Решение задачи диффузии

Уравнение диффузии представляет собой частный вид дифференциального уравнения в частных производных. Бывает нестационарным и стационарным.

Уравнение диффузии описывает

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (1)$$

К ОДУ могут быть приложены различные граничные условия

$P(x,0)=P_{исх}$

$P(0,t)=P_{B1}$ или $\frac{\partial P}{\partial x}(0,t)=0$ (2)

$P(L,t)=P_{B2}$ или $\frac{\partial P}{\partial x}(L,t)=0$

- Граничные условия могут быть
  - Поток пропорционален градиенту давления
  - Дирихле (постоянное давление)
  - Неймана (постоянный поток)

Уравнение диффузии

- Уравнение диффузии в смысле интерпретации при решении уравнения диффузии речь идет о нахождении зависимости концентрации вещества (или иных объектов) от пространственных координат и времени, причем задан коэффициент (в общем случае также зависящий от пространственных координат и времени), характеризующий проницаемость среды для диффузии. При решении уравнения теплопроводности речь идет о нахождении зависимости температуры среды от пространственных координат и времени, причем задана теплоёмкость и теплопроводность среды (также в общем случае неоднородной).

Уравнение обычно записывается так:

$$\frac{\partial\varphi(r,t)}{\partial t} = \nabla[D(\varphi,r)\nabla\varphi(r,t)], (3)$$

где $\varphi\,(r,t)$— плотность диффундирующего вещества в точке r и во время t и (φ,r)— обобщённый коэффициент

Граничные условия Дирихле и Неймана

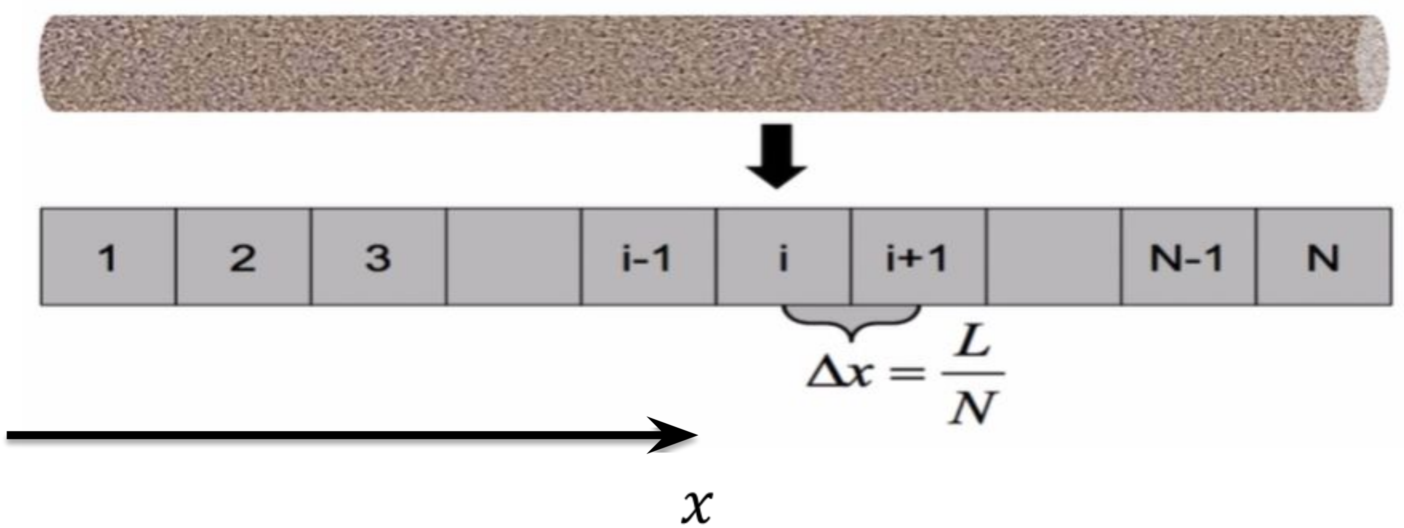
Условие Дирихле, применённое к обыкновенным дифференциальным уравнениям или к дифференциальным уравнениям в частных производных, определяет поведение системы на границе области.

В дифференциальных уравнениях краевая задача Неймана с заданными граничными условиями для производной искомой функции на границе области — так называемые граничные условия второго рода.

Использования ряда Тейлора для производной

Для аппроксимации функции многочленами используем ряд Тейлора:

Производная	Конечно разностная аппроксимация	Тип	Ошибка
		Левая разность	
		Правая разность	
		Центральная разность	
		Центральная разность для второй производной	



- Каждый конечный элемент имеет конечный размер Δx_i. Хотя он может изменяться от конечный элемент к конечному элементу, пока мы будем считать $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_i = \Delta x$
- В каждом конечном элементе одинаковые постоянные свойства жидкости(μ, B_w) и постоянные свойства материала(k,φ)
- При центрально-разностной схеме мы производим решение дискретных давлений P_i, расположенных в центре каждого конечного элемента

