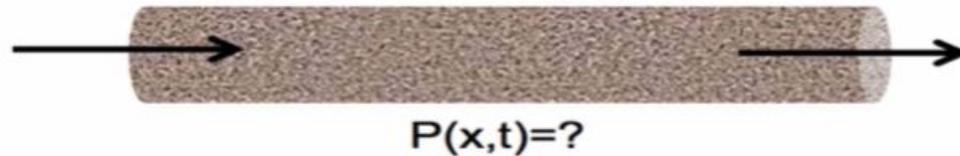


Решение задачи диффузии



Уравнение диффузии представляет собой частный вид дифференциального уравнения в частных производных. Бывает нестационарным и стационарным.

Уравнение диффузии описывает

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1)$$

К ОДУ могут быть приложены

различные граничные условия

$$P(x, 0) = P_{исх}$$

$$P(0, t) = P_{B1} \text{ или } \frac{\partial P}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (2)$$

$$P(L, t) = P_{B2} \text{ или } \frac{\partial P}{\partial x}(L, t) = 0$$

- Граничные условия могут быть
- Поток пропорционален градиенту давления
- Дирихле (постоянное давление)
- Неймана (постоянный поток)

Уравнение диффузии

• Уравнение диффузии в смысле интерпретации при решении уравнения диффузии речь идет о нахождении зависимости концентрации вещества (или иных объектов) от пространственных координат и времени, причем задан коэффициент (в общем случае также зависящий от пространственных координат и времени), характеризующий проницаемость среды для диффузии. При решении уравнения теплопроводности речь идет о нахождении зависимости температуры среды от пространственных координат и времени, причем задана теплоёмкость и теплопроводность среды (также в общем случае неоднородной).

Уравнение обычно записывается так:

$$\frac{\partial \varphi(r, t)}{\partial t} = \nabla [D(\varphi, r) \nabla \varphi(r, t)], \quad (3)$$

где $\varphi(r, t)$ — плотность диффундирующего вещества в точке r и во время t и $D(\varphi, r)$ — обобщенный коэффициент

Граничные условия Дирихле и Неймана

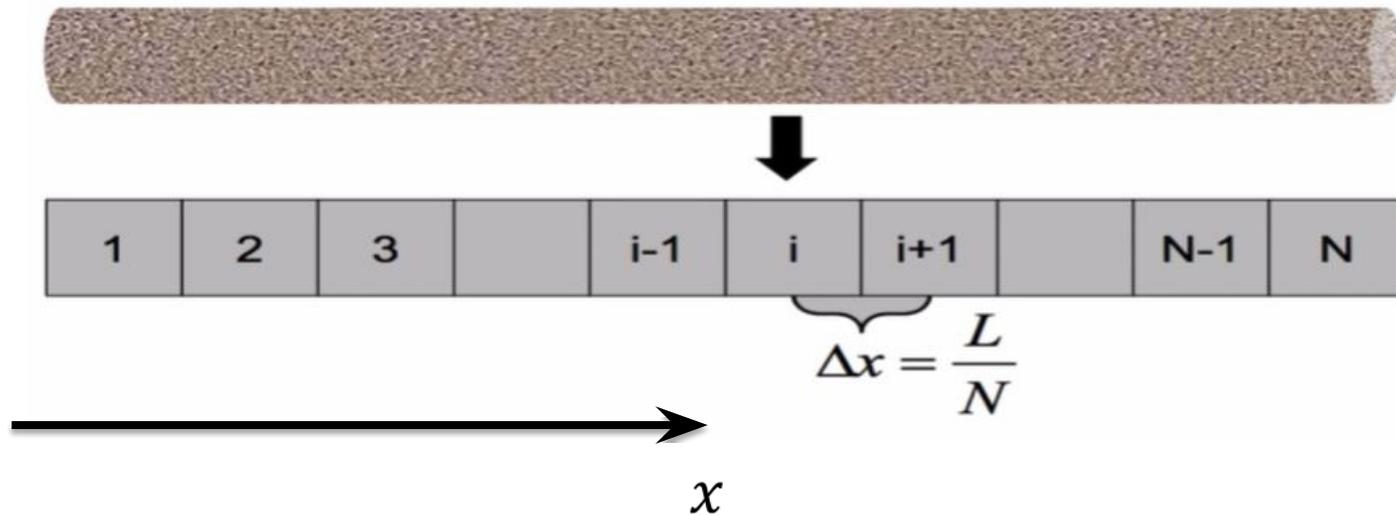
Условие Дирихле, применённое к обыкновенным дифференциальным уравнениям или к дифференциальным уравнениям в частных производных, определяет поведение системы на границе области.

В дифференциальных уравнениях краевая задача Неймана с заданными граничными условиями для производной искомой функции на границе области — так называемые граничные условия второго рода.

