Лекция 1
Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Литература.

Н.А.Берков, В.Г.Зубков, В.Б.Миносцев, Е.А.Пушкарь.
Курс математики для технических высших учебных заведений
Учебное пособие часть III Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А. Пушкаря. 2012г. Лекция 60, 61.

Определение 60.1. *Обыкновенным дифференциальным уравнением называется соотношение между аргументом x, его функцией y и производными этой функции $y', y'', \ldots, y^{(n)}$:*

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (60.1)$$

Например уравнения $\sin x - y + 2y' = 0$ и $x^2 y'' = 2\ln x + xy'$ являются дифференциальными уравнениями.

Определение 60.2. *Порядком дифференциального уравнения называется высший из порядков производных искомой функции, входящих в это уравнение.*

$$y' - 2xy^2 + 3x^3 = 0 \qquad\qquad y''' + 2y'' + y = e^x$$

Определение 60.3. *Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид*

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (60.2)$$

Уравнение (60.3) называется уравнением первого порядка, разрешённым относительно производной.

$$y' = f(x, y). \quad (60.3)$$

Определение 60.4. *Функция $y = \varphi(x)$ называется решением дифференциального уравнения (60.1), если после замены y на $\varphi(x)$, $y'(x)$ на $\varphi'(x), \ldots, y^{(n)}$ на $\varphi^{(n)}(x)$ уравнение (60.1) становится тождеством.*

График этой функции $y = \varphi(x)$ называется интегральной кривой данного дифференциального уравнения.

Если решение получено в неявном виде $\Phi(x, y) = 0$, то оно называется интегралом дифференциального уравнения.

Определение 60.5. *Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ называется* **общим решением** *дифференциального уравнения в области G, если при любых допустимых значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ она удовлетворяет уравнению и любое решение этого уравнения может быть получено из зависимости $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ соответствующим выбором постоянных $C_1, \ldots, C_n$.*

Определение 60.6. *Уравнение $\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$ будем называть* **общим интегралом**, *если при соответствующем выборе постоянных $C_1, \ldots, C_n$ это уравнение определяет любую интегральную кривую нашего уравнения в области G.*

Определение 60.7. *Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего решения при фиксированных значениях произвольных постоянных. Заданное в неявном виде, это решение называется частным интегралом.*

Определение 60.8. *Задача нахождения частного решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$, называется задачей Коши.*

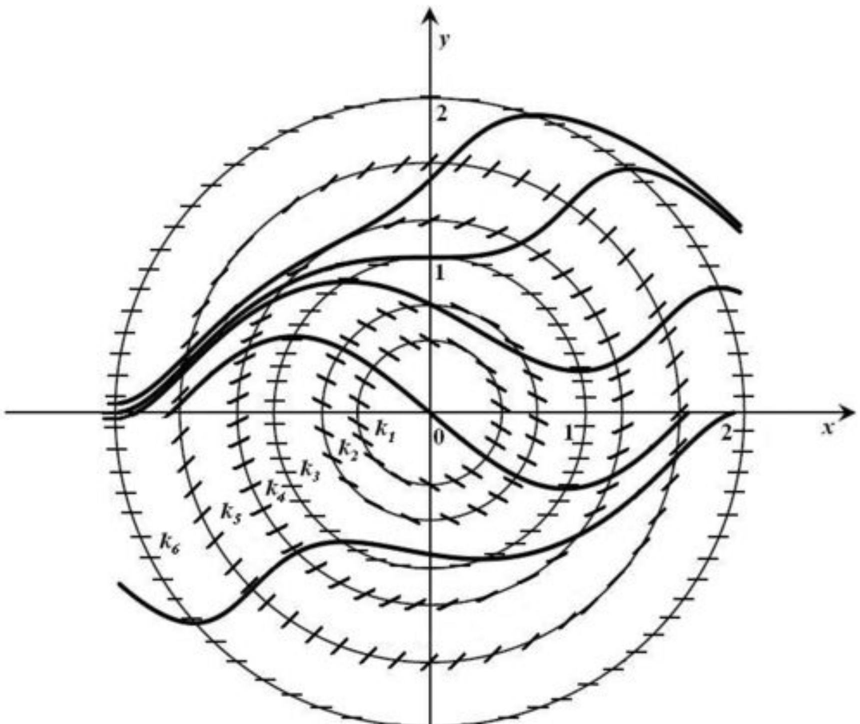
Пример 60.1. *Известно, что скорость распада радия прямо пропорциональна его количеству. Допустим, при $t = t_0$ имелось m_0 граммов радия. Как масса образца зависит от времени?*

Решение: Обозначим коэффициент пропорциональности между массой радия m и скоростью его распада буквой c ($c > 0$). Тогда для массы радия имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dm}{dt} = -cm \quad \text{и начальное условие: } m\big|_{t=t_0} = m_0.$$

Решение этой задачи имеет вид $m = m_0 \cdot e^{-c(t-t_0)}$.

