

Лекция 1

Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Литература.

Н.А.Берков, В.Г.Зубков, В.Б.Миносцев, Е.А.Пушкарь.

Курс математики для технических высших учебных заведений

Учебное пособие часть III Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А.

Пушкаря. 2012г. Лекция 60, 61.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.1. Обыкновенным дифференциальным уравнением называется соотношение между аргументом x , его функцией y и производными этой функции $y', y'', \dots, y^{(n)}$:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (60.1)$$

Например уравнения $\sin x - y + 2y' = 0$ и $x^2 y'' = 2 \ln x + xy'$ являются дифференциальными уравнениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.2. Порядком дифференциального уравнения называется высший из порядков производных искомой функции, входящих в это уравнение.

$$y' - 2xy^2 + 3x^3 = 0 \qquad y''' + 2y'' + y = e^x$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.3. Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0. \quad (60.2)$$

Уравнение (60.3) называется уравнением первого порядка, разрешённым относительно производной.

$$y' = f(x, y). \quad (60.3)$$



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.4. Функция $y = \varphi(x)$ называется решением дифференциального уравнения (60.1), если после замены y на $\varphi(x)$, $y'(x)$ на $\varphi'(x), \dots, y^{(n)}$ на $\varphi^{(n)}(x)$ уравнение (60.1) становится тождеством.

График этой функции $y = \varphi(x)$ называется интегральной кривой данного дифференциального уравнения.

Если решение получено в неявном виде $\Phi(x, y) = 0$, то оно называется интегралом дифференциального уравнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.5. Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ называется **общим решением** дифференциального уравнения в области G , если при любых допустимых значениях постоянных C_1, C_2, \dots, C_n она удовлетворяет уравнению и любое решение этого уравнения может быть получено из зависимости $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ соответствующим выбором постоянных C_1, \dots, C_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.6. Уравнение $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$ будем называть **общим интегралом**, если при соответствующем выборе постоянных C_1, \dots, C_n это уравнение определяет любую интегральную кривую нашего уравнения в области G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.7. Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего решения при фиксированных значениях произвольных постоянных. Заданное в неявном виде, это решение называется частным интегралом.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.8. *Задача нахождения частного решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$, называется задачей Коши.*

ПРИМЕР 60.1. *Известно, что скорость распада радия прямо пропорциональна его количеству. Допустим, при $t = t_0$ имелось m_0 граммов радия. Как масса образца зависит от времени?*

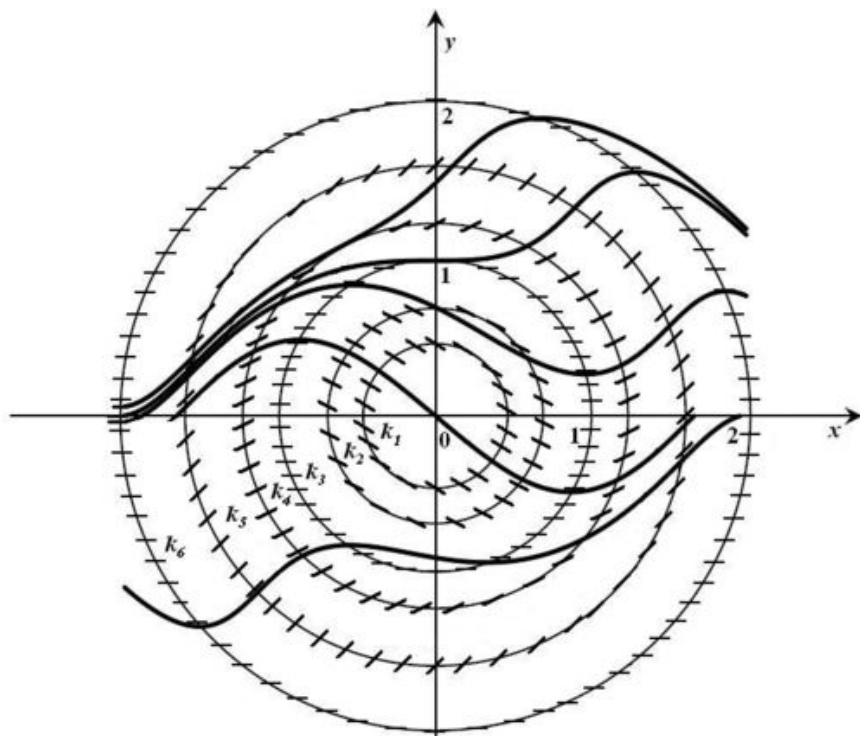
Решение: Обозначим коэффициент пропорциональности между массой радия m и скоростью его распада буквой c ($c > 0$). Тогда для массы радия имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dm}{dt} = -cm \quad \text{и начальное условие: } m|_{t=t_0} = m_0.$$

