Кто не понимает логики,
обычно не понимает и того, что он ее не понимает
Тадеуш Котарбиньский

Математическая логика в задании №18 (ЕГЭ)

Основные понятия математической логики в задании №18

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ	Высказывания, логические операции, кванторы, истинность высказывания
Проверяемые умения	Вычислять значение сложного логического высказывания по известным значениям элементарных высказываний
Уровень сложности	Повышенный
Рекомендуемое время выполнения	3 минуты

Введение

&

Дел

>, <, =

Алгоритм решения

- Записать исследуемое выражение в привычных условных обозначениях.

Отрицание	Конъюнкция	Дизъюнкция

& $\wedge \neg B$ ∨ $\neg(A$ ¬A $)$ ∧ $\overline{A}$ + $= \overline{A}$ $\overline{A}$ ·

$$\neg A \vee \neg B = \neg(A \wedge B)$$

$$\overline{A} + \overline{B} = \overline{A \cdot B}$$

- Упростить выражение (Не ЛОЖЬ = ИСТИНА)

$$A \to B = \overline{A} + B \qquad A + A = A \qquad A \cdot A = A$$

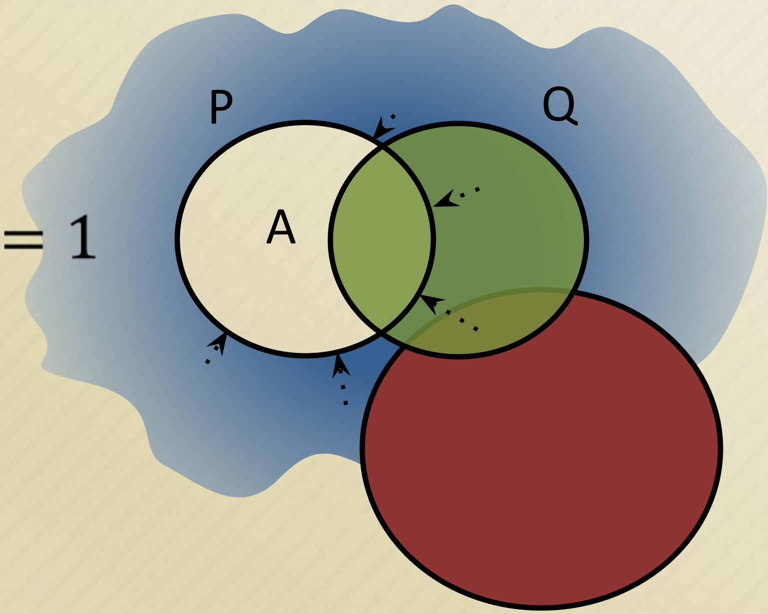
$$A \equiv B = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B \qquad A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B + C)$$

$$A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} \qquad (A + B) \cdot (A + C) = A + B \cdot C$$

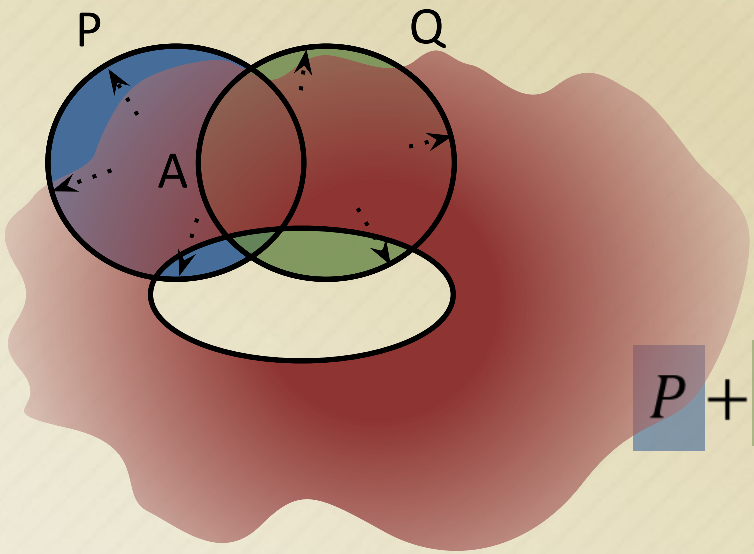
$$A + A \cdot B = A \qquad A + \overline{A} \cdot B = A + B$$

Алгоритм решения

- Изобразить множество описываемых в задании объектов с помощью геометрической модели, обращая особое внимание на возможность пересечения и полного включения одного множества в другое.



$$\overline{P} + Q + A = 1$$



$$P + Q + \overline{A} = 1$$

Алгоритм решения

- Найти «скрытые» составные высказывания. Записать, используя логические операции через простые.

