



**РГСУ**

**Математика**

*Линейная алгебра.  
Определители*

# Определитель квадратной матрицы.

## Определение

Каждой квадратной матрице  $A$  порядка  $n$  (где  $n \geq 1$ ) ставится в соответствие число, называемое определителем матрицы  $A$ , обозначаемое  $|A|$ , вычисляемое по правилу:

$$|a_{11}| = a_{11};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

и так далее:

# Определитель квадратной матрицы.

## Определение

---

Предположим, что нами уже введено понятие определителя порядка  $(n-1)$ , соответствующего квадратной матрице  $(n-1)$ -го порядка.

**Определение.** Минором  $M_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$  порядка  $n$  называется определитель  $(n-1)$ -го порядка, получающийся из матрицы  $A$  вычеркиванием  $i$ -той строки и  $j$ -го столбца.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

# Определитель квадратной матрицы

- Определитель  $n$ -го порядка:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxtimes & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \boxtimes & a_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{n1} & a_{n2} & \boxtimes & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n} = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j}M_{1j}$$

$$\det A = |A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j}M_{1j}$$

Эта формула называется разложением определителя  $n$ -го порядка по **первой строке**.

# Определитель квадратной матрицы

**Пример 1.** Вычисление определителя путем разложения по элементам 1-ой строки.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= -3 \cdot \left( (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \right) = -3 \cdot (-18 + 56) = -114$$

# Определитель квадратной матрицы

---

**Теорема.** Определитель может быть вычислен разложением по элементам его любой строки или столбца.

*Разложение определителя*

*по  $i$ -той строке:*

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} \dots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in} = \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}. \end{aligned}$$

*Разложение определителя*

*по  $j$ -му столбцу:*

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} M_{2j} \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} M_{nj} = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}. \end{aligned}$$

# Определитель квадратной матрицы

## Пример 1 (продолжение)

Вычисление определителя путем разложения по элементам 3-й строки

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \left( (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \right) = 6 \cdot (9 - 28) = -114$$

Вычисление определителя путем разложения по элементам 4-го столбца

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot (9 - 28) = -114$$

## Свойства определителей

---

1. Определитель не меняется при замене в нем всех строк соответствующими (по номеру) столбцами, т.е.  $|A^T| = |A|$
2. Определитель равен нулю, если содержит нулевую строку или нулевой столбец.
3. Определитель равен нулю, если содержит две одинаковые строки или два одинаковых столбца.



# Свойства определителей

4. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

## Свойства определителей

---

5. Определитель **изменит знак** на противоположный, если в нем **поменять местами** любые две строки или два столбца (то есть применено элементарное преобразование первого типа).
6. Если **строку** (столбец) **определителя умножить на некоторое число** (то есть применено элементарное преобразование третьего типа), то **определитель умножится на это число**.

## Свойства определителей

7. Определитель не **изменится**, если в нем заменить строку суммой этой строки и некоторой другой, вспомогательной, предварительно умноженной на какое-либо число (то есть применено элементарное преобразование второго типа).
8. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей сомножителей. т.е.

$$|AB| = |A||B|.$$

# Применение свойств определителя для вычисления определителей

---

Пример 1. Вычислить определитель пятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

Решение.

# Применение свойств определителя для вычисления определителей

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = [\text{Вынесем общие множители 2, 4 и 5 столбцов}] = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = [\text{Вычтем из 2-го столбца 1-й столбец}]$$

$$= 20 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = [\text{Разложим по элементам 1-й строки}] = 20 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ \leftarrow \end{matrix} = 20 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

# Применение свойств определителя для вычисления определителей

$$[\text{Вынесем общий множитель 1-го столбца}] = -40 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = [\text{Разложим по элементам 1-го столбца}] = -40 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \leftarrow (-1)$$

$$= -40 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = [\text{Вынесем общий множитель 1-й строки}] = -80 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = [\text{Разложим по элементам 3-го столбца}]$$

$$= -80 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 640$$

# Применение свойств определителя для вычисления определителей

Пример 2. Вычислить определитель пятого порядка путем приведения к верхнетреугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение.

# Применение свойств определителя для вычисления определителей

Решение.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1)(3) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (5)(2) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-\frac{1}{3}) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$



# Свойства определителей

**Определение.** Алгебраическим дополнением элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$  порядка  $n$  называется число, равное

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Используя алгебраическое дополнение, метод вычисления определителя матрицы примет вид:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

# Обратная матрица

---

**Определение.** Квадратная матрица порядка  $n$ , обозначаемая  $A^{-1}$ , называется **обратной** для квадратной матрицы  $A$  порядка  $n$ , если выполняются равенства:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

$E$  — единичная матрица

# Обратная матрица

**Определение.** Матрица называется **невырожденной**, если определитель этой матрицы отличен от нуля:  $|A| \neq 0$ ,  
в противном случае матрица называется **вырожденной**.

**Теорема.** Если матрица  $A$  имеет обратную, то эта матрица является невырожденной:  $|A| \neq 0$ .  
 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

# Методы вычисления обратной матрицы

**Теорема.** Всякая невырожденная матрица имеет обратную,

причем

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \boxtimes & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \boxtimes & A_{n2} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ A_{1n} & A_{2n} & \boxtimes & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где  $A_{ij}$  – алгебраическое дополнения элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$ .

## Пример вычисления обратной матрицы

**Пример.** Найти матрицу, обратную данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 4 - 9 - 3 - 6 + 10 = 1$$

# Пример вычисления обратной матрицы

Найдем алгебраические дополнения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{32} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Тогда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & -5 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

# Методы вычисления обратной матрицы

## Обратная матрица для матрицы 2-го порядка

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad |A| \neq 0 \quad \longrightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad |A| = 15 + 6 = 21 \quad \longrightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

# Методы вычисления обратной матрицы

## Метод Жордана-Гаусса вычисления обратной матрицы (метод присоединенной матрицы)

Дана матрица  $A$ . Составим расширенную матрицу  $(A|E)$ , приписав после матрицы  $A$  за вертикальной чертой единичную матрицу той же размерности.

Если с помощью элементарных преобразований удастся преобразовать полученную расширенную матрицу к виду, в котором слева будет находиться единичная матрица, то справа будет находиться обратная матрица  $A^{-1}$ , т.е.

$$(A|E) \rightarrow \dots \rightarrow (E|A^{-1}).$$



# Пример вычисления обратной матрицы

Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ . Найдем обратную матрицу по методу Жордана-Гаусса

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1)(-1) \\ \swarrow \\ \swarrow \end{array} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (-3) \\ \swarrow \end{array} \Rightarrow$$

## Пример вычисления обратной матрицы

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (-3) \\ \leftarrow \\ \end{array} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ (2)(3) \end{array} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 13 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ (-2) \\ (-1) \end{array} \Rightarrow$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

Следовательно, заключаем

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & -5 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

# Ранг матрицы. Определение

---

Рассмотрим матрицу  $A$  размерности  $m \times n$

Выберем  $k$  строк и  $k$  столбцов и из элементов, стоящих на пересечении этих строк и этих столбцов получим квадратную матрицу  $k$ -го порядка.

Определитель полученной матрицы называется *минором  $k$ -го порядка*.

**Рангом матрицы** называется натуральное число  $r$  такое, что

- 1) у матрицы  $A$  имеется минор  $r$ -го порядка, отличный от нуля;
- 2) Всякий минор матрицы  $A$  порядка  $(r+1)$  и выше равен нулю.