решение СЛУ, в котором все свободные переменные полагаются равными нулю, называется базисным.
- **Замечание:** Выбор базисных переменных неоднозначен.

Однородные СЛУ

- Однородная СЛУ всегда совместна (как минимум, имеется нулевое решение).
- Для существования ненулевых решений ранг матрицы системы должен быть меньше числа переменных.
- Если e – решение однородной СЛУ, то и λe тоже будет решением.
- Если e_1 и e_2 – решения однородной СЛУ, то и $e_1 + e_2$ тоже будет решением.

Фундаментальные решения

- Совокупность линейно независимых решений однородной СЛУ называется фундаментальной, если любое возможное решение этой СЛУ является линейной комбинацией этих решений.
- **Теорема (о фундаментальных решениях однородной системы):** Если ранг *r* матрицы СЛУ меньше числа переменных n, то:

1. Существует совокупность линейно независимых решений СЛУ.
2. Число линейно независимых решений равно $n - r$.
3. Любое решение СЛУ можно представить в виде линейной комбинации фундаментального набора решений

Фундаментальные решения

- Любая однородная СЛУ, имеющая ненулевые решения, имеет фундаментальный набор решений (ФНР).
- Если расширенная матрица системы не имеет иррациональностей, то всегда можно построить ФНР с целыми числами.