



Кто не понимает логики,
обычно не понимает и того, что он ее не понимает
Тадеуш Котарбиньский

Математическая логика в задании №18 (ЕГЭ)

Основные понятия математической логики в задании №18

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ

Высказывания, логические операции, кванторы, истинность высказывания

Проверяемые умения

Вычислять значение сложного логического высказывания по известным значениям элементарных высказываний

Уровень сложности

Повышенный

Рекомендуемое время выполнения

3 минуты



Алгоритм решения

- Записать исследуемое выражение в привычных условных обозначениях.

Отрицание

Конъюнкция

Дизъюнкция

$$\begin{array}{ccc} \& \wedge \neg B \vee \neg(A \neg A) & \wedge & \bar{A} + \bar{A} = \bar{A} \bar{A} & \cdot \\ \neg A \vee \neg B = \neg(A \wedge B) & \rightarrow & \bar{A} + \bar{B} = \overline{A \cdot B} & \end{array}$$

- Упростить выражение (Не ЛОЖЬ = ИСТИНА)

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

$$A + A = A \quad A \cdot A = A$$

$$A \equiv B = \bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B$$

$$A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B + C)$$

$$A \oplus B = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}$$

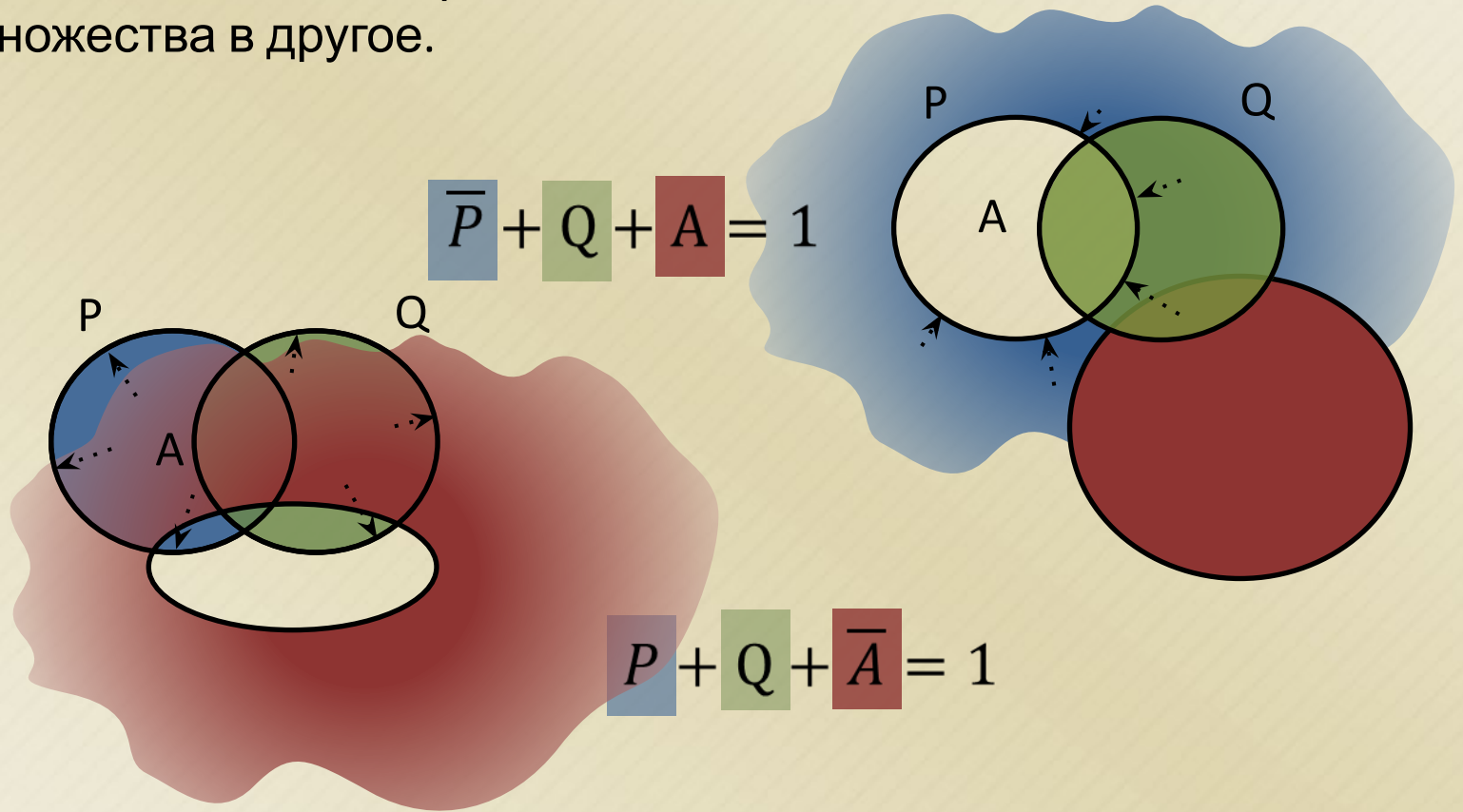
$$(A + B) \cdot (A + C) = A + B \cdot C$$

