Учебный процесс

I полугодие 2018-2019

Теоретическое обучение: 01.09 – 31.12
Зачётная неделя: 24.12 – 29.12
Экзаменационная сессия: 09.01 – 19.01

БРС
Контрольный срез 1: 22.10 – 27.10
Контрольный срез 2: 26.11 – 01.12
Рубежный срез: 24.12 – 29.12

Т

ЛЕКЦИЯ 1

Предмет «Математический анализ»

Вещественные числа

План лекции

- **Немного из истории**

I. Предмет «Математический анализ»

II. Вещественные числа

1. **Обозначения и символика**
2. **Топология в R_1 и R_2**
3. **Абсолютная величина числа**
4. **Бином Ньютона**
5. **Метод математической индукции**

III. Элементы теории множеств

1. **Множества**
2. **Мощность множеств**
3. **Множества на числовой прямой**

Немного из истории

Школа Вейерштрасса
теория действительных (вещественных)
чисел как бесконечных десятичных дробей

Школа Кантора
теория действительных (вещественных)
чисел как сечение в множестве рациональных чисел,
завершающаяся сечением в множестве действительных
чисел

Школа Дедекинда
теория действительных (вещественных)
как теория фундаментальных
последовательностей рациональных чисел

продолжение

Карл Теодор Вейерштрасс

1815 – 1897

немецкий математик

Боннский университет

(специального высшего образования не имел)

продолжение

Георг Кантор

1845 – 1918

немецкий математик

Берлинский университет

продолжение

Рихард Юлиус Дедекинд

1831 – 1916

немецкий математик

Геттинский университет

I. Предмет «Математический анализ»

Три части

Теория пределов

Дифференциальное исчисление

Интегральное исчисление

Три операции

Предельный переход

(вычисление пределов)

Дифференцирование

(нахождение дифференциала, производной)

Интегрирование

(нахождение интеграла)

продолжение

Математический анализ

(анализ бесконечно малых величин)

Анализ и исследование функций

Действительные (вещественные) числа

Теория пределов

Дифференциальное и интегральное исчисления функции одной и нескольких переменных

Ряды

Теория поля

II. Вещественные числа

1. Обозначения и символика

<u>*Обозначения*</u>

N – множество натуральных чисел

Z – множество целых чисел

Q – множество рациональных чисел

I – множество иррациональных чисел

R – множество вещественных чисел

продолжение

-

R – множество вещественных чисел

Схема 1

(множество вещественных чисел)

Схема 2

(множество алгебраических + трансцендентных чисел)

Символика (логические кванторы или символы)

- $\exists$ – существует

  $\nexists$ – не существует

  $\forall$ – любой, каждый, всякий

  $\Leftrightarrow$ – равносильность высказываний

  $\Rightarrow$ – следует

  def – справедливо по определению

  $\{\quad\}$ – множество

2. Топология в $\boldsymbol{R_1}$ и $\boldsymbol{R_2}$

- R_1 – координатная прямая

$$M_1(x_1),\, M_2(x_2)$$

$$\rho((M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$$

R_2 – координатная плоскость

$$M_1(x_1, y_1),\, M_2(x_2, y_2)$$

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

3. Абсолютная величина числа

- a – действительное число

$$|a| = \begin{cases} a, a > 0 \\ 0, \quad a = 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$$

Основные свойства

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

продолжение

- *<u>Основные неравенства</u>*

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

(неравенство треугольника)

$$|a-b| \geq |a| - |b|$$

$$|a| - |b| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$$

4. Бином Ньютона

- $$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$$

$$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot b^2$$

$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot b^3$$

. . . .

продолжение

- ***Треугольник Паскаля***

								1								
							1		0		1					
						1		0	2	0		1				
			1		0		3		0		3		0		1	
1		0		4		0		6		0		4		0		1

. . . .

5. Метод математической индукции

- Пусть имеет место некоторое утверждение.

<u>Принцип метода математической индукции</u>

1) Утверждение справедливо при $n = 1$.
2) Из справедливости этого утверждения для какого-либо $\forall$ натурального $n = k$ его справедливость при $n = k + 1$.

III. Элементы теории множеств

- **1. Множества**

<u>Символика</u>

X, Y, Z – множества

x, y, z – элементы множества

$\emptyset$ – пустое множество

$\subset$ – знак включения

$\bigcup$ – знак объединения

$\cap$ – знак пересечения

$/$ – знак разности

<u>Виды множеств</u>

Пустое

Конечное

Бесконечное

продолжение

- *<u>Взаимосвязь множеств</u>*

1) $X \subset Y$ и $X \neq Y$

X – подмножество (правильная часть множества)

2) $X \subset Y$ и $Y \subset X$

$X = Y$ – множества равны

3) $X \subset X$

X – множество есть подмножество самого множества

продолжение

- <u>*Операции над множествами*</u>

Определение (объединение множеств)

X Y

Z

элементы которого принадлежат хотя одному из множеств X или Y

$$Z = X \cup Y$$

Обобщение. Объединение n множеств:

$$Z = \bigcup_{i=1}^{i=n} X_i$$

продолжение

- ***Определение*** (пересечение множеств)

X Y

Z

элементы которого принадлежат как X так и Y

$$Z = X \cap Y$$

Обобщение. Пересечение n множеств:

$$Z = \cap_{i=1}^{i=n} X_i$$

продолжение

- ***Определение*** (разность множеств)

X Y

Z

принадлежащих X и непринадлежащих Y

$$Z = X / Y$$

продолжение

- **2. Мощность множеств**

X_1 и X_2 – конечные множества
n_1 – число элементов X_1
n_2 – число элементов X_1

$$n_1 < n_2 \qquad n_1 = n_2 \qquad n_1 > n_2$$

X_1 и X_2 – бесконечные множества

Определение
(эквивалентные или имеющие равную мощность)

$$X_1 \qquad X_2$$

$$X_1 \sim X_2$$

продолжение

- Бесконечные множества: счетные и несчетные

Определение (счетное множество)

$$X$$

$$X \sim N$$

Определение (множество континуум)

$$X$$

$$X \sim [0,1]$$

продолжение

-

Теорема. Множество всех точек сегмента $[0,1]$ несчетно

Замечание. Множество континуум (множество R)

продолжение

- **3. Множества на числовой прямой**

$(-\infty, +\infty)$ –

$(-\infty, a), (a, +\infty), \ [a, +\infty), (-\infty, a]$ –

$(-\infty, 0), (0, +\infty), \ [0, +\infty), (-\infty, 0]$ –

$[a, b]$ –

(a, b) –

$[a, b), (a, b]$ –

a –

продолжение

-

<u>Ограниченные множества</u>

Определение (ограниченное сверху множество)

$$\{X\} \subset R$$

$$\exists \; M: \forall x \in X$$

$$x \leq M$$

продолжение

-

Определение (ограниченное снизу множество)

$$\{X\} \subset R$$

$$\exists \ m: \forall x \in X$$

$$x \geq m$$

продолжение

-

Определение
(ограниченное сверху и снизу множество)

$$\{X\} \subset R$$

$$\exists\ m, M : \forall x \in X$$

$$m \leq x \leq M$$

продолжение

- ***Точные грани ограниченных числовых множеств***

Определение (точная верхняя грань)

$$M = min\{M_1, M_2, \ldots\}$$

$$M = sup\{X\}$$

Определение (точная нижняя грань)

$$m = max\{m_1, m_2, \ldots\}$$

$$\mathrm{m} = inf\{X\}$$