Индексы

1. Общее понятие об индексах
2. Классификация индексов
3. Индивидуальные индексы
4. Агрегатная форма общих (сводных) индексов
5. Система индексов
6. Средневзвешенные индексы
7. Сводные индексы средних величин
8. Индексный анализ территориальных различий
9. Индексы международного сопоставления

1. Общие понятия об индексах

«Индекс» в переводе с латинского — указатель или показатель.

В статистике **индексом** называют показатель относительного изменения данного уровня исследуемого явления по сравнению с другим его уровнем, принятым за базу сравнения.

В качестве такой базы может быть использован уровень за какой-либо прошлый период времени *(динамический индекс)* или уровень того же явления по другой территории *(территориальный индекс)*.

***Индекс* — это относительная величина сравнения, которая характеризует изменение социально-экономических явлений и процессов во времени, в пространстве или по сравнению с планом (нормой, стандартом).**

Формой выражения индексов являются коэффициенты или проценты.

Особенностью индексов является то, что в отличие от других относительных величин индексы характеризуют сложные явления, элементы которых *не подлежат суммированию.*

Методология построения и использования индексов в статистико-экономическом анализе называется *индексным методом*.

Важной особенностью индексов является то, что им присущи синтетические и аналитические свойства.

***Синтетические* свойства** индексов заключаются в том, что с их помощью осуществляется соединение (агрегирование) в единое целое разнородных еди ниц статистической совокупности.

***Аналитические* свойства** индексов проявляются в том, что посредством индексного метода выявляется влияние отдельных факторов на изменение исследуемого показателя.

В индексном методе применяется определенная система ***условных обозначений***, посредством которых строят и записывают индексы.

а) *количественные или объемные показатели*:

q — объем изготовленной продукции или количество проданного товара определенного вида в натуральном выражении;

T — общее количество отработанных человеко-часов или человеко-дней (общие расходы рабочего времени на производство продукции) или среднесписочная численность работников;

h *(или* **s)** — размер посевной площади;

б) ***качественные показатели:***

p — цена единицы товара или продукции;

z — себестоимость единицы продукции;

$$t = \frac{T}{q}$$

- расходы рабочего времени (труда) на производство продукции, то есть ее трудоемкость;

$$\overline{q} = \frac{q}{T}$$

- средний выпуск продукции в расчете на одного работника или на один человеко-день (человеко-час), то есть производительность труда;

y *(или r)* — урожайность определенной культуры с 1 га;

в) *<u>показатели, которые получены путем произведения качественного и количественного показателей:</u>*

pq — стоимость выпуска продукции или общая стоимость проданного товара определенного вида (товарооборот);

zq — общая себестоимость продукции, то есть расходы на ее производство (издержки производства);

tq = T — общие расходы рабочего времени на выпуск продукции;

yh — валовой сбор определенной сельскохозяйственной культуры.

i — индивидуальный индекс;

I — сводный индекс;

В использовании индексов при динамических или пространственных сравнениях используют *специальные обозначения*.

Период или объект, с которым сравнивают, называют ***базисным***, а период или объект, который сравнивают, — ***текущим, отчетным***.

Данные базисного периода помечают подстрочным знаком «0», а отчетного — «1». Индексы, выраженные в форме коэффициентов, определяют с точностью 0,0001, что обусловлено взаимосвязанностью индексов.

В индексах имеются две величины:

одну, изменение которой изучают при использовании индивидуальных и общих индексов, называют ***индексируемой****;*

вторую, постоянную в общих индексах, которая приводит разнородные элементы совокупности к сопоставимому виду — ***соизмерителем*** (весом).

2. Классификация индексов

Индексы могут быть классифицированы по таким признакам:

а) мера охвата элементов совокупности;

б) база сравнения;

в) вид объекта сравнения;

г) вид соизмерителя;

д) форма построения;

ж) в зависимости от содержания и характера индексируемой величины;

з) объект исследования;

к) состав явления;

л) период расчета.

а) По мере охвата элементов совокупности различают индивидуальные и общие (сводные) индексы.

Индивидуальные индексы **— это относительные показатели, которые характеризуют изменение в динамике или отображают соотношение в пространстве какого-либо одного вида единиц явления**. (например, добычи угля на шахте, цены на картофель сельхозпредприятия и др.).

Так, i_q — индивидуальный индекс объема продукции, i_p — индивидуальный индекс цен и т. п.

Общие (сводные) индексы обозначают буквой I и характеризуют динамику сложного явления, элементы которого не поддаются непосредственному суммированию во времени, в пространстве или по сравнению с планом (например, добыча угля несколькими шахтами, цены на картофель в сельхозпредприятиях района).

Так, **Iq** — общий индекс физического объема продукции, **Ip** — общий индекс цен и др.

В статистическом анализе используются также ***групповые индексы**, или **субиндексы***, которые охватывают части целого (например, индексы продукции по отдельным отраслям, продовольственных и непродовольственных товаров).

б) По базе сравнения различают **базисные и цепные индексы.**

в) По виду объекта сравнения различают динамические, территориальные индексы и индексы сопоставления с планом (нормой, стандартом).

г)Для общих индексов ***по виду соизмерителя*** различают индексы *с постоянными* и *переменными соизмерителями.*

д) По форме построения в зависимости от методологии расчета общие (сводные) индексы **разделяют на агрегатные и средние индексы**.

ж) В зависимости от содержания и характера индексируемой величины различают индексы *количественных (объемных)* показателей (например, физического объема продукции) и индексы *качественных показателей* (например, *цен, себестоимости* и др.)