$$A + A \cdot B = A$$

$$A + \bar{A} \cdot B = A + B$$



Алгоритм решения



- Изобразить множество описываемых в задании объектов с помощью геометрической модели, обращая особое внимание на возможность пересечения и полного включения одного множества в другое.






Алгоритм решения

- Найти «скрытые» составные высказывания. Записать, используя логические операции через простые.

$x \& 16 \neq 0$  В двоичном представлении числа x есть единица в четвертом разряде.  E_{16}

$x \& 6 \neq 0$  В двоичном представлении числа x есть хотя бы одна единица, совпадающая с единицами числа 6.  $E_6 = E_4 + E_2$

ДЕЛ(x , 2)  Число x кратно 2  D_2

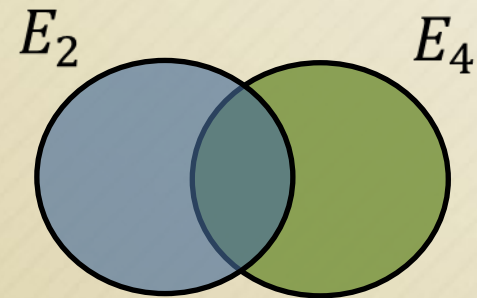
ДЕЛ(x , 4)  Число x кратно 4  $D_4 = D_2 \cdot D_4$

Алгоритм решения

- Изобразить множество описываемых в задании объектов с помощью геометрической модели, обращая особое внимание на возможность пересечения и полного включения одного множества в другое.

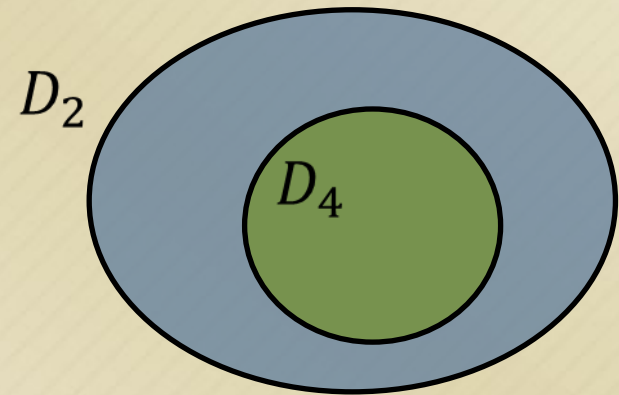
$$(x \& 2 \neq 0) \vee (x \& 4 \neq 0)$$

$$E_2 + E_4 = E_6$$



$$\text{ДЕЛ}(x, 2) \vee \text{ДЕЛ}(x, 4)$$

$$D_2 + D_4 = D_2$$



Алгоритм решения

- Записать с помощью предикатов.
- Упростить
- Рассмотреть «скрытые» высказывания
- Отметить «ИСТИНУ», независящую от параметра.
- Описать область, зависящую от параметра А.
- Подставить найденное в исходное выражение и посмотреть будет ли выражение тождественно истинным.
- Записать ответ.