Определение 60.9. *В области G дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ задаёт поле направлений, которое в каждой точке G изображается с помощью отрезков касательных, угловые коэффициенты которых определяются значениями правой части дифференциального уравнения $f(x, y)$ в этой точке.*



$$y' = \sin(x^2 + y^2)$$

Рис. 1. *Интегральные кривые уравнения* $y' = \sin(x^2 + y^2)$

60.5. Метод изоклин

Определение 60.10. *Изоклиной дифференциального уравнения называется множество всех точек плоскости, в которых отрезки поля направлений имеют один и тот же наклон.*

Пример 60.5. *Построить поле направлений и интегральные кривые дифференциального уравнения* $y' = x^2 + y^2$.

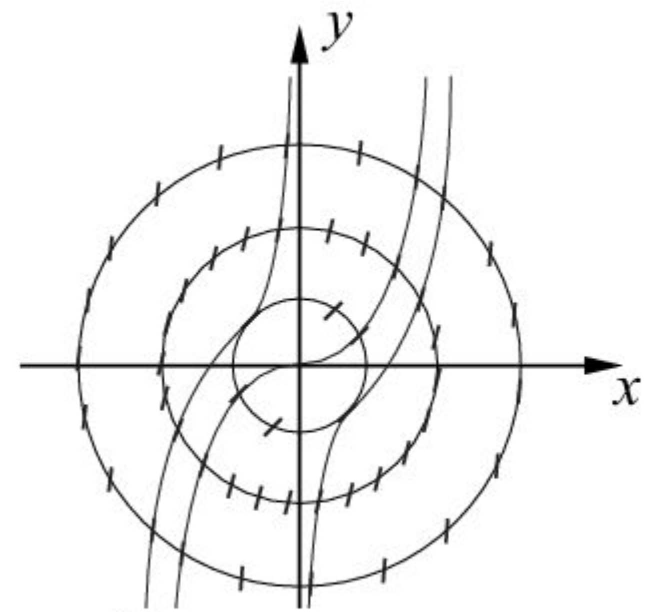


Рис. 4. *Изоклины и интегральные кривые уравнения* $y' = x^2 + y^2$

Уравнение изоклин этого дифференциального уравнения имеет вид $x^2+y^2 = k$

$x^2 + y^2 = 1$, при $k = 1$

$x^2 + y^2 = 2^2$, при $k = 4$

$x^2 + y^2 = 3^2$, при $k = 9$

$x^2 + y^2 = 0$, при $k = 0$

$\alpha_1 = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg} 4$ и $\alpha_3 = \operatorname{arctg} 9$

Теорема 60.1 (Теорема Коши). *Пусть дано дифференциальное уравнение* $y' = f(x, y)$, *правая часть которого* $f(x,y)$ *определена в области* $G(x,y)$, *причём* $f(x,y)$ *непрерывна и непрерывно дифференцируема по* y *в* $G(x,y)$. *Тогда:*

(1) *для любой внутренней точки* $(x_0, y_0) \in G$ *существует непрерывно дифференцируемая функция* $y = \varphi(x)$, *удовлетворяющая условию* $\varphi(x_0) = y_0$;

(2) *если два решения* $y = \psi(x)$ *и* $y = \chi(x)$ *совпадают хотя бы для одного значения* $x = x_0$, *т.е.* $\psi(x_0) = \chi(x_0)$, *то они совпадают тождественно в области* G, *т.е.* $\psi(x) \equiv \chi(x)$ *для любого* $x \in G$.

Геометрический смысл теоремы Коши заключается в том, что существует единственная интегральная кривая $y = \varphi(x)$, график которой проходит через точку (x_0, y_0).

60.6. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 60.11. *Дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными называются уравнения вида*

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y), \tag{60.15}$$

у которых правая часть есть произведение двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной.

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \tag{60.16}$$

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C, \tag{60.17}$$

Пример 60.6. *Найти общее решение уравнения* $2yy' = 1 - 6x^2$.

Р е ш е н и е:

$$2ydy = (1 - 6x^2)dx.$$

$$\int 2ydy = \int (1 - 6x^2)dx,$$

$$y^2 = x - 2x^3 + C.$$

Из него можно получить общее решение $y = \pm\sqrt{x - 2x^3 + C}$

Пример 60.7. *Найти частное решение уравнения* $y' = -\dfrac{y}{x}$, *при* $y(1)=2$.