Замена конечно разностной аппроксимации в каждом конечном элементе

Уравнение диффузии:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (4)$$

- Используем центральную разностную схему для пространства

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \approx \frac{P_{i-1} - 2P_i + P_{i+1}}{(\Delta x)^2} \quad (5)$$

Давление с индексом «i» зависит от давлений с соседними индексами «$i-1$» и «$i+1$»

Используем левую или правую разностную схему для времени

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} \qquad (6)$$

Изменение давления «i» от времени «n» до времени «n+1»

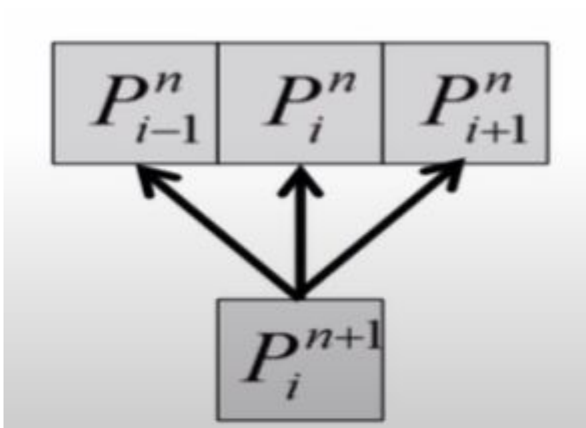
Сравнение явных и неявных методов

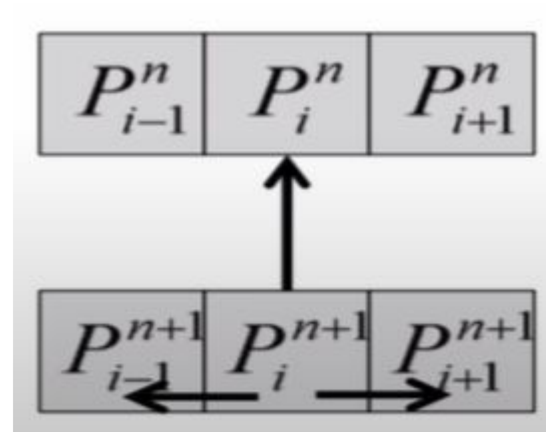
Явный метод

$$\frac{P_i^{n+1}-P_i^n}{\Delta t}\frac{1}{\alpha}=\frac{P_{i-1}^n-2P_i^n+P_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} \qquad (7)$$

Неявный метод

$$\frac{P_i^{n+1}-P_i^n}{\Delta t}\frac{1}{\alpha}=\frac{P_{i-1}^{n+1}-2P_i^{n+1}+P_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \qquad (8)$$





Давление на временном шаге «n+1» зависит только

Давление на временном шаге «n+1» зависит от неизвестных давлений на временном шаге «n+1»

Неявный метод

1	2	3		i-1	i	i+1		N-1	N

В неявном методе пространственные производные оцениваются на временном шаге «n+1»

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \rightarrow \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{P_{i-1}^{n+1} - 2P_i^{n+1} + P_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \qquad (9)$$

Перестановка и группировка дает:

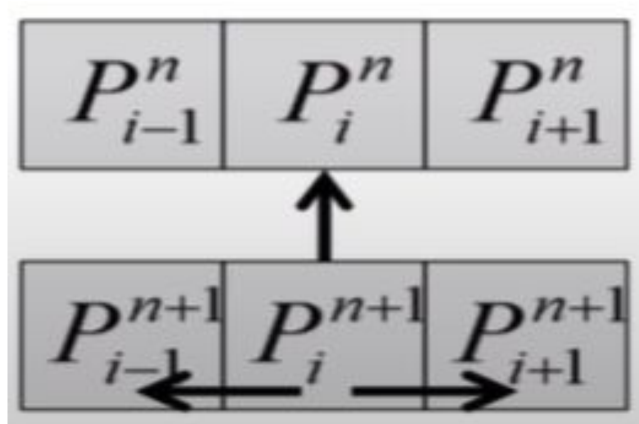
$$-\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} P_{i-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}\right) P_i^{n+1} - \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} P_{i+1}^{n+1} = P_i^n \qquad (10)$$

Неявный метод

- $\eta P_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\eta)\ P_i^{n+1} - \eta P_{i+1}^{n+1} = P_i^n$ (11)

Где $\eta = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$ безразмерная

Это означает, что давление конечного элемента «i» на следующем временном шаге «n+1» зависит от давлений на предыдущем и последующем шаге «i+1» и «i-1» также на временном шаге «n+1»



Нужно больше уравнений, потому что у нас есть три неизвестные и одно уравнение на конечный элемент сетки

Граничные условия

- Мы можем написать одно и тоже уравнение для всех конечных элементов от «i=1» до «i=N»

Конечный элемент №1 $-\eta\, P_0^{n+1} + (1+2\eta)\ P_1^{n+1} - \eta P_2^{n+1} = P_1^n$

Конечный элемент №2 $-\eta\, P_1^{n+1} + (1+2\eta)\ P_2^{n+1} - \eta P_3^{n+1} = P_2^n$

Конечный элемент №3 -$\eta\, P_2^{n+1} + (1+2\eta)\ P_3^{n+1} - \eta P_4^{n+1} = P_3^n$