Задание с битовыми операциями

Перечислите все возможные значения натурального числа A которые обращают выражение

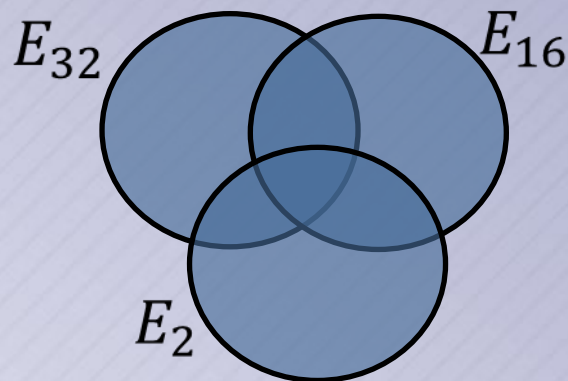
$$(x \& 34 \neq 0) \vee (x \& 18 \neq 0) \vee (x \& A = 0)$$

в тождественную истину при любом неотрицательном целом значении десятичной переменной x

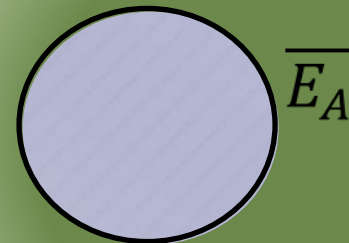
&

$$E_{34} + E_{18} + \overline{E_A} = E_{32} + E_2 + E_{16} + E_2 + \overline{E_A}$$

$$= E_{32} + E_{16} + E_2 + \overline{E_A}$$



Ответ: 32, 16,
2, 18, 34, 48, 50



Задание с битовыми операциями

Для какого наибольшего неотрицательного целого десятичного числа выражение

$$(x \& 9 = 0) \wedge (x \& 36 \neq 0) \vee \\ \vee ((x \& 41 = 0) \rightarrow (x \& A = 0) \wedge (x \& 41 = 0))$$

тождественно истинно (т. е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении десятичной переменной x)?

&

$$\overline{E_9} \cdot E_{36} + (\overline{E_{41}} \rightarrow \overline{E_A} \cdot \overline{E_{41}}) =$$

$$\overline{E_9} \cdot E_{36} + E_{41} + \overline{E_A} \cdot \overline{E_{41}} =$$

$$\overline{E_9} \cdot E_{36} + E_{41} + \overline{E_A} =$$

$$\overline{E_8} \cdot \overline{E_1} \cdot (E_{32} + E_4) + E_{32} + E_8 + E_1 + \overline{E_A} =$$

$$E_{32} + E_4 + E_{32} + E_8 + E_1 + \overline{E_A} = E_{45} + \overline{E_A}$$

Ответ: 45

Задание с битовыми операциями

Для какого наименьшего неотрицательного целого десятичного числа A выражение

$$\overline{(x \& 25 \neq 0) \wedge (x \& 53 \neq 0)} \vee ((x \& 25 \neq 0) \wedge (x \& A \neq 0)) \vee (x \& 5 \neq 0)$$

тождественно истинно (т. е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении десятичной переменной x)?