Решение этой задачи имеет вид $m = m_0 \cdot e^{-c(t-t_0)}$.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.9. В области G дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ задаёт поле направлений, которое в каждой точке G изображается с помощью отрезков касательных, угловые коэффициенты которых определяются значениями правой части дифференциального уравнения $f(x, y)$ в этой точке.



$$y' = \sin(x^2 + y^2)$$

Рис. 1. Интегральные кривые уравнения $y' = \sin(x^2 + y^2)$



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.10. *Изоклиной дифференциального уравнения называется множество всех точек плоскости, в которых отрезки поля направлений имеют один и тот же наклон.*

ПРИМЕР 60.5. *Построить поле направлений и интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$.*

Уравнение изоклин этого дифференциального уравнения имеет вид $x^2 + y^2 = k$

$$x^2 + y^2 = 1, \text{ при } k = 1$$

$$x^2 + y^2 = 2^2, \text{ при } k = 4$$

$$x^2 + y^2 = 3^2, \text{ при } k = 9$$

$$x^2 + y^2 = 0, \text{ при } k = 0$$

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4, \alpha_2 = \operatorname{arctg} 4 \text{ и } \alpha_3 = \operatorname{arctg} 9$$

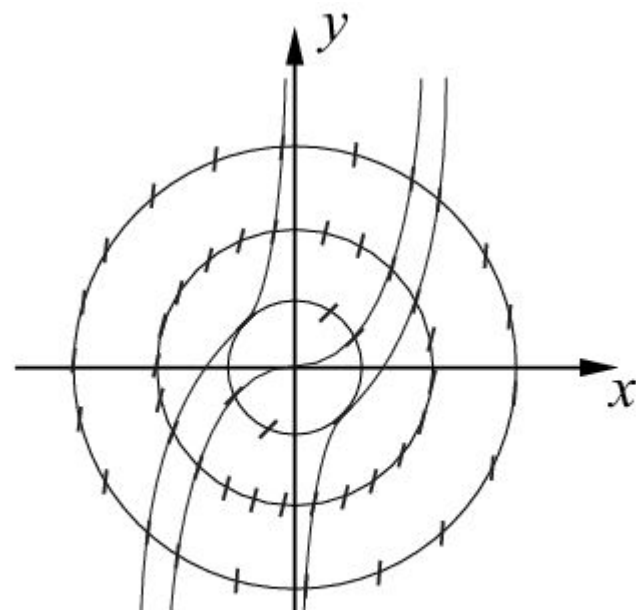


Рис. 4. Изоклины и интегральные кривые уравнения $y' = x^2 + y^2$



Теорема 60.1 (Теорема Коши). Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$, правая часть которого $f(x, y)$ определена в области $G(x, y)$, причём $f(x, y)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по y в $G(x, y)$. Тогда:

- (1) для любой внутренней точки $(x_0, y_0) \in G$ существует непрерывно дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая условию $\varphi(x_0) = y_0$;
- (2) если два решения $y = \psi(x)$ и $y = \chi(x)$ совпадают хотя бы для одного значения $x = x_0$, т.е. $\psi(x_0) = \chi(x_0)$, то они совпадают тождественно в области G , т.е. $\psi(x) \equiv \chi(x)$ для любого $x \in G$.

Геометрический смысл теоремы Коши заключается в том, что существует единственная интегральная кривая $y = \varphi(x)$, график которой проходит через точку (x_0, y_0) .



60.6. Уравнения с разделяющимися переменными

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.11. Дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными называются уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y), \quad (60.15)$$

у которых правая часть есть произведение двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной.

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx. \quad (60.16)$$

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C, \quad (60.17)$$

ПРИМЕР 60.6. Найти общее решение уравнения $2yy' = 1 - 6x^2$.