Использования ряда Тейлора для производной

Для аппроксимации функции многочленами используем ряд Тейлора:

Производная	Конечно разностная аппроксимация	Тип	Ошибка
		Левая разность	
		Правая разность	
		Центральная разность	
		Центральная разность для второй производной	



- Каждый конечный элемент имеет конечный размер Δx_i .
Хотя он может изменяться от конечный элемент к конечному элементу, пока мы будем считать $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_i = \Delta x$
- В каждом конечном элементе одинаковые постоянные свойства жидкости (μ, B_w) и постоянные свойства материала (k, φ)
- При центрально-разностной схеме мы производим решение дискретных давлений P_i , расположенных в центре каждого конечного элемента

Замена конечно разностной аппроксимации в каждом конечном элементе

Уравнение диффузии:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4)$$

- Используем центральную разностную схему для пространства

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \approx \frac{P_{i-1} - 2P_i + P_{i+1}}{(\Delta x)^2} \quad (5)$$

Давление с индексом « i » зависит от давлений с соседними индексами « $i - 1$ » и « $i + 1$ »

Используем левую или правую разностную схему для времени

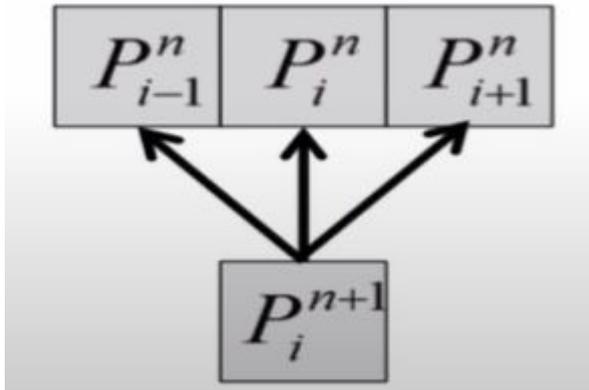
$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} \quad (6)$$

Изменение давления « i » от времени « n » до времени « $n+1$ »

Сравнение явных и неявных методов

ЯВНЫЙ МЕТОД

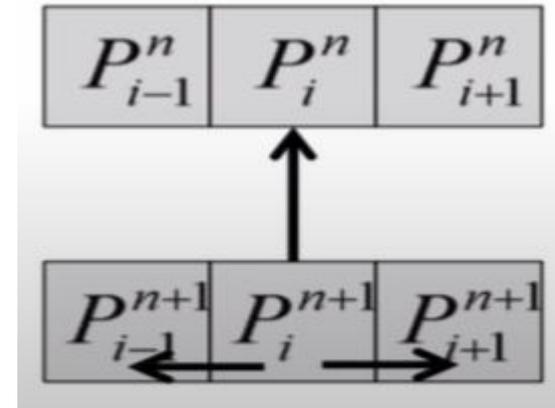
$$\frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} \frac{1}{\alpha} = \frac{P_{i-1}^n - 2P_i^n + P_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (7)$$



Давление на временном шаге «n+1» зависит только

Неявный метод

$$\frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} \frac{1}{\alpha} = \frac{P_{i-1}^{n+1} - 2P_i^{n+1} + P_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \quad (8)$$



Давление на временном шаге «n+1» зависит от неизвестных давлений на временном шаге «n+1»

Неявный метод



В неявном методе пространственные производные оцениваются на временном шаге «n+1»

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \rightarrow \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{P_{i-1}^{n+1} - 2P_i^{n+1} + P_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \quad (9)$$

Перестановка и группировка дает:

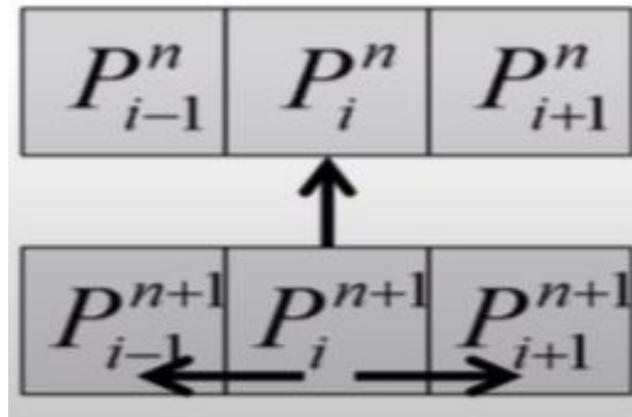
$$-\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} P_{i-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}\right) P_i^{n+1} - \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} P_{i+1}^{n+1} = P_i^n \quad (10)$$

Неявный метод

$$\eta P_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\eta) P_i^{n+1} - \eta P_{i+1}^{n+1} = P_i^n \quad (11)$$

Где $\eta = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$ безразмерная

Это означает, что давление конечного элемента «i» на следующем временном шаге «n+1» зависит от давлений на предыдущем и последующем шаге «i+1» и «i-1» также на временном шаге «n+1»