К первой группе относятся например, индексы объема продаж долларов США на ММВБ, а ко второй – индекс курса евро)

з) По объекту исследования индексы количественных показателей разделяют на

- *индексы физического объема продукции,*
- *производительности труда,*
- *стоимости продукции,*
- *индексы размера и структуры посевных площадей*
- и др.

к) По составу явления различают индексы:

- *постоянного (фиксированного) состава*
- *переменного состава,*
- *структурных сдвигов.*

Индексы, в которых изменяется одна величина, называют *индексами постоянного состава* (индексы цен, себестоимость и др.), а две и больше величины — *индексами переменного состава* (индексы стоимости, объема продукции, общих расходов, валового сбора и др.).

Отношение индекса переменного состава к индексу постоянного состава дает индекс структурных сдвигов.

л) Наконец, по периоду расчета бывают годовые, квартальные, месячные и недельные индексы.

3. Индивидуальные индексы

Простейшим показателем, используемым в индексном анализе, является **индивидуальный индекс,** который характеризует изменение во времени экономических величин, относящихся к одному объекту (или однотоварных явлений).

Примерами индивидуальных индексов являются такие:

Индивидуальный индекс	Формула расчета
Количественных показателей:	
Индекс физического объема	$i_q = \frac{q_1}{q_э}$ $i_q = \frac{q_1}{q_н}$ $i_q = \frac{q_1}{q_{пл}}$ $i_q = \frac{q_i}{q_0}$
индекс количества отработанных человеко-дней	$i_T = \frac{T_1}{T_0}$
индекс размера посевной площади	$i_h = \frac{h_1}{h_0}$
Качественных показателей	
индекс цен	$i_p = \frac{p_1}{p_0}$
индекс себестоимости продукции	$i_z = \frac{z_1}{z_0}$
индекс производительности труда по трудовым затратам	$i_t = \frac{t_0}{t_1}$ $t = \frac{1}{v}$
индекс трудоемкости (количества продукции, произведенной в единицу времени)	$i_t = \frac{t_1}{t_0}$ $i_v = \frac{v_1}{v_0} = \frac{\frac{q_1}{T_1}}{\frac{q_0}{T_0}}$
Индекс фондоотдачи	$i_f = \frac{f_1}{f_0}$
Индекс оплаты труда	$i_l = \frac{l_1}{l_0}$
Смешанных показателей	
Индекс стоимости продукции (товарооборота)	$i_{pq} = i_p * i_q$ $i_{pq} = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_0}$
Индекс общей себестоимости продукции (затрат на производство)	$i_{zq} = i_z * i_q$ $i_{zq} = \frac{z_1 q_1}{z_0 q_0}$
Индекс затрат труда на производство	$i_{tq} = i_t * i_q$ $i_{tq} = \frac{t_1 q_1}{t_0 q_0}$

Индивидуальные индексы могут рассчитываться в виде индексного ряда за несколько периодов. При этом существует два способа расчета индивидуальных индексов: цепной и базисный.

При ***<u>базисном способе расчета</u>*** за базу принимается неизменная индексируемая величина какого-то одного (обычно начального) периода.

Например, для рассмотренного случая *базисные индексы* физического объема продукции рассчитываются так:

$$i_{1/0} = \frac{q_1}{q_0} \quad i_{2/0} = \frac{q_2}{q_0} \quad i_{3/0} = \frac{q_3}{q_0}$$

и т.д.

Для индекса физического объема продукции ***цепные индексы*** по разным периодами рассчитываются так:

$$i_{1/0} = \frac{q_1}{q_0} \quad i_{2/1} = \frac{q_2}{q_1} \quad i_{3/2} = \frac{q_3}{q_2}$$

Между цепными и базисными индивидуальными индексами существует такая взаимосвязь:

- **произведение цепных индексов равняется базисному индексу крайних периодов.**

Например, для индекса физического объема продукции:

$$i_{q1/0} * i_{q2/1} * i_{q3/2} = i_{q3/0}$$

- **частное от деления последующего базисного индекса на предыдущий равняется соответствующему цепному индексу**

$$i_{q2/1} / i_{q1/0} = i_{q2/0}$$

4. Агрегатная форма общего индекса. Сущность и принципы построения

Агрегатные индексы являются основной формой общего индекса (от лат. aggrega — присоединяю). Свое название они получили потому, что характеризуют не отдельные единицы, а их группы (агрегаты).

Одной из первых попыток агрегировать в индексе различные единицы совокупности можно считать формулу индекса цен французского экономиста Дюто, предложенную в 1738 г.:

$$I_p = \frac{\sum p_1}{\sum p_0}$$

где $\sum p1$ – сумма цен на отдельные товары в отчетном периоде;

$\sum p0$ – сумма цен на те же товары в базисном периоде.

В 1764 г. итальянец Карли определил общий индекс цен как среднюю арифметическую простую из индивидуальных индексов цен:

$$I_p = \frac{\sum i_p}{n}$$

Базисная цена в качестве соизмерителя была предложена в агрегатной форме индекса немецким экономистом Э. **Ласпейресом** в 1864 г.

Формула агрегатного индекса с весами отчетного периода введена в 1874 г. также немецким экономистом Г. **Пааше.**

Средним геометрическим индексом из индексов Пааше и Ласпейреса является «идеальная формула» американского экономиста **И. Фишер**.

В отечественной практике для расчета индекса количественного показателя чаще используют формулу Ласпейреса, качественного — Пааше.