$x\&16 \neq 0$ → В двоичном представлении числа x есть единица в четвертом разряде. → E_{16}

$x\&6 \neq 0$ → В двоичном представлении числа x есть хотя бы одна единица, совпадающая с единицами числа 6. → $E_6 = E_4 + E_2$

$ДЕЛ(x, 2)$ → Число x кратно 2 → D_2

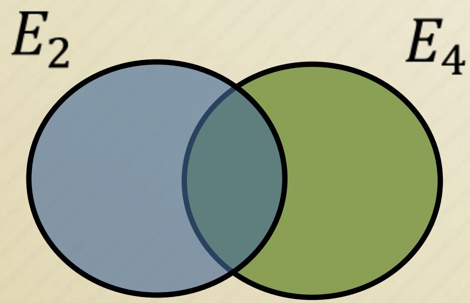
$ДЕЛ(x, 4)$ → Число x кратно 4 → $D_4 = D_2 \cdot D_4$

Алгоритм решения

- Изобразить множество описываемых в задании объектов с помощью геометрической модели, обращая особое внимание на возможность пересечения и полного включения одного множества в другое.

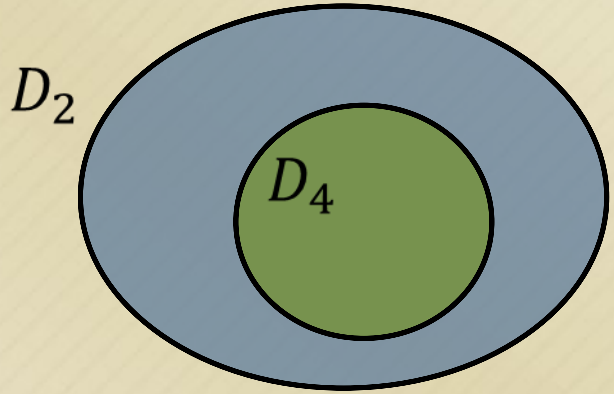
$$(x\&2 \neq 0) \vee (x\&4 \neq 0)$$

$$E_2 + E_4 = E_6$$



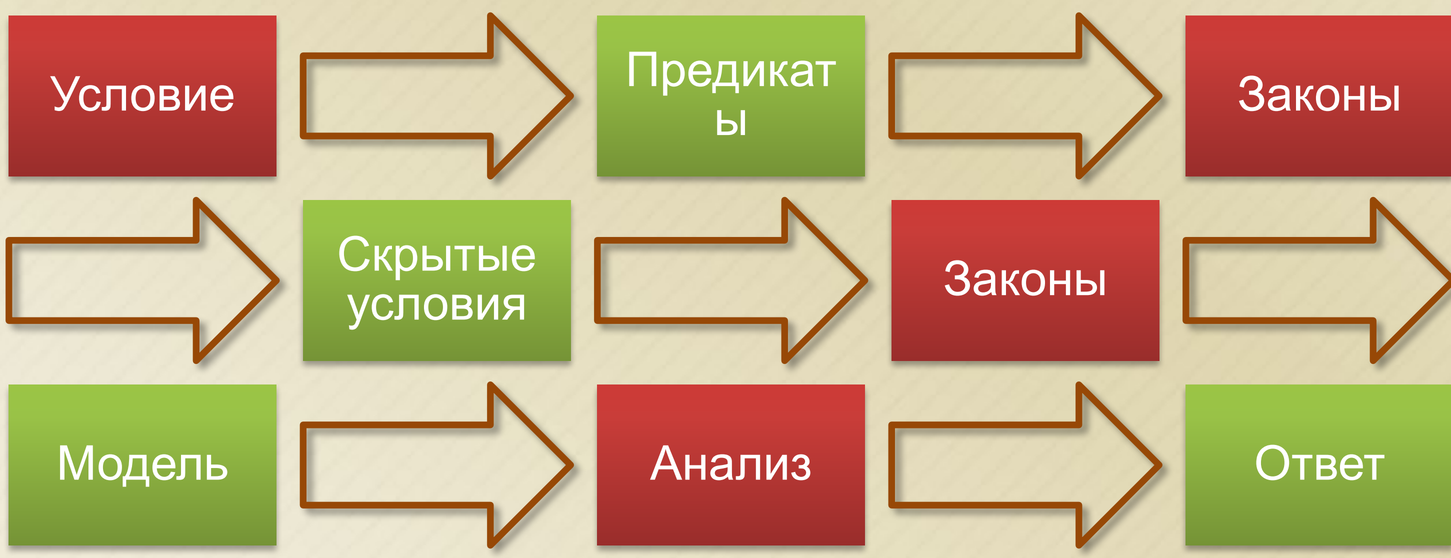
$$\text{ДЕЛ}(x, 2) \vee \text{ДЕЛ}(x, 4)$$

