



---

---

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«МИРЭА – Российский технологический университет»

РТУ МИРЭА

---

---

Институт информационных  
технологий прикладной  
математики

Семинар по курсу: «Математическая логика и теория  
алгоритмов»  
Алгебра логики. Часть 2

Подготовил:  
ассистент

Юрченко Ю.Н.

Москва 2020



# СДНФ

$$f = ((x \rightarrow y) \rightarrow z) x$$

$$\text{СДНФ} = x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz$$

$$\begin{aligned} f &= ((x \rightarrow y) \rightarrow z) x = (\overline{x \vee \bar{y}} \vee z) x = (x\bar{y} \vee z) x = \\ &= x\bar{y} \vee xz = x\bar{y}(z \vee \bar{z}) \vee xz(y \vee \bar{y}) = x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \\ &\vee xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \end{aligned}$$



# Полином Жегалкина

## Метод неопределенных коэффициентов

$$f = ((x \xrightarrow{(1)} y) \xrightarrow{(2)} z) x$$

x	y	z	(1)	(2)	f
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

$$f = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus a_4 x_1 x_2 \oplus a_5 x_1 x_3$$

$$\oplus a_6 x_2 x_3 \oplus a_7 x_1 x_2 x_3$$



# Полином Жегалкина

## Метод неопределенных коэффициентов

$$f = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus a_4 x_1 x_2 \oplus a_5 x_1 x_3 \oplus$$
$$\oplus a_6 x_2 x_3 \oplus a_7 x_1 x_2 x_3$$
$$f(000) = a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0$$
$$f(001) = a_0 \oplus a_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 0$$
$$f(010) = a_0 \oplus a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 0$$
$$f(011) = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_6 = 0$$
$$f(100) = a_0 \oplus a_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1$$
$$f(101) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_5 = 0$$
$$f(110) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_4 = 1$$
$$f(111) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_7 = 1$$

$$f = x_1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3$$



# Полином Жегалкина

## Метод треугольника

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$f = (00001101)$

00001101  
0001011  
001110  
01001  
1101  
011  
10  
1

$f = x \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3$

# Полином Жегалкина

## Построение по СДНФ

$$f = ((x \rightarrow y) \rightarrow z) x$$

X	Y	Z	f	$f=1$
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
1	0	1	1	$\bar{x}\bar{y}z$
1	1	0	0	
1	1	1	1	$x y z$

$$\text{СДНФ} = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xyz$$

1.)  $\bar{x} = x \oplus 1$

2.)  $x \vee y = x \oplus y \oplus xy$



# Полином Жегалкина

## Построение по СДНФ

$$\begin{aligned} f &= x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} = x(y \oplus 1)(z \oplus 1) \vee x(y \oplus 1)z \vee xy\bar{z} = \\ &= (xy \oplus x)(z \oplus 1) \vee xy\bar{z} \oplus xz \vee xy\bar{z} = xy\bar{z} \oplus xy \oplus xz \oplus x \vee xy\bar{z} \oplus xz \vee \\ &\vee xy\bar{z} = \cancel{xy\bar{z}} \oplus xy \oplus \cancel{xz} \oplus x \oplus \cancel{xy\bar{z}} \oplus \cancel{xz} \oplus (xy\bar{z} \oplus xy \oplus xz \oplus x) \vee \\ &\wedge (xy\bar{z} \oplus xz) \vee xy\bar{z} = xy \oplus x \oplus \underbrace{(xy\bar{z} \oplus xy\bar{z} \oplus xz \oplus xz)}_0 \vee xy\bar{z} = \\ &= xy \oplus x \oplus xy\bar{z} \oplus \underbrace{(xy \oplus x)}_0 \oplus xy\bar{z} = \\ &= xy \oplus x \oplus xy\bar{z} \end{aligned}$$



# Полином Жегалкина

## Дополнение

$$\begin{aligned} f &= ((x \rightarrow y) \rightarrow z) x = (\overline{x \vee y} \vee z) x = \overline{(x \vee y) \wedge \overline{z}} x = \\ &= \overline{x \vee y} \overline{z} x = ((x(y \oplus 1) \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus 1) x = \\ &= ((xy \oplus x \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus 1) x = (xyz \oplus xz \oplus z \oplus \\ &xy \oplus x \oplus \cancel{x} \oplus \cancel{x}) x = xyz \oplus \cancel{xz} \oplus \cancel{xz} \oplus xy \oplus x = \\ &= xyz \oplus xy \oplus x \end{aligned}$$

1.)  $x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\overline{x} \overline{y}}$

2.)  $\overline{x} = x \oplus 1$



# Минимизация ДНФ

## Метод покрытий

$$f = (x \rightarrow y) \rightarrow yz = \bar{x} \vee y \vee yz = x\bar{y} \vee yz = \underline{x\bar{y}z} \vee \underline{x\bar{y}\bar{z}} \vee \underline{xyz} \vee \underline{\bar{x}yz}$$

$$N_1 = (\bar{x}, y, z), N_2 = (x, \bar{y}, \bar{z}), N_3 = (x, \bar{y}, z), N_4 = (x, y, \bar{z})$$

Соседние:  $N_1$  и  $N_4$ ;  $N_2$  и  $N_3$ ,  $N_3$  и  $N_4$ .



# Минимизация ДНФ

## Метод покрытий

$$f = \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee yz \vee x\bar{y} \vee xz$$

$$f = yz \vee x\bar{y} \vee xz$$

$$P_1 = (x, \bar{y}), P_2 = (y, z), P_3 = (x, z)$$

	$N_1 = (\bar{x}, y, z)$	$N_2 = x, \bar{y}, \bar{z}$	$N_3 = (x, \bar{y}, z)$	$N_4 = (x, y, \bar{z})$
$P_1 = (x, \bar{y})$	0	1	1	0
$P_2 = (y, z)$	1	0	0	1
$P_3 = (x, z)$	0	0	1	1

$$B = \underline{1} \quad \bar{1} (1 \vee 3) (2 \vee 3) = (12 \vee 123) / (2 \vee 3) = 12 / (2 \vee 3) = 12 \vee 123 = 12$$

$$\text{ТЗНФ} = x\bar{y} \vee yz$$



# Минимизация ДНФ

Метод минимизирующих карт

$$N_1 = (\bar{x}, y, z) \quad N_2 = (x, \bar{y}, \bar{z}), \quad N_3 = (x, \bar{y}, z), \quad N_4 = (x, y, z)$$

	1	2	3	4	5	6	7
0	X	Y	Z	X	X	Y	X
1	X	<del>Y</del>	Z	X	X	<del>Y</del>	X
2	X	<del>Y</del>	Z	X	X	Y	X
3	X	<del>Y</del>	<del>Z</del>	X	X	<u>Y</u>	X
4	X	<del>Y</del>	<del>Z</del>	<u>X</u>	X	<del>Y</del>	X
5	X	<del>Y</del>	<del>Z</del>	<u>X</u>	<u>X</u>	<del>Y</del>	X
6	X	<del>Y</del>	Z	X	X	<u>Y</u>	X
7	X	<del>Y</del>	<del>Z</del>	X	<u>X</u>	<u>Y</u>	X

$$T = yz \vee x\bar{y} \vee xz$$

$$T = yz \vee x\bar{y}$$



**Спасибо за внимание!**