Основные агрегатные индексы

Наименование индекса	по методу Ласпейреса (имеет постоянные веса)	по методу Пааше (имеет переменные веса)
Количественные показатели		
Общий индекс физического объема (по стоимости)	$I_q = \dfrac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}$	$I_q = \dfrac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}$
Общий индекс физического объема (по затратам)	$I_q = \dfrac{\sum q_1 z_0}{\sum q_0 z_0}$	$I_q = \dfrac{\sum q_1 z_1}{\sum q_0 z_1}$
Качественные показатели		
Общий индекс цен	$I_p = \dfrac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}$	$I_p = \dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$
Общий индекс себестоимости	$I_z = \dfrac{\sum z_1 q_0}{\sum z_0 q_0}$.	$I_z = \dfrac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_1}$.
Общий индекс трудоемкости	$I_t = \dfrac{\sum t_1 q_0}{\sum t_0 q_0}$.	$I_t = \dfrac{\sum t_1 q_1}{\sum t_0 q_1}$
Общий индекс производительности труда (I_t, I_w)	$I_t = \dfrac{\sum t_0 q_0}{\sum t_1 q_0}$ $I_w = \dfrac{\sum t_0 q_0}{\sum t_1 q_0}$,	$I_w = \dfrac{\sum t_0 q_1}{\sum t_1 q_1}$, $I_t = \dfrac{\sum t_0 q_1}{\sum t_1 q_1}$
Смешанные (стоимостные) показатели		
Общий индекс стоимости продукции	$I_{pq} = \dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$	$I_{pq} = I_p * I_q$ $I_{pq} = \dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} * \dfrac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} = \dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$
Общий индекс затрат на производство продукции	$I_{zq} = \dfrac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_0}$	$I_z * I_q = I_{zq}$ $I_{zq} = \dfrac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_1} * \dfrac{\sum z_0 q_1}{\sum z_0 q_0} = \dfrac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_0}$
Агрегатный индекс общих расходов рабочего времени (**Itq**)	$I_{tq} = \dfrac{\sum t_1 q_1}{\sum t_0 q_0}$	$I_{tq} = I_t * I_q$ $I_{tq} = \dfrac{\sum t_1 q_1}{\sum t_0 q_1} * \dfrac{\sum t_0 q_1}{\sum t_0 q_0} = \dfrac{\sum t_1 q_1}{\sum t_0 q_0}$

Агрегатная форма общих индексов количественных показателей

Наиболее типичным общим индексом количественных показателей является ***индекс физического объема продукции***.

Поэтому рассмотрим его построение. Сопоставление общих физических объемов реализованных товаров не имеет смысла, поэтому общий индекс физического объема продукции, как обобщающий показатель явления, **не может рассчитываться** как

$$\cancel{I_q = \frac{\sum q_1}{\sum q_0}}$$

$$I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \qquad I_q = \frac{\sum q_1 z_0}{\sum q_0 z_0}$$

Изменение цен на продукцию в текущем периоде по сравнению с базисным не влияет на величину индекса.

Общий индекс физического объема по методу Пааше:

$$I_q = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}$$

или

$$I_q = \frac{\sum q_1 z_1}{\sum q_0 z_1}$$

Обозначения

- *Где* q_1 – количество одноименных единиц продукции (объем продаж одноименного товара) в отчетном периоде;
- q_0 — количество одноименных единиц продукции (объем продаж одноименного товара) в базисном периоде;
- p_0 — цена одноименной единицы продукции (товара) в базисном периоде;
- z_0 — себестоимость одноименной единицы продукции в базисном периоде;
- $q_1 p_0$ – стоимость выпуска одноименной продукции отчетного периода в ценах базисного периода (товарооборот одноименного товара отчетного периода в ценах базисного периода);
- $q_0 p_0$ – стоимость выпуска одноименной продукции в базисном периоде (товарооборот одноименного товара в базисном периоде);
- $\sum q_1 p_0$ – стоимость выпуска разноименной продукции отчетного периода в ценах базисного периода (товарооборот разноименного товара отчетного периода в ценах базисного периода);
- $\sum q_0 p_0$ – стоимость выпуска разноименной продукции в базисном периоде (товарооборот разноименных товаров в базисном периоде);

Для иллюстрации этого и последующих индексов воспользуемся следующими условными данными (табл. 1).

Таблица 1

Цены и объем реализации трех товаров

Товар	**2003**		**2004**	
	Цена, руб.	**Продано, тыс.**	**Цена, руб.**	**Продано, тыс.**
А	50	12	55	15
Б	90	21	110	27
В	65	9	75	14

В нашем случае индекс составит

$$I_q = \frac{15*50+27*90+14*65}{12*50+21*90+9*65} = 1{,}33$$

Агрегатная форма общих индексов качественных и смешанных показателей

Среди агрегатных индексов качественных показателей значительная роль отводится *агрегатному **индексу цен I**,* который в большинстве случаев используется в *двух формах:* индексов Г. Пааше и Э. Ласпейреса.

Индекс Пааше рассчитывается по формуле:

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$$

или

$$I_p = \frac{p_1^1 q_1^1 + p_1^2 q_1^2 + ... + p_1^n q_1^n}{p_0^1 q_1^1 + p_0^2 q_1^2 + ... + p_0^n q_1^n} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$$

Индекс Ласпейреса рассчитывается по формуле

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}$$

где $\Sigma p_1 q_0$ — стоимость продукции в базисном периоде по ценам текущего периода;

$\Sigma p_0 q_0$ — стоимость продукции в базисном периоде.