$$D_2 + D_4 = D_2$$



Алгоритм решения

- Записать с помощью предикатов.
- Упростить
- Рассмотреть «скрытые» высказывания
- Отметить «ИСТИНУ», независящую от параметра.
- Описать область, зависящую от параметра А.
- Подставить найденное в исходное выражение и посмотреть будет ли выражение тождественно истинным.
- Записать ответ.



Задание с битовыми операциями

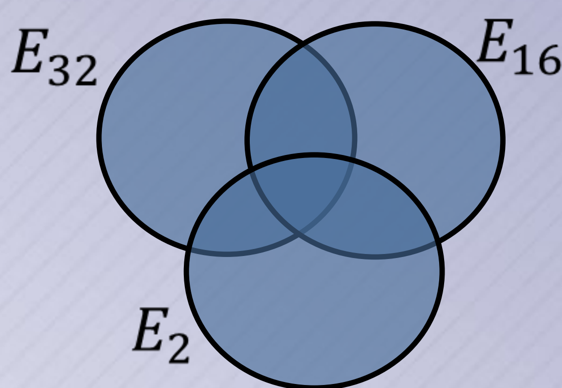
Перечислите все возможные значения натурального числа A которые обращают выражение

(x & 34 ≠ 0) ∨ (x & 18 ≠ 0) ∨ (x & A = 0)

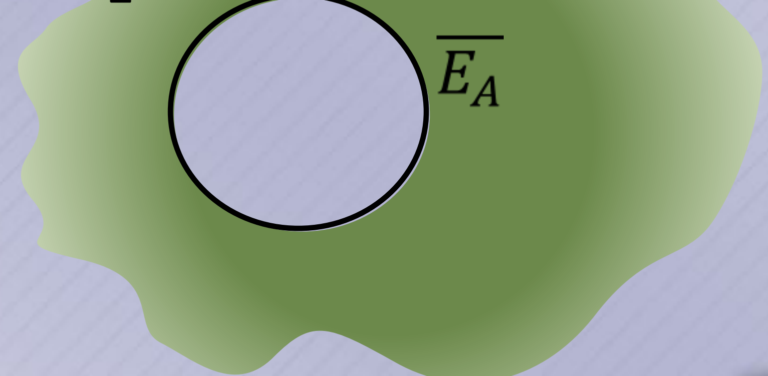
в тождественную истину при любом неотрицательном целом значении десятичной переменной x

$$E_{34} + E_{18} + \overline{E_A} = E_{32} + E_2 + E_{16} + E_2 + \overline{E_A}$$

$$= E_{32} + E_{16} + E_2 + \overline{E_A}$$



Ответ: 32, 16, , 18, 34, 48, 50
2



Задание с битовыми операциями

Для какого наибольшего неотрицательного целого десятичного числа выражение

$$(x \,\&\, 9 = 0) \land (x \,\&\, 36 \neq 0) \lor$$
$$\lor ((x \,\&\, 41 = 0) \to (x \,\&\, A = 0) \land (x \,\&\, 41 = 0))$$

тождественно истинно (т. е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении десятичной переменной *x*)?

$$\overline{E_9} \cdot E_{36} + (\overline{E_{41}} \to \overline{E_A} \cdot \overline{E_{41}}) =$$

$$\overline{E_9} \cdot E_{36} + E_{41} + \overline{E_A} \cdot \cancel{\overline{E_{41}}} =$$

$$\overline{E_9} \cdot E_{36} + E_{41} + \overline{E_A} =$$

$$\cancel{\overline{E_8}} \cdot \cancel{\overline{E_1}} \cdot (E_{32} + E_4) + E_{32} + E_8 + E_1 + \overline{E_A} =$$

$$\cancel{E_{32}} + E_4 + E_{32} + E_8 + E_1 + \overline{E_A} = E_{45} + \overline{E_A}$$