Нужно больше уравнений, потому что у нас есть три неизвестные и одно уравнение на конечный элемент сетки

Граничные условия

- Мы можем написать одно и тоже уравнение для всех конечных элементов от « $i=1$ » до « $i=N$ »

$$\text{Конечный элемент N}^\circ\text{1 } -\eta P_0^{n+1} + (1 + 2\eta) P_1^{n+1} - \eta P_2^{n+1} = P_1^n$$

$$\text{Конечный элемент N}^\circ\text{2 } -\eta P_1^{n+1} + (1 + 2\eta) P_2^{n+1} - \eta P_3^{n+1} = P_2^n$$

$$\text{Конечный элемент N}^\circ\text{3 } -\eta P_2^{n+1} + (1 + 2\eta) P_3^{n+1} - \eta P_4^{n+1} = P_3^n$$

⋮

$$\text{Конечный элемент N}^\circ\text{i } -\eta P_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\eta) P_i^{n+1} - \eta P_{i+1}^{n+1} = P_i^n$$

⋮

$$\text{Конечный элемент N}^\circ\text{N } -\eta P_{N-1}^{n+1} + (1 + 2\eta) P_N^{n+1} - \eta P_{N+1}^{n+1} = P_N^n$$

(12)

Граничные условия могут быть использованы для устранения двух мнимых сеточных давлений и тогда мы оставляем N линейных уравнений и N неизвестных давлений

Граничные условия Дирихле



Приблизительное давление края как среднее из двух соседних давлений сетки

$$P_{B1} = \frac{P_0 + P_1}{2} \rightarrow P_0 = 2 P_{B1} - P_1 \quad (13)$$

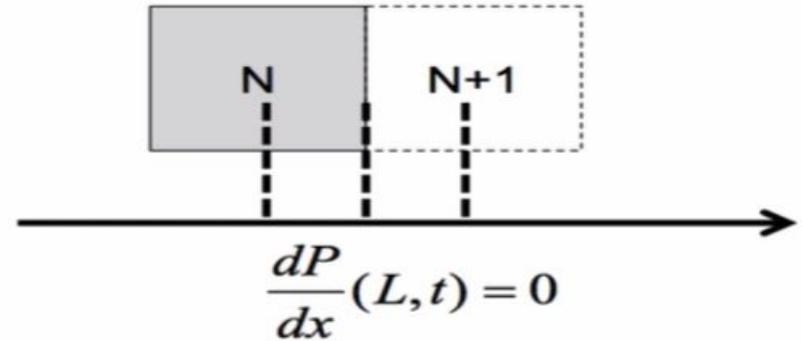
Конечный элемент №1

$$\begin{aligned}
 & -\eta P_0^{n+1} + (1 + 2\eta) P_1^{n+1} - \eta P_2^{n+1} = P_1^n \\
 & \quad \quad \quad \downarrow \\
 & -\eta(2P_{B1} - P_1^{n+1}) + (1 + 2\eta) P_1^{n+1} - \eta P_2^{n+1} = P_1^n \quad (14) \\
 & \quad \quad \quad \downarrow \\
 & (1 + 3\eta) P_1^{n+1} - \eta P_2^{n+1} = P_1^n + 2\eta P_{B1}
 \end{aligned}$$

Граничные условия Неймана

Используем «технику отражения» на границе

$$\frac{\partial p}{\partial t} \approx \frac{P_N + P_{N+1}}{\Delta t} = 0 \rightarrow P_N = P_{N+1} \quad (15)$$



Конечный элемент №N

$$-\eta P_{N-1}^{n+1} + (1 + 2\eta) P_N^{n+1} - \eta P_{N+1}^{n+1} = P_N^n$$

↓

$$-\eta P_{N-1}^{n+1} + (1 + 2\eta) P_N^{n+1} - \eta P_N^{n+1} = P_N^n \quad (16)$$

↓

$$-\eta P_{N-1}^{n+1} + (1 + \eta) P_N^{n+1} = P_N^n$$

Граничные условия Неймана

$$\begin{bmatrix} 1 + 3\eta & -\eta & 0 & \dots & 0 \\ -\eta & 1 + 2\eta & -\eta & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & 0 & -\eta & 1 + 2\eta & -\eta \\ 0 & \dots & 0 & -\eta & 1 + \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^{n+1} \\ \dots \\ P_i^{n+1} \\ \dots \\ P_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^n \\ \dots \\ P_i^n \\ \dots \\ P_N^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\eta P_{B1} \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

- Задача ОДУ была преобразована в линейную систему уравнений $AP^{n+1} = b$
- Матрица является симметричной и диагонально доминирующей
- Для решения системы уравнений «NxN» для каждого временного шага, нужен хороший решатель линейной системы уравнений