Индекс Ласпейреса (L) в ряде случаев больше индекса Пааше (P), т.е. индекс цен, рассчитанный по формуле Пааше, имеет тенденцию некоторого занижения, а по формуле Ласпейреса – завышения темпов инфляции.

Эта систематическая зависимость двух индексов известна в статистике ***как эффект Гершенкрона.***

При построении данного индекса цена выступает в качестве индексируемой величины, а количество проданного товара — в качестве веса.

Для рассматриваемого примера получим

$$I_p = \frac{55*15 + 110*27 + 75*14}{50*15 + 90*27 + 65*14} = 1{,}185$$

Между рассчитанными индексами существует следующая взаимосвязь:

$$I_p * I_q = I_{pq}$$

или

$$1{,}185*1{,}330 = 1{,}576.$$

- Разность числителя и знаменателя ($\Delta p = \Sigma p_1 q_1 - \Sigma p_0 q_1$) соответствует абсолютной экономии *($\Delta p<0$)* или абсолютному перерасходу *($\Delta p>0$)* денежных средств покупателей в результате изменения цен на эти товары.

Учитывая имеющееся несоответствие между индексами Пааше и Ласпейреса, И. Фишером в международном сопоставлении предложен «идеальный индекс» *(индекс Фишера),* как средне-геометрическая величина из двух вышеупомянутых индексов:

$$I_p = \sqrt{PL}.$$

«Идеальная» формула Фишера:

$$I_q = \sqrt{\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}} \qquad I_p = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}}$$

Физического объема Цены

К основным ***агрегатным индексам смешанных*** *показателей* можно отнести

- индексы стоимости (товарооборота) товаров Ipq,
- индексы общей себестоимости продукции Izq,
- индексы общих расходов рабочего времени Itq и др.

Для общих индексов **стоимостных показателей** соизмерителей (весов) не требуется, достаточно произвести суммирование произведений качественного и количественного показателей, исчисленных для разноименных единиц исследуемой совокупности.

Вернемся к рассмотрению задачи с розничными ценами. Как уже отмечалось, цены различных товаров складывать не правомерно, но **суммировать товарооборот** по этим товарам вполне допустимо.

В текущем периоде такой товарооборот по *n* товарам составит

$$p_1^1 q_1^1 + p_1^2 q_1^2 + p_1^3 q_1^3 + \ldots + p_1^n q_1^n = \sum p_1 q_1 .$$

Аналогично получим для базисного периода

$$p_0^1 q_0^1 + p_0^2 q_0^2 + p_0^3 q_0^3 + \ldots + p_0^n q_0^n = \sum p_0 q_0 .$$

Так как *агрегатный индекс стоимости товаров (товарооборота)* можно представить как произведение индекса цен Ip (в форме индекса Пааше) и индекса физического объема продукции Iq (Ласпейреса)

То

$$I_{pq} = I_p * I_q$$

$$I_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} * \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

Или

$$I_Q = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0}$$

Рассчитаем индекс товарооборота

$$I_{pq} = \frac{55 \cdot 15 + 110 \cdot 27 + 75 \cdot 14}{50 \cdot 12 + 90 \cdot 21 + 65 \cdot 9} = 1{,}576.$$

Рассчитанное значение индекса позволяет заключить, что товарооборот в целом по данной товарной группе в 2004 г. по сравнению с предшествующим годом возрос на 57,6%(157,6% — 100,0%).

Отметим, что **размер товарной группы, единицы измерения товаров при расчете этого и последующих индексов значения не имеют.**

Величина индекса товарооборота формируется под воздействием двух факторов: на нее оказывает влияние как

- изменение цен на товары,
- так и изменение объемов их реализации.

Агрегатный индекс общих расходов рабочего времени ***Itq*** представляется в виде произведения индекса производительности труда ***It*** и индекса физического объема продукции по производительности труда ***Iq***

$$I_{tq} = I_t * I_q$$

или

$$I_{tq} = \frac{\sum t_1 q_1}{\sum t_0 q_1} * \frac{\sum t_0 q_1}{\sum t_0 q_0} = \frac{\sum t_1 q_1}{\sum t_0 q_0}$$

Его величина дает сравнение расходов рабочего времени на производство продукции разных видов в текущем и базисном периодах.

Взаимодействие факторов изменения себестоимости и объемов реализации отражается на значении ***сводного индекса затрат на производство***

$$I_{zq} = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_0}$$

Если для взвешивания значений качественного показателя используется средний объем $\bar{q}$, то общий индекс называется **индексом Лоу.** Он Он применяется в расчетах за продолжительное время (пятилетие, десятилетие и д.т.):

$$I_p = \frac{\sum p_1 \bar{q}}{\sum p_0 \bar{q}}$$

5. Система индексов

Индексы позволяют получать сводную оценку изучаемых процессов постоянно, месяц за месяцем, год за годом. Однако при этом для достижения сопоставимости они должны рассчитываться по единой методологии. Такая методология или схема расчета индексом за несколько последовательных временных периодов называется ***системой индексов***.

В зависимости от информационной базы и целей исследования индексная система может строиться по-разному. При этом используются *цепные и базисные способы* расчета.