Р е ш е н и е: Разделив переменные $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$,

интегрируем и получаем: $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln C_1$,

$y = \dfrac{C}{x}$, где $C = \pm C_1$.

Подставляя в общее решение начальное условие $y(1) = 2$, находим $2 = \dfrac{C}{1}$, откуда $C = 2$ и искомое частное решение равно $y = \dfrac{2}{x}$.

При делении на y мы могли потерять решение $y = 0$, но последнее содержится в формуле $y = \dfrac{C}{x}$ при $C = 0$.

Замечание 60.1. *К уравнениям с разделяющимися переменными сводятся дифференциальные уравнения первого порядка* $y' = f(x, y)$, *у которых правая часть зависит только от* $ax + by + c$, *где* a, b, c *– некоторые постоянные. Для их интегрирования достаточно сделать замену переменных* $ax + by + c = t$, *где* t *— некоторая неизвестная функция* x.

Пример 60.8. *Решить дифференциальное уравнение* $y' = \cos(y - x)$.

Решение: Сделаем замену переменных $y - x = t$. Тогда $y = t + x$, $y'_x = \dfrac{dt}{dx} + 1$. Подставим эти соотношения в исходное уравнение. Получим

$$\frac{dt}{dx} + 1 = \cos t \Leftrightarrow \frac{dt}{\cos t - 1} = dx.$$

Проинтегрировав обе части полученного равенства

$$\int dx = \int \frac{dt}{\cos t - 1},$$

находим: $x = \operatorname{ctg} \dfrac{t}{2} + C.$

Для получения решения сделаем обратную подстановку $t = y - x$:

$$x = \operatorname{ctg} \frac{y - x}{2} + C.$$

60.7. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 60.12. *Уравнение называется однородным, если его правая часть зависит от отношения* $\frac{y}{x}$:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{60.19}$$

Определение 60.13. *Функция* $f(x, y)$ *называется однородной функцией* k*-той степени, если при любом* λ, *кроме* $\lambda = 0$, *имеет место тождество*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y).$$

Например, функция $f(x, y) = 3xy - 2y^2$ есть однородная функция второй степени, так как

$$f(\lambda x, \lambda y) = 3\lambda x \cdot \lambda y - 2\lambda^2 y^2 = \lambda^2(3xy - 2y^2) = \lambda^2 f(x, y).$$

Определение 60.14. *Дифференциальное уравнение первого порядка* $y' = f(x, y)$ *называется однородным, если его можно представить в виде*

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{60.23}$$

где $P(x, y)$ *и* $Q(x, y)$ – *однородные функции одной степени.*

Для решения однородных уравнений используется подстановка $y = tx$, где $t = t(x)$ – новая неизвестная функция.

Пример 60.9. *Найти общее решение уравнения:* $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$.

Р е ш е н и е:
$P(x, y) = y^2 - 2xy$ и $Q(x, y) = x^2$ – однородные функции x и y второй степени.

Сделаем подстановку $y = tx$, откуда $dy = tdx + xdt$.

$$(x^2t^2 - 2x^2t)dx + x^2(tdx + xdt) = 0.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим уравнение с разделяющимися переменными, которое легко решается:

$$x^2(t^2 - t)dx = -x^3 dt; \qquad -\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t^2 - t}; \quad \ln C|x| = \ln \frac{t}{t-1} \, .$$

Сделав обратную подстановку, получим общий интеграл уравнения

$$Cx(y - x) = y.$$

60.8. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 60.15. *Линейные уравнения содержат неизвестную функцию и её производную в первой степени:*

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x). \qquad (60.24)$$

Суть метода вариации произвольной постоянной заключается в следующем. На первом этапе рассматривается соответствующее линейное однородное уравнение $\displaystyle\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0. \qquad (60.25)$

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int a(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -\int a(x)dx + \ln|C|.$$

$$y = Ce^{-\int a(x)dx}. \qquad (60.26)$$

постоянная C *варьируется* $\quad y = z(x)e^{-\int a(x)dx}. \qquad (60.27)$

$$y' = z(x)'e^{-\int a(x)dx} + z(x)e^{-\int a(x)dx}\left(-\int a(x)dx\right)' =$$

$$= z(x)e^{-\int a(x)dx} - z(x)a(x)e^{-\int a(x)dx}. \qquad (60.28)$$

Подставляя выражения для y (60.27) и y' (60.28) в уравнение (60.24), получаем соотношение для определения неизвестной функции $z(x)$: $z'(x)e^{-\int a(x)dx} - z(x)a(x)e^{-\int a(x)dx} + a(x)z(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x)$,

откуда $z'(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x)$ или $z'(x) = b(x)e^{\int a(x)dx}$.