Р е ш е н и е:

$$2ydy = (1 - 6x^2)dx.$$

$$\int 2ydy = \int (1 - 6x^2)dx,$$

$$y^2 = x - 2x^3 + C.$$

Из него можно получить общее решение $y = \pm\sqrt{x - 2x^3 + C}$



ПРИМЕР 60.7. Найти частное решение уравнения $y' = -\frac{y}{x}$, при $y(1)=2$.

Решение: Разделив переменные $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$,

интегрируем и получаем: $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |y| = -\ln |x| + \ln C_1$,

$$y = \frac{C}{x}, \text{ где } C = \pm C_1.$$

Подставляя в общее решение начальное условие $y(1) = 2$, находим $2 = \frac{C}{1}$, откуда $C = 2$ и искомое частное решение равно $y = \frac{2}{x}$.

При делении на y мы могли потерять решение $y = 0$, но последнее содержится в формуле $y = \frac{C}{x}$ при $C = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 60.1. К уравнениям с разделяющимися переменными сводятся дифференциальные уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$, у которых правая часть зависит только от $ax + by + c$, где a, b, c — некоторые постоянные. Для их интегрирования достаточно сделать замену переменных $ax + by + c = t$, где t — некоторая неизвестная функция x .



ПРИМЕР 60.8. Решить дифференциальное уравнение $y' = \cos(y - x)$.

Решение: Сделаем замену переменных $y - x = t$. Тогда $y = t + x$,
 $y'_x = \frac{dt}{dx} + 1$. Подставим эти соотношения в исходное уравнение. По-
ЛУЧИМ

$$\frac{dt}{dx} + 1 = \cos t \Leftrightarrow \frac{dt}{\cos t - 1} = dx.$$

Проинтегрировав обе части полученного равенства

$$\int dx = \int \frac{dt}{\cos t - 1},$$

находим: $x = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} + C.$

Для получения решения сделаем обратную подстановку $t = y - x$:

$$x = \operatorname{ctg} \frac{y - x}{2} + C.$$



60.7. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.12. Уравнение называется однородным, если его правая часть зависит от отношения $\frac{y}{x}$:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (60.19)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.13. Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией k -той степени, если при любом λ , кроме $\lambda = 0$, имеет место тождество

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y).$$

Например, функция $f(x, y) = 3xy - 2y^2$ есть однородная функция второй степени, так как

$$f(\lambda x, \lambda y) = 3\lambda x \cdot \lambda y - 2\lambda^2 y^2 = \lambda^2(3xy - 2y^2) = \lambda^2 f(x, y).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.14. Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется однородным, если его можно представить в виде

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (60.23)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одной степени.

Для решения однородных уравнений используется подстановка $y = tx$, где $t = t(x)$ – новая неизвестная функция.



ПРИМЕР 60.9. Найти общее решение уравнения: $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$.

Решение:

$P(x, y) = y^2 - 2xy$ и $Q(x, y) = x^2$ – однородные функции x и y второй степени.

Сделаем подстановку $y = tx$, откуда $dy = tdx + xdt$.

$$(x^2t^2 - 2x^2t)dx + x^2(tdx + xdt) = 0.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим уравнение с разделяющимися переменными, которое легко решается:

$$x^2(t^2 - t)dx = -x^3 dt; \quad -\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t^2 - t}; \quad \ln C|x| = \ln \frac{t}{t - 1}.$$

Сделав обратную подстановку, получим общий интеграл уравнения

$$Cx(y - x) = y.$$



60.8. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.15. *Линейные уравнения содержат неизвестную функцию и её производную в первой степени:*

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x). \quad (60.24)$$

Суть метода вариации произвольной постоянной заключается в следующем. На первом этапе рассматривается соответствующее линейное однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0. \quad (60.25)$$

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = - \int a(x)dx \Rightarrow \ln |y| = - \int a(x)dx + \ln |C|.$$

$$y = Ce^{-\int a(x)dx}. \quad (60.26)$$

постоянная C варьируется $y = z(x)e^{-\int a(x)dx}. \quad (60.27)$

$$\begin{aligned} y' &= z(x)'e^{-\int a(x)dx} + z(x)e^{-\int a(x)dx} \left(- \int a(x)dx \right)' = \\ &= z(x)'e^{-\int a(x)dx} - z(x)a(x)e^{-\int a(x)dx}. \end{aligned} \quad (60.28)$$



Подставляя выражения для y (60.27) и y' (60.28) в уравнение (60.24), получаем соотношение для определения неизвестной функции $z(x)$:

$$z'(x)e^{-\int a(x)dx} - z(x)a(x)e^{-\int a(x)dx} + a(x)z(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x),$$

откуда $z'(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x)$ или $z'(x) = b(x)e^{\int a(x)dx}$.