Приведем примеры цепных и базисных общих индексов агрегатной формы **физического объема продукции** с постоянными и переменными соизмерителями и покажем их взаимосвязь:

- *цепные индексы с постоянными соизмерителями:*

$$I_{q_{1/0}} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}; \; I_{q_{2/1}} = \frac{\sum q_2 p_0}{\sum q_1 p_0}; \; I_{q_{3/2}} = \frac{\sum q_3 p_0}{\sum q_2 p_0};$$

- *цепные индексы с переменными соизмерителями:*

$$I_{q_{1/0}} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}; \quad I_{q_{2/1}} = \frac{\sum q_2 p_1}{\sum q_1 p_1}; \; I_{q_{3/2}} = \frac{\sum q_3 p_2}{\sum q_2 p_2};$$

- *базисные индексы с постоянными соизмерителями:*

$$I_{q_{1/0}} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}; \; I_{q_{2/1}} = \frac{\sum q_2 p_0}{\sum q_0 p_0}; \quad I_{q_{3/2}} = \frac{\sum q_3 p_0}{\sum q_0 p_0};$$

- *базисные индексы с переменными соизмерителями:*

$$I_{q_{1/0}} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}; \; I_{q_{2/1}} = \frac{\sum q_2 p_1}{\sum q_0 p_1}; \; I_{q_{3/2}} = \frac{\sum q_3 p_2}{\sum q_0 p_2};$$

Между цепными и базисными агрегатными индексами существует такая взаимосвязь:

для индексов с <u>постоянными соизмерителями</u>

1. произведение цепных индексов равняется базисному индексу крайних периодов:

$$I_{q_{1/0}} * I_{q_{2/1}} * I_{q_{3/2}} = I_{q_{3/0}}$$

Или

$$\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} * \frac{\sum q_2 p_0}{\sum q_1 p_0} * \frac{\sum q_3 p_0}{\sum q_2 p_0} = \frac{\sum q_3 p_0}{\sum q_0 p_0}$$

2. Частное отделения последующего базисного индекса с постоянными соизмерителями на предыдущей равняется цепному индексу:

$$I_{q_{2/0}} : I_{q_{1/0}} = I_{q_{2/1}}$$

Или

$$\frac{\sum q_2 p_0}{\sum q_0 p_0} : \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{\sum q_2 p_0}{\sum q_1 p_0}$$

2. Цепные индексы цен с переменными весами имеют следующий вид:

$$I_{p\cdot 1/0}=\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1};\ I_{p\cdot 2/0}=\frac{\sum p_2q_2}{\sum p_0q_2};\ I_{p\cdot 3/2}=\frac{\sum p_3q_3}{\sum p_2q_3};\ldots I_{p\cdot n/n-1}=\frac{\sum p_nq_n}{\sum p_{n-1}q_n}.$$

При использовании весов базисного периода получаем ***цепные индексы цен с постоянными весами***

$$I_{p\cdot 1/0}=\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0};\ I_{p\cdot 2/1}=\frac{\sum p_2q_0}{\sum p_1q_0};\ I_{p\cdot 3/2}=\frac{\sum p_3q_0}{\sum p_2q_0};\ldots I_{p\cdot n/n-1}=\frac{\sum p_nq_0}{\sum p_{n-1}q_0}.$$

Отметим, что использование постоянных весов более предпочтительно, так как рассчитываемые таким образом **индексы** мультипликативны, т. е. их **можно последовательно перемножать** и получать величину показателя за более продолжительный период.

Так, например, располагая индексами цен за три последовательных месяца, можно получить сводную оценку изменения цены в целом за квартал.

Индексы с переменными весами такой возможности не предоставляют.

Система ***базисных индексов с переменными весами*** имеет следующий вид:

$$I_{p\cdot 1/0}=\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1};\ I_{p\cdot 2/0}=\frac{\sum p_2q_2}{\sum p_0q_2};\ I_{p\cdot 3/0}=\frac{\sum p_3q_3}{\sum p_0q_3};\ \ldots\ I_{p\cdot n/0}=\frac{\sum p_nq_n}{\sum p_0q_n}.$$

Базисные индексы цен с постоянными весами рассчитываются по формулам:

$$I_{p\cdot 1/0}=\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0};\ I_{p\cdot 2/0}=\frac{\sum p_2q_0}{\sum p_0q_0};\ I_{p\cdot 3/0}=\frac{\sum p_3q_0}{\sum p_0q_0};\ \ldots\ I_{p\cdot n/0}=\frac{\sum p_nq_0}{\sum p_0q_0}.$$

С помощью индексов можно определить абсолютный прирост итогового показателя мультипликативной модели как в целом, так и по факторам этой модели.

Для модели товарооборота:

$$\Delta Q = Q_1 - Q_0 = \sum q_1 p_1 - \sum q_0 p_0 ;$$

$$\Delta Q(q) = Q_0 \cdot \left(I_q - 1\right) = \sum q_1 p_0 - \sum q_0 p_0 ;$$

$$\Delta Q(p) = Q_0 \cdot I_q \cdot \left(I_p - 1\right) = \sum q_1 p_1 - \sum q_1 p_0 .$$

6. Средневзвешенные индексы

Существуют две формы средневзвешенных индексов:

- среднеарифметическая и
- среднегармоническая.

Как правило, средний арифметический индекс применяется при индексации количественных показателей (например, физического объема продукции), а средний гармонический — при индексации качественных показателей (например, цен).

Средний арифметический индекс тождествен агрегатному индексу, если весами индивидуальных индексов будут слагаемые знаменателя агрегатного индекса.

Только в этом случае величина индекса, рассчитанная по формуле средней арифметической, будет равна агрегатному индексу.

Средний арифметический индекс физического объема продукции вычисляется по формуле

$$I_q = \frac{\sum i_q q_0 p_0}{\sum q_0 p_0}$$

Весами в формуле является стоимость продукции базисного периода.