$\vdots$ (12)

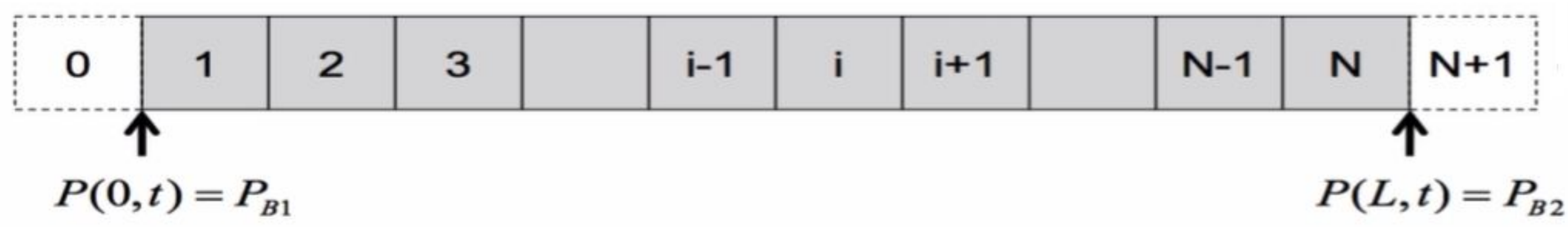
Конечный элемент №i -$\eta\, P_{i-1}^{n+1} + (1+2\eta)\ P_i^{n+1} - \eta P_{i+1}^{n+1} = P_i^n$

$\vdots$

Конечный элемент №N -$\eta\, P_{N-1}^{n+1} + (1+2\eta)\ P_N^{n+1} - \eta P_{N+1}^{n+1} = P_N^n$

Граничные условия могут быть использованы для устранения двух мнимых сеточных давлений и тогда мы оставляем N линейных уравнений и N неизвестных давлений

Граничные условия Дирихле



Приближительное давление края как среднее из двух соседних давлений сетки

$$P_{B1} = \frac{P_0 + P_1}{2} \rightarrow P_0 = 2\, P_{B1} - P_1 \qquad (13)$$

Конечный элемент №1

$$-\eta\, P_0^{n+1} + (1 + 2\eta)\, P_1^{n+1} - \eta P_2^{n+1} = P_1^n$$

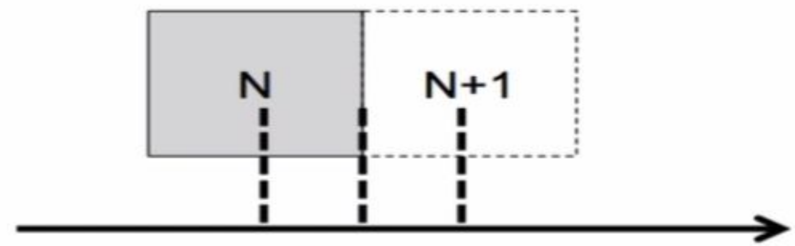
$$\downarrow$$

$$-\eta(2P_{B1} - P_1^{n+1}) + (1 + 2\eta)\, P_1^{n+1} - \eta\, P_0^{n+1} = P_1^n \qquad (14)$$

$$\downarrow$$

$$(1 + 3\eta)\, P_1^{n+1} - \eta\, P_2^{n+1} = P_1^n + 2\, \eta\, P_{B1}$$

Граничные условия Неймана



$$\frac{dP}{dx}(L,t)=0$$

Используем «технику отражения» на границе

$$\frac{\partial p}{\partial t} \approx \frac{P_N + P_{N+1}}{\Delta t} = 0 \rightarrow P_N = P_{N+1} \quad (15)$$

Конечный элемент №N

$$-\eta\, P_{N-1}^{n+1} + (1+2\eta)\, P_N^{n+1} - \eta P_{N+1}^{n+1} = P_N^n$$

$$\downarrow$$

$$-\eta\, P_{N-1}^{n+1} + (1+2\eta)\, P_N^{n+1} - \eta P_N^{n+1} = P_N^n \qquad (16)$$

$$\downarrow$$

$$-\eta\, P_{N-1}^{n+1} + (1+\eta)\, P_N^{n+1} = P_N^n$$

Граничные условия Неймана

$$
\begin{bmatrix}
1+3\eta & -\eta & 0 & \dots & 0 \\
-\eta & 1+2\eta & -\eta & 0 & \dots \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\dots & 0 & -\eta & 1+2\eta & -\eta \\
0 & \dots & 0 & -\eta & 1+\eta
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
P_1^{n+1} \\ \dots \\ P_i^{n+1} \\ \dots \\ P_N^{n+1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
P_1^{n} \\ \dots \\ P_i^{n} \\ \dots \\ P_N^{n}
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
2\eta P_{B1} \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0
\end{bmatrix}
\qquad (17)
$$

- Задача ОДУ была преобразована в линейную систему уравнений А$P^{n+1} = b$

- Матрица является симметричной и диагонально доминирующей

- Для решении системы уравнений «NxN» для каждого временного шага, нужен хороший решатель линейной системы уравнений