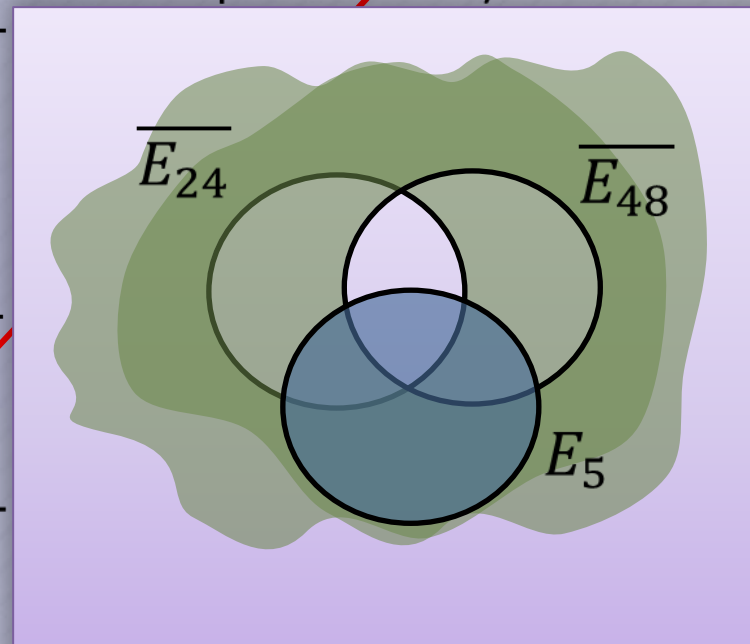
$$\overline{E_{25} \cdot E_{53}} + E_{25} \cdot E_A + E_5 = \overline{E_{25}}$$

$$\overline{E_{25}} + \overline{E_{53}} + E_A + E_5 =$$

$$\overline{E_{16}} \cdot \overline{E_8} \cdot \overline{E_1} + \overline{E_{32}} \cdot \overline{E_{16}} \cdot \overline{E_4} \cdot \overline{E_1}$$

$$\overline{E_{16}} \cdot \overline{E_8} + \overline{E_{32}} \cdot \overline{E_{16}} + E_A + E_4 +$$

$$\overline{E_{24}} + \overline{E_{48}} + E_A + E_5$$



Ответ: 24

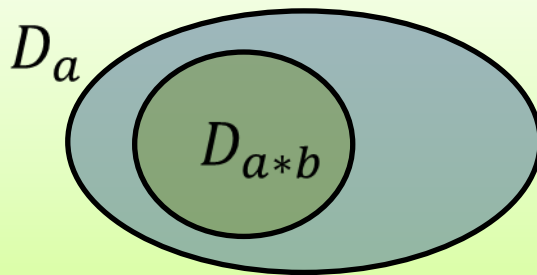
Задания на делимость

Если число делится на каждое из взаимно простых чисел, то оно делится и на их произведение.

Если число делится на произведение взаимно простых чисел, то оно делится и на каждое из них.

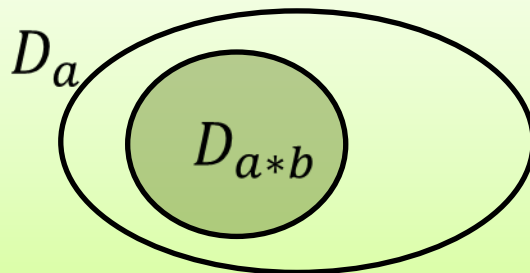
$$D_{a \cdot b} = D_a \cdot D_b \cdot D_{a \cdot b}$$

$$D_a + D_{a \cdot b} = D_a$$



$$\overline{D_a} \cdot \overline{D_{a \cdot b}} = \overline{D_a}$$

$$D_a \cdot D_{a \cdot b} = D_{a \cdot b}$$



$$\overline{D_a} + \overline{D_{a \cdot b}} = \overline{D_{a \cdot b}}$$

Задания на делимость

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого **наименьшего** натурального числа A формула

$$(\text{ДЕЛ}(x, 15) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 21)) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, 15))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

$$D_{15} \cdot \overline{D_{21}} \rightarrow (\overline{D_A} + \overline{D_{15}}) = \overline{D_{15} \cdot D_{21}} + (\overline{D_A} + \overline{D_{15}}) =$$

$$\overline{D_{15}} + \overline{D_{21}} + \overline{D_A} + \cancel{\overline{D_{15}}} = \overline{D_{3 \cdot 5}} + \overline{D_{3 \cdot 7}} + \overline{D_A} =$$

$$\overline{D_3} \cdot \overline{D_5} + \overline{D_3} \cdot \overline{D_7} + \overline{D_A} =$$

$$\overline{D_3} + \overline{D_5} + \cancel{\overline{D_3} \cdot \overline{D_7}} + \overline{D_A} = \overline{D_3} + \overline{D_5} + \overline{D_7} + \overline{D_A}$$