Так как i_q х q_0 = q_1, то формула этого индекса легко преобразуется в формулу .

$$I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}$$

Средний арифметический индекс производительности труда определяется следующим образом:

$$I_t = \frac{\sum i_t t_1 q_1}{\sum t_1 q_1} = \frac{\sum i_t * T_1}{\sum T_1}$$

Так как i_t х t_1, = t_0, то формула этого индекса может быть преобразована в агрегатный индекс трудоемкости продукции. Весами являются общие затраты времени на производство продукции в текущем периоде.

В статистике широко известен и другой средний арифметический индекс, который используется при анализе производительности труда. Он носит название **индекса Струмилина** и определяется следующим образом:

$$I_v = \frac{\sum \left(\frac{q_1}{T_1} : \frac{q_0}{T_0} \right) * T_1}{\sum T_1}$$

Индексы других качественных показателей (цен, себестоимости и т. д.) определяются по формуле **средней гармонической взвешенной** величины.

Средний гармонический индекс тождествен агрегатному, если индивидуальные индексы будут взвешены с помощью слагаемых **числителя агрегатного индекса**. Тогда при расчете сводного индекса цен по методу Паше можно использовать следующую замену:

$$p_0 q_1 = \frac{p_1 q_1}{i_p}$$

Сводный индекс цен будет выражен *в форме средн ей гармонической*

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum \frac{1}{i_p} p_1 q_1},$$

*а инд*екс себестоимости можно исчислить так:

$$I_z = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum \frac{z_1 q_1}{i_z}}$$

Таким образом, весами при определении среднего гармонического индекса себестоимости являются издержки производства текущего периода, а индекса цен - стоимость продукции этого периода.

Средние индексы широко используются для анализа рынка ценных бумаг.

Наиболее известными являются индексы **Доу-Джонса, Стэндарда и Пура.**

7. Общие (сводные) индексы средних величин

В экономико-статистическом анализе приходится сравнивать в динамике такие обобщающие характеристики **качественных показателей как**

средняя цена,

средняя себестоимость,

средняя производительность труда

средняя заработная плата и др.

<u>Показывают изменение среднего значения индексируемого показателя.</u>

<u>Применяются только для качественных показателей.</u>

Индексы средних величин применяются при обобщении данных не по элементам, а по единицам совокупности.

Например: цена товара одного вида (элемента), продаваемого в разных торговых точках обобщается в виде средней (по предприятиям торговли) цены этого товара; себестоимость одного вида продукции обобщается в виде средней себестоимости данной продукции по совокупности производящих ее предприятий (т. е. по единицам совокупности).

Средняя цена товара может быть определена по формуле:

$$\overline{p} = \frac{\sum pq}{\sum q}$$

Рассмотрим следующий условный пример (табл. 2).

Таблица 2

Данные о реализации и ценах по товарной группе

Товар	Реализация в текущем периоде, руб.	Изменение цен в текущем периоде по сравнению с базисным, %
А	63000	+2,2
Б	88000	+5,6
В	55000	-3,1

Последняя графа таблицы содержит информацию об изменениях индивидуальных индексов цен или их приростах.

Рассчитаем значение сводного индекса

$$I_p = \frac{63\,000 + 88\,000 + 55\,000}{\frac{63\,000}{1{,}022} + \frac{88\,000}{1{,}056} + \frac{55\,000}{0{,}969}} = 1{,}021.$$

Мы получили значение сводного индекса цен в средней гармонической форме, соответствующее сводному индексу Пааше в агрегатной форме.

Для получения значения, соответствующего индексу Ласпейреса, индекс цен необходимо представить в средней арифметической форме. При этом используется следующая замена:

$$p_1 q_0 = i_p p_0 q_0$$

$$I_p = \frac{\sum i_p p_0 q_0}{\sum p_0 q_0}$$

Среднеарифметическая форма также может использоваться при расчете сводного индекса физического объема товарооборота. При этом производится замена

$$q_1 p_0 = i_0 q_0 p_0$$

Тогда ***сводный индекс физического объема товарооборота*** *в средней арифметической форме* имеет вид

$$I_q = \frac{\sum i_q q_0 p_0}{\sum q_0 p_0}$$

Таблица 3

Данные о реализации трех товаров в натуральном и стоимостном выражении

Товар	Реализация в текущем периоде, руб.	Изменение цен в текущем периоде по сравнению с базисным, %
А	63000	+2,2
Б	88000	+5,6
В	55000	-3,1

Индивидуальные индексы физического объема соответственно будут равны 1,086; 0,857; 0,929. С учетом этого рассчитаем среднеарифметический индекс:

$$I_q = \frac{1{,}086 \cdot 15 + 0{,}857 \cdot 23 + 0{,}929 \cdot 20}{15 + 23 + 20} = 0{,}941.$$

В результате расчета мы получили, что физический объем реализации товаров рассматриваемой товарной группы в среднем снизился на 5,9%.

7. Общие (сводные) индексы средних величин

В экономико-статистическом анализе приходится сравнивать в динамике такие обобщающие характеристики **качественных показателей как**

- **средняя цена,**
- **средняя себестоимость,**
- **средняя производительность труда**
- **средняя заработная плата и др.**

<u>Показывают изменение среднего значения индексируемого показателя.</u>

<u>Применяются только для качественных показателей.</u>

Индексы средних величин применяются при обобщении данных не по элементам, а по единицам совокупности.

Например: цена товара одного вида (элемента), продаваемого в разных торговых точках обобщается в виде средней (по предприятиям торговли) цены этого товара; себестоимость одного вида продукции обобщается в виде средней себестоимости данной продукции по совокупности производящих ее предприятий (т. е. по единицам совокупности).

