РГСУ

Математика

Линейная алгебра. Определители

Определитель квадратной матрицы. Определение

Каждой квадратной матрице A порядка n (где $n \geq 1$) ставится в соответствие число, называемое *определителем матрицы* A, обозначаемое $|A|$, вычисляемое по правилу:

$$\left|a_{11}\right| = a_{11};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

- и так далее:

Определитель квадратной матрицы. Определение

- Предположим, что нами уже введено понятие определителя порядка (n-1), соответствующего квадратной матрице (n-1)-го порядка.

Определение. **Минором** M_{ij} элемента a_{ij} матрицы А порядка n называется определитель (n-1)-го порядка, получающийся из матрицы А вычеркиванием i-той строки и j-го столбца.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определитель квадратной матрицы

- Определитель n -го порядка:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n}M_{1n} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}M_{1j}$$

$$\det A = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}M_{1j}$$

Эта формула называется разложением определителя n -го порядка по первой строке.

Определитель квадратной матрицы

Пример 1. Вычисление определителя путем разложения по элементам 1-ой строки.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot \left((-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \right) = -3 \cdot (-18 + 56) = -114$$

Определитель квадратной матрицы

Теорема. **Определитель может быть вычислен разложением по элементам его л ю б о й строки или столбца.**

Разложение определителя по i-той строке:

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2}M_{i2} \ldots + (-1)^{i+n} a_{in}M_{in} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}M_{ij}.$$

Разложение определителя по j-му столбцу:

$$|A| = (-1)^{1+j} a_{1j}M_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j}M_{2j} \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj}M_{nj} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}M_{ij}.$$

Определитель квадратной матрицы

Пример 1 (продолжение)

Вычисление определителя путем разложения по элементам 3-й строки

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot\left((-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}\right) = 6\cdot(9-28) = -114$$

Вычисление определителя путем разложения по элементам 4-го столбца

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -3\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 6\cdot(9-28) = -114$$

Свойства определителей

1. Определитель не меняется при замене в нем всех строк соответствующими (по номеру) столбцами, т.е. $\left|A^T\right| = \left|A\right|$

2. Определитель равен нулю, если содержит нулевую строку или нулевой столбец.

3. Определитель равен нулю, если содержит две одинаковые строки или два одинаковых столбца.

Свойства определителей

4. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Свойства определителей

5. Определитель изменит знак на противоположный, если в нем поменять местами любые две строки или два столбца (то есть применено элементарное преобразование первого типа).

6. Если строку (столбец) определителя умножить на некоторое число (то есть применено элементарное преобразование третьего типа), то определитель умножится на это число.

Свойства определителей

7. Определитель не изменится, если в нем заменить строку суммой этой строки и некоторой другой, вспомогательной, предварительно умноженной на какое-либо число (то есть применено элементарное преобразование второго типа).

8. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей сомножителей. т.е.

$$|AB| = |A||B|.$$

Применение свойств определителя для вычисления определителей

Пример 1. Вычислить определитель пятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

Решение.

Применение свойств определителя для вычисления определителей

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \left[\text{Вынесем общие множители } 2, 4 \text{ и } 5 \text{ столбцов}\right] = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \left[\text{Вычтем из } 2-\text{го столбца } 1-\text{й столбец}\right]$$

$$= 20 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \left[\text{Разложим по элементам } 1-\text{й строки}\right] = 20 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ \hookleftarrow \\ \\ \\ \end{matrix} = 20 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

Применение свойств определителя для вычисления определителей

$$\left[\textit{Вынесем общий множитель } 1-\textit{го столбца}\right] = -40\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \left[\textit{Разложим по элементам } 1-\textit{го столбца}\right] = -40\cdot\begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \leftarrow \\ (-1) \end{matrix}$$

$$= -40\cdot\begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \left[\textit{Вынесем общий множитель } 1-\textit{й строки}\right] = -80\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \left[\textit{Разложим по элементам } 3-\textit{го столбца}\right]$$

$$= -80\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 640$$

Применение свойств определителя для вычисления определителей

Пример 2. Вычислить определитель пятого порядка путем приведения к верхнетреугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение.

Применение свойств определителя для вычисления определителей

Решение.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} (-2) \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ (-1)(3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (5)(2) \\ \\ \\ \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ (-1/3) \\ \\ \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Свойства определителей

Определение. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A порядка n называется число, равное

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Используя алгебраическое дополнение, метод вычисления определителя матрицы примет вид:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Обратная матрица

Определение. Квадратная матрица порядка n, обозначаемая A^{-1}, называется обратной для квадратной матрицы A порядка n, если выполняются равенства:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

E — единичная матрица

Обратная матрица

Определение. Матрица называется невырожденной, если определитель этой матрицы отличен от нуля: $|A| \neq 0,$

в противном случае матрица называется вырожденной.

Теорема. Если матрица A имеет обратную, то эта матрица является невырожденной: $|A| \neq 0.$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Методы вычисления обратной матрицы

Теорема. Всякая невырожденная матрица имеет обратную, причем

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнения элемента a_{ij} матрицы A.

Пример вычисления обратной матрицы

Пример. Найти матрицу, обратную данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 4 - 9 - 3 - 6 + 10 = 1$$

Пример вычисления обратной матрицы

Найдем алгебраические дополнения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{32} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Тогда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & -5 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Методы вычисления обратной матрицы

Обратная матрица для матрицы 2-го порядка

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad |A| \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad |A| = 15 + 6 = 21 \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Методы вычисления обратной матрицы

Метод Жордана-Гаусса вычисления обратной матрицы (метод присоединенной матрицы)

Дана матрица A. Составим расширенную матрицу $(A|E)$, приписав после матрицы А за вертикальной чертой единичную матрицу той же размерности.

Если с помощью элементарных преобразований удастся преобразовать полученную расширенную матрицу к виду, в котором слева будет находиться единичная матрица, то справа будет находиться обратная матрица A^{-1}, т.е.

$$(A|E) \to \ldots \to (E|A^{-1}).$$

Пример вычисления обратной матрицы

Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$. Найдем обратную матрицу по методу Жордана-Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}(1)\,(-1)\\ \hookleftarrow\\ \quad\;\hookleftarrow\end{array}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ (-3)\Rightarrow\\ \hookleftarrow\end{array}$$

Пример вычисления обратной матрицы

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)(-3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -3 \end{array}\right)(2)(3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 13 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -3 \end{array}\right)(-1) \quad (-2) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Следовательно, заключаем

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & -5 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы. Определение

Рассмотрим матрицу А размерности $m \times n$

Выберем k строк и k столбцов и из элементов, стоящих на пересечении этих строк и этих столбцов получим квадратную матрицу k-го порядка.

Определитель полученной матрицы называется *минором k-го порядка*.

Рангом матрицы называется натуральное число $\boldsymbol{r}$ такое, что

1) у матрицы А имеется минор $\boldsymbol{r}$ -го порядка, отличный от нуля;

2) Всякий минор матрицы А порядка ($\boldsymbol{r}$+1) и выше равен нулю.