Ответ: 7

Задания на делимость

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого **наибольшего** натурального числа A формула

$$(\text{ДЕЛ}(x, 40) \vee \text{ДЕЛ}(x, 32)) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, A)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

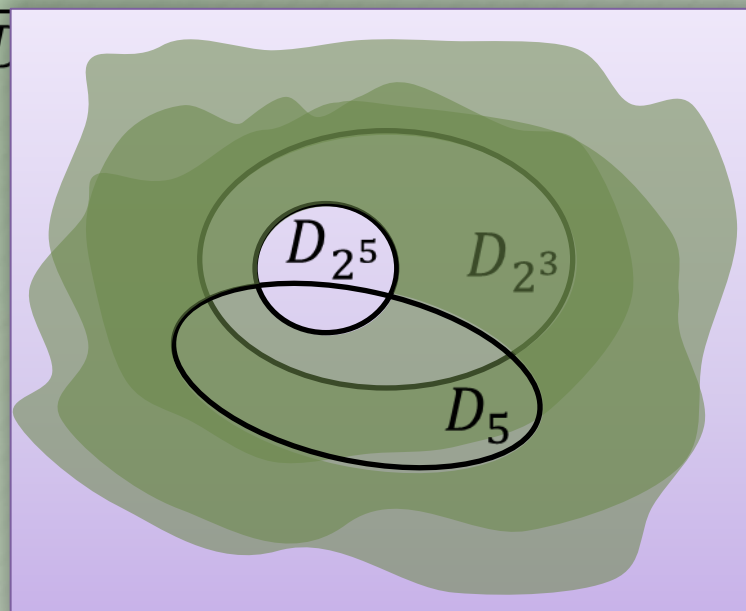
$$(D_{40} + D_{32}) \rightarrow D_A = \overline{D_{5 \cdot 2^3}} + \overline{D_{2^5}} + D_A = \overline{D_{5 \cdot 2^3}} \cdot \overline{D_{2^5}} + D_A =$$

$$\overline{D_5} \cdot \overline{D_{2^3}} \cdot \overline{D_{2^5}} + D_A = (\overline{D_5} + \overline{D_{2^3}} + \overline{D_{2^5}}) \cdot \overline{D_{2^3}} \cdot \overline{D_{2^5}} + D_A =$$

$$\overline{D_5} \cdot \overline{D_{2^5}} + \overline{D_{2^3}} \cdot \overline{D_{2^5}} + D_A =$$

$$\overline{D_5} \cdot \overline{D_{2^5}} + \overline{D_{2^3}} + D_A$$

Ответ: 8



Задания на делимость

Обозначим через ДЕЛ(n , m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого **наименьшего** натурального числа A формула

$$\text{ДЕЛ}(x, 2520) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, 5940) \vee (\neg \text{ДЕЛ}(x, A))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

$$D_{2520} + \overline{D_{5940}} + \overline{D_A} =$$

$$= D_{2^3} \cdot D_{3^2} \cdot D_5 \cdot D_7 + \overline{D_{2^2} \cdot D_{3^3} \cdot D_5 \cdot D_{11}} + \overline{D_A} =$$

$$= \cancel{D_{2^3} \cdot D_{3^2} \cdot D_5 \cdot D_7} + \overline{D_{2^2}} + \overline{D_{3^3}} + \overline{D_5} + \overline{D_{11}} + \overline{D_A}$$

$$= D_{2^3} \cdot D_7 + \overline{D_{5940}} + \overline{D_A} = D_{56} + \overline{D_{5940}} + \overline{D_A}$$