Ответ: 45

Введение

&

Дел

>, <, =

Задание с битовыми операциями

Для какого наименьшего неотрицательного целого десятичного числа *A* выражение

$$\overline{(x \,\&25 \neq 0) \wedge (x \,\&53 \neq 0)} \vee$$
$$((x \,\&\, 25 \neq 0) \wedge (x \,\&\, A \neq 0)) \vee (x \,\&\, 5 \neq 0)$$

тождественно истинно (т. е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении десятичной переменной *x*)?

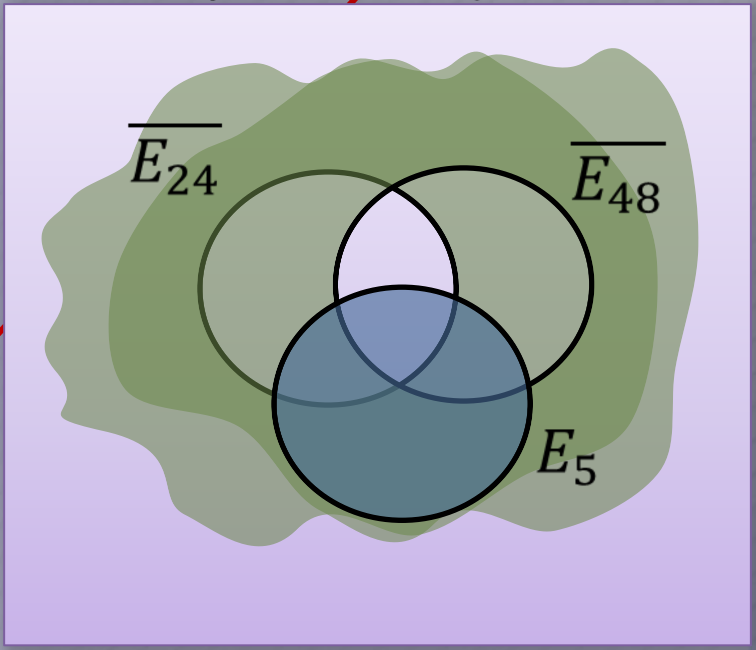
$$\overline{E_{25}\cdot E_{53}} + E_{25}\cdot E_A + E_5 = \overline{E_{25}}$$

$$\overline{E_{25}} + \overline{E_{53}} + E_A + E_5 =$$

$$\overline{E_{16}}\cdot\overline{E_8}\cdot\cancel{\overline{E_1}} + \overline{E_{32}}\cdot\overline{E_{16}}\cdot\cancel{\overline{E_4}}\cdot\cancel{\overline{E_1}}$$

$$\overline{E_{16}}\cdot\overline{E_8} + \overline{E_{32}}\cdot\overline{E_{16}} + E_A + E_4 +$$

$$\overline{E_{24}} + \overline{E_{48}} + E_A + E_5$$



Ответ: 24

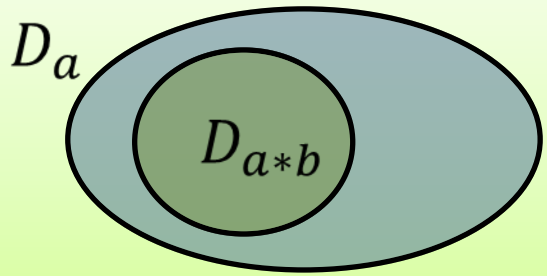
Задания на делимость

Если число делится на каждое из взаимно простых чисел, то оно делится и на их произведение.

Если число делится на произведение взаимно простых чисел, то оно делится и на каждое из них.