Интегрируя последнее выражение, находим

$$z(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}\,dx + C_0. \tag{60.29}$$

Подставляя найденное выражение для $z(x)$ в формулу (60.27), получаем общее решение линейного неоднородного уравнения (60.24)

$$y = \left(\int b(x)e^{\int a(x)dx}\,dx + C_0\right) \cdot e^{-\int a(x)dx}. \tag{60.30}$$

Пример 60.10. *Найти общее решение уравнения* $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 2x$.

Р е ш е н и е: Вначале решаем соответствующее однородное уравнение:

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{1+x^2}$.

После интегрирования и потенцирования получим $y = C(1+x^2)$.

Второй этап: ищем общее решение неоднородного уравнения, варьируя произвольную постоянную $C = z(x)$: $y = z(x)(1+x^2)$.

Находим производную $y' = z'(x)(1+x^2) + z(x)\cdot 2x$ и подставляем y и y' в исходное уравнение:

$$z'(x)(1+x^2) + 2x\, z(x) - \frac{2x\cdot z(x)(1+x^2)}{1+x^2} = 2x.$$

После приведения подобных членов получим выражение для $z'(x)$:

$$z'(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$z(x) = \int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \ln(1+x^2) + C_0. \qquad y = \left(\ln(1+x^2) + C_0\right)(1+x^2).$$

60.9. Уравнение Бернулли

Определение 60.16. *Уравнение Бернулли — это нелинейное уравнение вида*

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)y^n, \tag{60.34}$$

где $n \neq 0$ и $n \neq 1$.

Пример 60.21. *Найти общее решение уравнения* $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$.

1) $y' + \dfrac{y}{x} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \implies \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \implies \ln y = -\ln x + \ln c \implies y = \frac{C}{x}.$$

2) $C = z(x) \implies y = \dfrac{z(x)}{x} \implies y' = \dfrac{z'x - z}{x^2}.$

$$\frac{z'x - z}{x^2} + \frac{z}{x^2} = -\frac{-xz^2}{x^2} \implies z'x = -xz^2 \implies$$

$$\frac{dz}{z^2} = -dx \implies -\frac{1}{z} = -x - C \implies z = \frac{1}{x + C_1}.$$

$$y = \frac{1}{x(x + C_1)}.$$

61.1. Уравнение в полных дифференциалах

Всякое дифференциальное уравнение, разрешённое относительнс производной

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{61.1}$$

может быть переписано в виде $dy = f(x, y)dx$, или, в более общей форме

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \tag{61.2}$$

Определение 61.1. *Если левая часть уравнения (61.2) есть полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$:*

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy \equiv dU \equiv \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy,$$

то это уравнение называется уравнением в полных дифференциалах.

Для того, чтобы уравнение (61.2) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}; \qquad Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}\cdot \tag{61.3}$$

$$dU(x, y(x)) \equiv 0, \tag{61.4}$$

$$U(x, y) = C. \tag{61.5}$$

Теорема 61.3. *Чтобы уравнение* $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ *было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы в прямоугольнике* $G(x,y)$: $a < x < b$, $c < y < d$ *функции* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *были непрерывны вместе с их частными производными* P'_y *и* Q'_x, *причём всюду в* G *было выполнено условие*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

и $Q(x,y) \neq 0$. *Тогда через любую точку* $(x_0, y_0) \in G$ *проходит одна и только одна интегральная кривая.*

Доказательство. Необходимость. По условию теоремы имеем

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU \equiv \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy,$$

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}; \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y} \cdot$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot$$

Пример 61.1. *Найти общий интеграл дифференциального уравнения*

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

Р е ш е н и е: Легко видеть, что условие $P'_y = Q'_x$ выполнено. Действительно, поскольку $P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$ и $Q(x, y) = 6x^2y + 4y^3$, то $P'_y = 12xy \equiv Q'_x = 12xy$.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2$$

после интегрирования по x находим

$$U = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

Дифференцируя это выражение по y и приравнивая его коэффициенту при dy в исходном уравнении $\dfrac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3$, получаем уравнение для $\varphi(y)$: $\quad \varphi'(y) = 4y^3$.

Интегрируя это уравнение, получим $\varphi(y) = y^4 + C_0$ и, следовательно, общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

Спасибо за внимание