Средняя цена товара может быть определена по формуле:

$$\overline{p} = \frac{\sum pq}{\sum q}$$

Данное выражение можно представить в виде **мультипликативной модели**:

,

$$\bar{p} = \sum p \cdot \frac{q}{\sum q} = \sum p \cdot d$$

где $d_i = \frac{q_i}{\sum q}$ – доли (удельные веса) объемов продажи, которые характеризуют структуру продажи данного товара.

$$I_{\bar{p}} = \frac{\bar{p}_1}{p_0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} \div \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{\sum p_1 d_1}{\sum p_0 d_0}$$

Такие индексы образуют индексную систему, которая для качественных показателей состоит из трех элементов:

- индексов переменного состава $I_x^{ПС}$;
- индексов фиксированного (постоянного) состава $I_x^{ФС}$;
- индексов структурных сдвигов $I_x^{СС}$,

где *x* — вид рассматриваемого признака (цена, себестоимость, производительность труда и т. п.).

Индекс переменного состава $I_x^{ПС}$ показывает относительное изменение рассматриваемого среднего уровня признака в целом за счет двух факторов — изменения индексируемого признака и изменения в структуре совокупности:

$$I_{x}^{nc} = \overline{x_1} \div \overline{x_0} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} \div \frac{\sum x_0 f_0}{\sum f_0}$$

где x_1, x_0 — средние признаки соответственно в текущем и базисном периодах;
f_1, f_0 — веса признака в сопоставляемых периодах.

$$I_{\bar{p}} = \frac{\bar{p}_1}{p_0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} \div \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{\sum p_1 d_1}{\sum p_0 d_0}$$

Индекс фиксированного состава $I_x^{ФС}$ характеризует изменение среднего уровня за счет изменения только индексируемой величины (соизмерители неизменны) при той же структуре совокупности:

$$I_x^{фс} = \overline{x}_1 \div \overline{x}_0 = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} \div \frac{\sum x_0 f_1}{\sum f_1}$$

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} \div \frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1} = \frac{\sum p_1 d_1}{\sum p_0 d_1}$$

<u>Индекс структурных сдвигов I_x^{C3}</u> показывает изменение среднего уровня за счет изменений в структуре совокупности при неизменном значении признака:

$$I_x^{cc} = \overline{x_1} \div \overline{x_0} = \frac{\sum x_0 f_1}{\sum f_1} \div \frac{\sum x_0 f_0}{\sum f_0}$$

$$I_{структуры} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1} \div \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{\sum p_0 d_1}{\sum p_0 d_0}$$

Рассмотрим такой случай, когда один товар или вид продукции реализуется или производится в нескольких местах (табл. 6.4).

Таблица 6.4

Данные о ценах и объемах реализации товара «Z» в двух регионах

Регион	1 квартал		II квартал	
	Цена, тыс. руб.	Продано, тыс. шт.	Цена, тыс. руб.	Продано, тыс. шт.
1	15	45	17	86
2	30	98	33	47

Проведем анализ изменения цен на данный товар.

Из табл. 6.4 видно, что цена в каждом регионе возросла. Для сводной оценки этого роста воспользуемся средними показателями.

Индекс цен переменного состава представляет собой соотношение средних значений за два рассматриваемые периода

$$I_x^{ПС} = \frac{\overline{p}_1}{\overline{p}_0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} \div \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{\sum p_1 d_1}{\sum p_0 d_0} = \frac{17*86+33*47}{86+47} \div \frac{15*45+30*98}{45+98} = 22{,}65/25{,}28 = 0{,}896$$

На динамике средней цены данного товара отразились структурные сдвиги в рассматриваемой совокупности. Оценить воздействие этого фактора можно с помощью ***индекса структурных сдвигов***

$$I_{структуры} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1} \div \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{\sum p_0 d_1}{\sum p_0 d_0} = \frac{15*86+30*47}{86+47} \div \frac{15*45+30*98}{45+98} = 20{,}3/25{,}28 = 0{,}803$$

Последним в данной системе является ***индекс цен фиксированного состава,*** который не учитывает влияние структуры

$$I_{\bar{p}} = \frac{\overline{p_1}}{\overline{p_0}} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} \div \frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1} = \frac{\sum p_1 d_1}{\sum p_0 d_1} = \frac{17 * 86 + 33 * 47}{86 + 47} \div \frac{15 * 86 + 30 * 47}{86 + 47} = 22{,}65 / 20{,}3 = 1{,}116$$

Полученное значение индекса позволяет сделать вывод о том, что если бы структура реализации товара *«Z»* по регионам не изменилась, средняя цена возросла бы на 11,6%.

Однако влияние на среднюю цену фактора структурных изменений оказалось сильнее и в итоге цена даже несколько снизилась.

Формулы для средних индексов подчиняются принципу взаимозависимости, который обеспечивает их сведение в *индексную систему:*

$$I_x^{ПС} = I_x^{ФС} * I_x^{СС}$$

Абсолютные изменения средней цены в целом и по факторам определяются формулами:

$$\Delta\overline{p} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} - \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0};$$

$$\Delta\overline{p}(p) = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} - \frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1};$$

$$\Delta\overline{p}(d) = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1} - \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0}.$$

Очевидно, справедливо соотношение:

$$\Delta\overline{p} = \Delta\overline{p}(p) + \Delta\overline{p}(d)$$

8. Индексный анализ территориальных различий

Первый вариант расчета территориальных индексов заключается в том, что в качестве весов принимаются объемы проданных товаров i-го вида (I = 1, 2,..., *n)* по двум регионам, вместе взятым

$$Q_i = q_{ia} + q_{ib}$$

Территориальный индекс цен в этом случае рассчитывается по следующей формуле:

$$I_{pb/a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{ib} Q_i}{\sum_{i=1}^{n} p_{ia} Q_i}$$