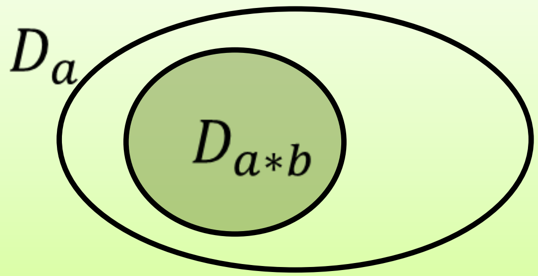
$$D_{a*b}=D_a\cdot D_b\cdot D_{a*b}$$

$$D_a+D_{a*b}=D_a$$



$$\overline{D_a}\cdot\overline{D_{a*b}}=\overline{D_a}$$

$$D_a\cdot D_{a*b}=D_{a*b}$$



$$\overline{D_a}+\overline{D_{a*b}}=\overline{D_{a*b}}$$

Задания на делимость

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого **наименьшего** натурального числа А формула

(ДЕЛ(x, 15) ∧ ¬ДЕЛ(x, 21)) → (¬ДЕЛ(x, A) ∨ ¬ДЕЛ(x, 15))

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

$$D_{15}\cdot\overline{D_{21}} \to (\overline{D_A}+\overline{D_{15}}) = \overline{D_{15}\cdot\overline{D_{21}}} + (\overline{D_A}+\overline{D_{15}}) =$$

$$\overline{D_{15}} + D_{21} + \overline{D_A} + \cancel{\overline{D_{15}}} = \overline{D_{3*5}} + D_{3*7} + \overline{D_A} =$$

$$\overline{D_3\cdot D_5} + D_3\cdot D_7 + \overline{D_A} =$$

$$\overline{D_3} + \overline{D_5} + \cancel{D_3}\cdot D_7 + \overline{D_A} = \overline{D_3} + \overline{D_5} + D_7 + \overline{D_A}$$

Ответ: 7

Задания на делимость

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого **наибольшего** натурального числа A формула

(ДЕЛ(x, 40) ∨ ДЕЛ(x, 32)) → ДЕЛ(x, A)

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

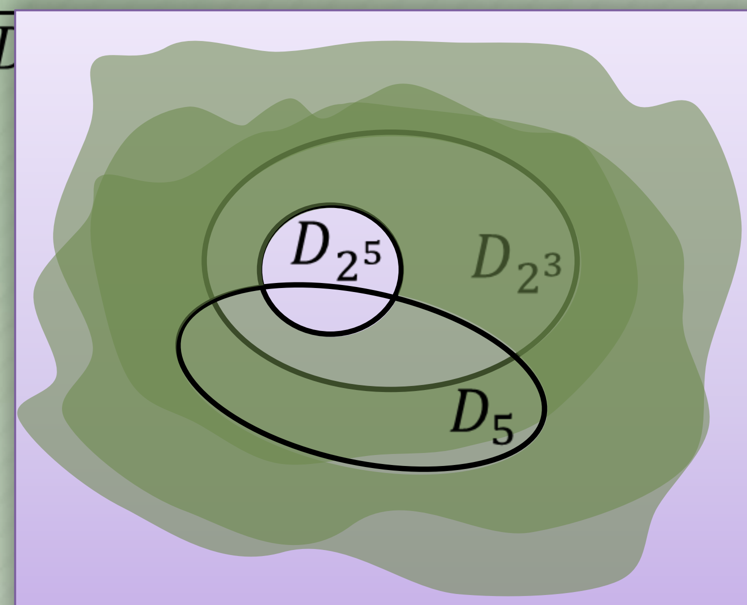
$$(D_{40} + D_{32}) \to D_A = \overline{D_{5*2^3} + D_{2^5}} + D_A = \overline{D_{5*2^3}} \cdot \overline{D_{2^5}} + D_A =$$

$$\overline{D_5 \cdot D_{2^3}} \cdot \overline{D_{2^5}} + D_A = (\overline{D_5} + \overline{D}$$

$$\overline{D_5} \cdot \overline{D_{2^5}} + \overline{D_{2^3}} \cdot \overline{D_{2^5}} + D_A =$$

$$\overline{D_5} \cdot \overline{D_{2^5}} + \overline{D_{2^3}} + D_A$$

Ответ: 8



Задания на делимость

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого **наименьшего** натурального числа A формула

ДЕЛ(x, 2520) ∨ ¬ДЕЛ(x, 5940) ∨ (¬ДЕЛ(x, A)

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

$$D_{2520} + \overline{D_{5940}} + \overline{D_A} =$$

$$= D_{2^3} \cdot D_{3^2} \cdot D_5 \cdot D_7 + \overline{D_{2^2} \cdot D_{3^3} \cdot D_5 \cdot D_{11}} + \overline{D_A} =$$

$$= D_{2^3} \cdot \cancel{D_{3^2}} \cdot \cancel{D_5} \cdot D_7 + \overline{D_{2^2}} + \overline{D_{3^3}} + \overline{D_5} + \overline{D_{11}} + \overline{D_A}$$

$$= D_{2^3} \cdot D_7 + \overline{D_{5940}} + \overline{D_A} \quad = D_{56} + \overline{D_{5940}} + \overline{D_A}$$