Интегрируя последнее выражение, находим

$$z(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx} dx + C_0. \quad (60.29)$$

Подставляя найденное выражение для $z(x)$ в формулу (60.27), получаем общее решение линейного неоднородного уравнения (60.24)

$$y = \left(\int b(x)e^{\int a(x)dx} dx + C_0 \right) \cdot e^{-\int a(x)dx}. \quad (60.30)$$



ПРИМЕР 60.10. Найти общее решение уравнения $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 2x$.

Решение: Вначале решаем соответствующее однородное уравнение:

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{1+x^2}$.

После интегрирования и потенцирования получим $y = C(1+x^2)$.

Второй этап: ищем общее решение неоднородного уравнения, варьируя произвольную постоянную $C = z(x)$: $y = z(x)(1+x^2)$.

Находим производную $y' = z'(x)(1+x^2) + z(x) \cdot 2x$ и подставляем y и y' в исходное уравнение:

$$z'(x)(1+x^2) + 2xz(x) - \frac{2x \cdot z(x)(1+x^2)}{1+x^2} = 2x.$$

После приведения подобных членов получим выражение для $z'(x)$:

$$z'(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$z(x) = \int \frac{2xdx}{1+x^2} = \ln(1+x^2) + C_0. \quad y = (\ln(1+x^2) + C_0)(1+x^2).$$



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.16. Уравнение Бернулли — это нелинейное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)y^n, \quad (60.34)$$

где $n \neq 0$ и $n \neq 1$.

ПРИМЕР 60.21. Найти общее решение уравнения $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$.

$$1) y' + \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \implies \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \implies \ln y = -\ln x + \ln c \implies y = \frac{C}{x}.$$

$$2) C = z(x) \implies y = \frac{z(x)}{x} \implies y' = \frac{z'x - z}{x^2}.$$

$$\frac{z'x - z}{x^2} + \frac{z}{x^2} = -\frac{xz^2}{x^2} \implies z'x = -xz^2 \implies$$

$$\frac{dz}{z^2} = -dx \implies -\frac{1}{z} = -x - C \implies z = \frac{1}{x + C_1}.$$

$$y = \frac{1}{x(x + C_1)}.$$



61.1. Уравнение в полных дифференциалах

Всякое дифференциальное уравнение, разрешённое относительно производной

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (61.1)$$

может быть переписано в виде $dy = f(x, y)dx$, или, в более общей форме

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (61.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 61.1. Если левая часть уравнения (61.2) есть полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy \equiv dU \equiv \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy,$$

то это уравнение называется уравнением в полных дифференциалах.

Для того, чтобы уравнение (61.2) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (61.3)$$

$$dU(x, y(x)) \equiv 0, \quad (61.4)$$

$$U(x, y) = C. \quad (61.5)$$



Теорема 61.3. Чтобы уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы в прямоугольнике $G(x, y) : a < x < b, c < y < d$ функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ были непрерывны вместе с их частными производными P'_y и Q'_x , причём всюду в G было выполнено условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

и $Q(x, y) \neq 0$. Тогда через любую точку $(x_0, y_0) \in G$ проходит одна и только одна интегральная кривая.

Доказательство. Необходимость. По условию теоремы имеем

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU \equiv \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy,$$

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$



ПРИМЕР 61.1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

Решение: Легко видеть, что условие $P'_y = Q'_x$ выполнено. Действительно, поскольку $P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$ и $Q(x, y) = 6x^2y + 4y^3$, то $P'_y = 12xy \equiv Q'_x = 12xy$.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2$$

после интегрирования по x находим

$$U = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

Дифференцируя это выражение по y и приравнявая его коэффициенту при dy в исходном уравнении $\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3$, получаем уравнение для $\varphi(y)$: $\varphi'(y) = 4y^3$.

Интегрируя это уравнение, получим $\varphi(y) = y^4 + C_0$ и, следовательно, общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$



Спасибо за внимание