Рассмотрим пример расчета данного индекса по данным о ценах и объемах реализации товаров по двум регионам за определенный период

Таблица 6.5

Данные о ценах и объемах реализации товаров в двух регионах

Товар	Регион *А*		Регион В	
	Цена, руб. (p_{ia})	Реализация, т (q_{ia})	Цена, руб. (p_{ib})	Реализация, т (q_{ib})
1	7	72	9	44
2	5	15	4	12
3	8	60	10	55

Суммарные объемы реализации товаров по двум регионам соответственно составят

$$72+44=116;$$

$$15+12=27;$$

$$60+55=115.$$

С учетом этих объемов реализации рассчитаем территориальным индекс цен региона *B* по отношению к региону А по приведенной ранее формуле:

$$I_{pb/a} = \frac{9*116+4*27+10*115}{7*116+5*27+8*115} = \frac{2302}{1867} = 1{,}233(123{,}3\%)$$

На основании данного расчета можно заключить, что цены в регионе В на 23,3% превышают цены в регионе А.

Этому выводу не противоречит и обратный индекс

$$I_{pb/a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{ib} Q_i}{\sum_{i=1}^{n} p_{ia} Q_i} = \frac{1867}{2302} = 0{,}811(81{,}1\%)$$

При расчете территориальных индексов данным способом в их формуле вместо суммарных весов можно использовать некоторые теоретические или стандартизованные веса.

Например, при сравнении уровней цен по двум районам области в качестве таких весов может выступать структура продажи данных видов продукции по более крупному территориальному образованию, т. е. по данной области в целом. В этом случае индекс примет следующий вид

$$I_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{ia} Q_{i\,обл}}{\sum_{i=1}^{n} p_{ib} Q_{i\,обл}}$$

Основным недостатком рассмотренного подхода к расчету территориальных индексов является то, здесь не учтены региональные особенности структуры потребления изучаемых товаров.

Второй возможный способ расчета территориальных индексов учитывает соотношение весов на каждой из сравниваемых территорий.

При этом способе, прежде всего, необходимо рассчитать средние цены каждого товара по двум территориям, вместе взятым

$$\overline{p_i} = \frac{p_{ia}q_{ia} + p_{ib}q_{ib}}{q_{ia} + q_{ib}}$$

Расчет территориального индекса базируется на сравнении уровней цен каждого региона со средними ценами

$$I_{pb/a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{ib}q_{ib}}{\sum_{i=1}^{n} \overline{p_i}q_{ib}} \div \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{ia}q_{ia}}{\sum_{i=1}^{n} \overline{p_i}q_{ia}}$$

Рассчитаем средние цены товаров по данным табл. 6.5

$$\overline{p_1} = \frac{7*72+9*44}{116} = 7{,}8$$

$$\overline{p_2} = \frac{5*15+4*12}{27} = 4{,}6$$

$$\overline{p_3} = \frac{8*60+10*55}{115} = 9{,}0$$

С учетом рассчитанных средних цен вычислим индекс

$$I_{pb/a} = \frac{9*44+4*12+10*55}{7{,}8*44+4{,}6*12+9{,}0*55} \div \frac{7*72+5*15+8*60}{7{,}8*72+4{,}6*15+9{,}0*60} = 1{,}230$$

Рассчитанный вторым способом территориальный индекс цен индекс физического объема реализации и индекс товарооборота будут взаимосвязаны между собой

$$I_p * I_q = I_{pq}$$

При этом расчет индекса физического объема реализации должен производиться по следующей формуле:

$$I_{qb/a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{ib} \overline{p}_i}{\sum_{i=1}^{n} q_{ia} \overline{p}_i}$$

9. Индексы международного сопоставления

Индекс ЭКШ

$$EKS_{B/A} = \sqrt[4]{F^{2}_{B/A}\ F_{B/C}\ F_{C/A}\ F_{B/D}\ F_{D/A}}$$

где *EKSB/A* — индекс по формуле ЭКШ для страны В по отношению к стране А;

***FB,A* — индекс Фишера страны В по отношению к стране А;**

***FB/C* — индекс Фишера страны В по отношению к стране С;**

***FC/A* — индекс Фишера страны С по отношению к стране А;**

***FB/D* — индекс Фишера страны В по отношению к стране D;**

***FD/A* — индекс Фишера страны D по отношению к стране А.**

Наиболее разработанным и использованным на практике международных сопоставлений методом, в основе которого лежит концепция средней международной цены, является метод ***Гири—Камиса.***

$$P_i = \sum^{M} R_j p_{ij} q_{ij} \Big/ \sum_{j=1}^{M} q_{ij} \quad (i = 1, 2, ..., N);$$

$$R_i = \sum_{i=1}^{N} P_j q_{ij} \Big/ \sum_{i=1}^{N} p_{ij} q_{ij} \quad (j = 1, 2, ..., M)$$

где *Pi* — средняя международная цена i-го товара, выраженная в единицах условной международной валюты;

Rj — паритет покупательной способности валюты страны.*j* по отношению к некоторой условной международной валюте (коэффициент, характеризующий соотношение между ценами товаров — представителей различных стран);

Pij — цена i-го товара в стране *j*;

qij — количество i-го товара в стране *j;*

N— число стран, участвующих в сопоставлении;

M — число товаров (товарных групп).