

09.11.20.

Тема:

Логарифмические уравнения
и неравенства.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:

<https://infourok.ru/videouroki/1227>

<https://infourok.ru/videouroki/1228>

Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

Логарифмические уравнения

Решить уравнение

$$\log_2 (x + 1) + \log_2 (x + 3) = 3. \quad (1)$$

Предположим, что x — такое число, при котором равенство (1) является верным, т. е. x — корень уравнения (1).

Тогда по свойству логарифма верно равенство

$$\log_2 ((x + 1) (x + 3)) = 3. \quad (2)$$

Из этого равенства по определению логарифма получаем

$$(x + 1) (x + 3) = 8, \quad (3)$$

$x^2 + 4x + 3 = 8$, т. е. $x^2 + 4x - 5 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -5$.

Так как уравнение (3) является следствием исходного уравнения, то необходима проверка. Проверим, являются ли числа 1 и -5 корнями уравнения (1). Подставляя в левую часть исходного уравнения $x = 1$, получаем $\log_2 (1 + 1) + \log_2 (1 + 3) = \log_2 2 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3$, т. е. $x = 1$ — корень уравнения (1).

При $x = -5$ числа $x + 1$ и $x + 3$ отрицательны, и поэтому левая часть уравнения (1) не имеет смысла, т. е. $x = -5$ не является корнем этого уравнения.

Ответ

$x = 1$. ◁

Замечание. Решение уравнения (1) можно заменить решением равносильной ему системы

$$\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x + 3 > 0, \\ \log_2((x + 1)(x + 3)) = 3. \end{cases}$$

Задача 2 Решить уравнение $\log_2(1 - x) = 3 - \log_2(3 - x)$.

▶ Перенесём логарифм из правой части в левую:

$$\log_2(1 - x) + \log_2(3 - x) = 3,$$

откуда

$$\begin{aligned} \log_2((1 - x)(3 - x)) &= 3, \\ (1 - x)(3 - x) &= 8. \end{aligned}$$

Решая это уравнение, получаем $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. Число $x_1 = 5$ не является корнем исходного уравнения, так как при $x = 5$ левая и правая части уравнения теряют смысл. Проверка показывает, что число $x = -1$ является корнем исходного уравнения.

Ответ

$x = -1$. ◁

Задача 3 Решить уравнение

$$\lg(2x^2 - 4x + 12) = \lg x + \lg(x + 3).$$

▶ По свойству логарифмов

$$\lg(2x^2 - 4x + 12) = \lg(x^2 + 3x),$$

откуда (по теореме § 18) $2x^2 - 4x + 12 = x^2 + 3x$, $x^2 - 7x + 12 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. Проверка показывает, что оба значения x являются корнями исходного уравнения.

Ответ

$x_1 = 3$, $x_2 = 4$. ◁

Задача 4 Решить уравнение $\log_7(3x + 4) = \log_7(5x + 8)$.

▶ Приравняв выражения, стоящие под знаком логарифма, получаем $3x + 4 = 5x + 8$, откуда $x = -2$. левая и правая части исходного уравнения не имеют смысла.

Ответ

Корней нет. ◁

Логарифмические неравенства

При изучении логарифмической функции рассматривались неравенства вида $\log_a x < b$ и $\log_a x \geq b$. Приведём примеры решения более сложных логарифмических неравенств. Обычный способ реше-

ния таких неравенств заключается в переходе от них к более простому неравенству или системе неравенств, имеющей то же самое множество решений, т. е. к равносильному неравенству или к равносильной системе неравенств.

Задача 1 Решить неравенство

$$\lg(x + 1) \leq 2. \quad (1)$$

- ▶ Правая часть данного неравенства имеет смысл при всех значениях x , а левая часть — при $x + 1 > 0$, откуда $x > -1$, т. е. $x > -1$ — область определения неравенства (1).

Исходное неравенство запишем так:

$$\lg(x + 1) \leq \lg 100. \quad (2)$$

Так как $10 > 1$, то $x + 1 \leq 100$, откуда $x \leq 99$. Учитывая область определения исходного неравенства, получаем $-1 < x \leq 99$. ◀

Задача 2 Решить неравенство

$$\log_2(x - 3) + \log_2(x - 2) \leq 1. \quad (3)$$

- ▶ Логарифмическая функция определена при положительных значениях аргумента, поэтому левая часть неравенства имеет смысл при $x - 3 > 0$ и $x - 2 > 0$.

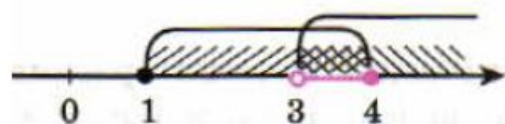
Следовательно, областью определения этого неравенства является промежуток $(3; +\infty)$. По свойствам логарифма неравенство (3) при $x > 3$ равносильно неравенству

$$\log_2(x - 3)(x - 2) \leq \log_2 2. \quad (4)$$

Логарифмическая функция с основанием 2 возрастающая. Поэтому при $x > 3$ неравенство (4) выполняется, если $(x - 3)(x - 2) \leq 2$.

Таким образом, исходное неравенство (3) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3)(x - 2) \leq 2, \\ x > 3. \end{cases}$$



Решая первое неравенство этой системы, получаем $x^2 - 5x + 4 \leq 0$, откуда $1 \leq x \leq 4$. Совмещая отрезок $[1; 4]$ с промежутком $(3; +\infty)$, получаем $3 < x \leq 4$ (рис. 43). \triangleleft

Практическая часть.

Решить уравнение

337

1) $\log_2 (x - 5) + \log_2 (x + 2) = 3;$

2) $\log_3 (x - 2) + \log_3 (x + 6) = 2;$

3) $\lg (x + \sqrt{3}) + \lg (x - \sqrt{3}) = 0;$

338

1) $\lg (x - 1) - \lg (2x - 11) = \lg 2;$

2) $\lg (3x - 1) - \lg (x + 5) = \lg 5;$

339

1) $\frac{1}{2} \lg (x^2 + x - 5) = \lg (5x) + \lg \frac{1}{5x};$

Решить неравенство

355

1) $\log_3 (x + 2) < 3;$

2) $\log_8 (4 - 2x) \geq 2;$

356

1) $\lg x > \lg 8 + 1;$

2) $\lg x > 2 - \lg 4;$