Ответ: 56

Отношение больше-меньше

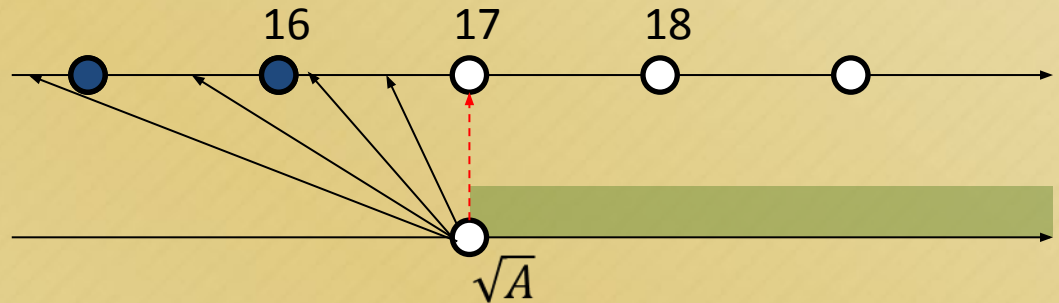
Сколько существует целых значений A , при которых формула

$$((x \geq 17) \rightarrow (x^2 > A)) \wedge ((y^2 > A) \rightarrow (y > 10))$$

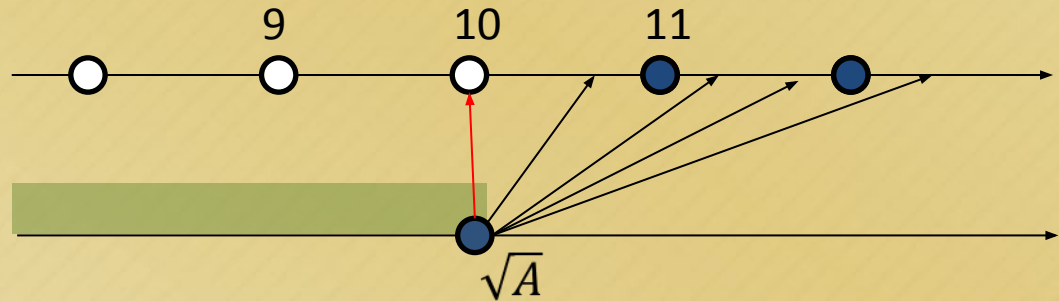
тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных x и y)?

$$\begin{cases} (x \geq 17) \rightarrow (x^2 > A) = 1 & 100 \leq A \leq 288 \\ (y^2 > A) \rightarrow (y > 10) = 1 & 288 - 100 + 1 = 189 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x \geq 17) \rightarrow (x^2 > A) \\ (x < 17) + (|x| > \sqrt{A}) \\ (x < 17) + (x > \sqrt{A}) \\ \sqrt{A} < 17 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (y^2 > A) \rightarrow (y > 10) = 1 \\ (y^2 \leq A) + (y > 10) = 1 \\ (y \leq \sqrt{A}) + (y > 10) = 1 \\ \sqrt{A} \geq 10 \end{aligned}$$



Ответ: 189

Список литературы

- Е.А. Мирончик. Метод отображения — видимая часть айсберга // Информатика, № 10, 2019, с. 43-52.
- Е.А. Мирончик. Графы и системы логических уравнений // Информатика, № 8, 2016, с. 35-39.
- Е.А. Мирончик. Люблю ЕГЭ за В15, или Ещё раз про метод отображения // Информатика, № 8, 2014, с. 26-32.
- Е.А. Мирончик. Метод отображения // Информатика, № 10, 2013, с. 18-26.
- Е.А. Мирончик. Алгебра предикатов и построение геометрических моделей на ЕГЭ по информатике // Информатика, № 3, 2019, с. 40-47.



<https://vk.com/club180658320>