Ответ: 56

Отношение больше-меньше

Сколько существует целых значений A, при которых формула

$$((x \geq 17) \rightarrow (x^2 > A)) \wedge ((y^2 > A) \rightarrow (y > 10))$$

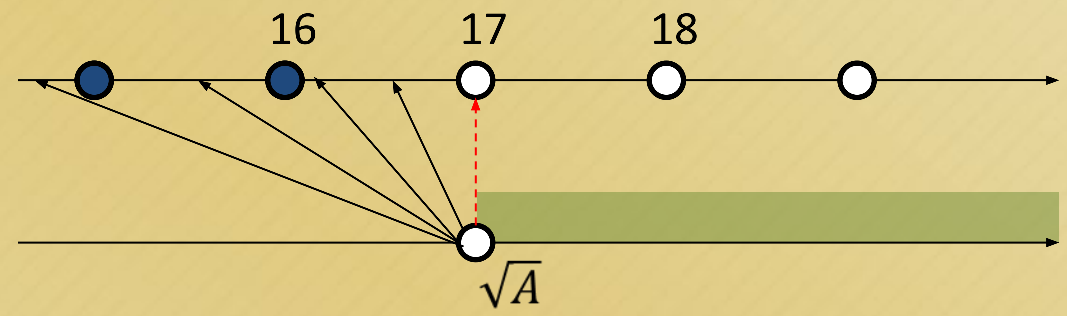
тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных *x* и *y*)?

$$\begin{cases}(x \geq 17) \rightarrow (x^2 > A) = 1 \\ (y^2 > A) \rightarrow (y > 10) = 1\end{cases}$$

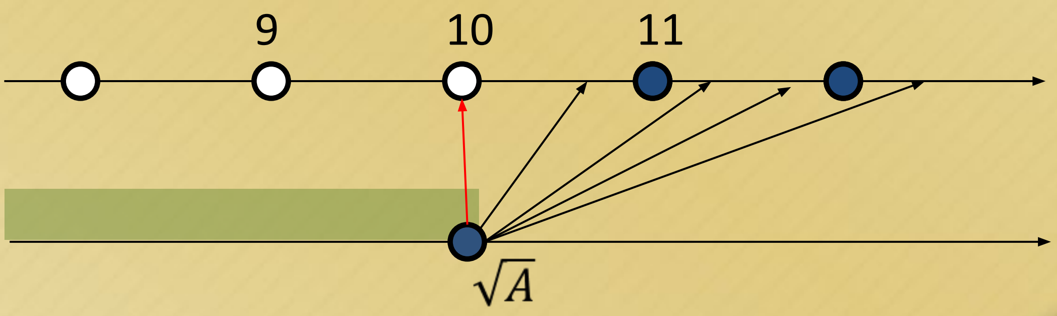
$$100 \leq A \leq 288$$

$$288 - 100 + 1 = 189$$

$$(x \geq 17) \rightarrow (x^2 > A)$$
$$(x < 17) + \left(|x| > \sqrt{A}\right)$$
$$(x < 17) + \left(x > \sqrt{A}\right)$$
$$\sqrt{A} < 17$$



$$(y^2 > A) \rightarrow (y > 10) = 1$$
$$(y^2 \leq A) + (y > 10) = 1$$
$$\left(y \leq \sqrt{A}\right) + (y > 10) = 1$$
$$\sqrt{A} \geq 10$$



Ответ: 189

Список литературы

- Е.А. Мирончик. Метод отображения — видимая часть айсберга // Информатика, № 10, 2019, с. 43-52.
- Е.А. Мирончик. Графы и системы логических уравнений // Информатика, № 8, 2016, с. 35-39.
- Е.А. Мирончик. Люблю ЕГЭ за B15, или Ещё раз про метод отображения // Информатика, № 8, 2014, с. 26-32.
- Е.А. Мирончик. Метод отображения // Информатика, № 10, 2013, с. 18-26.
- Е.А. Мирончик. Алгебра предикатов и построение геометрических моделей на ЕГЭ по информатике // Информатика, № 3, 2019, с. 40-47.

https://vk.com/club180658320