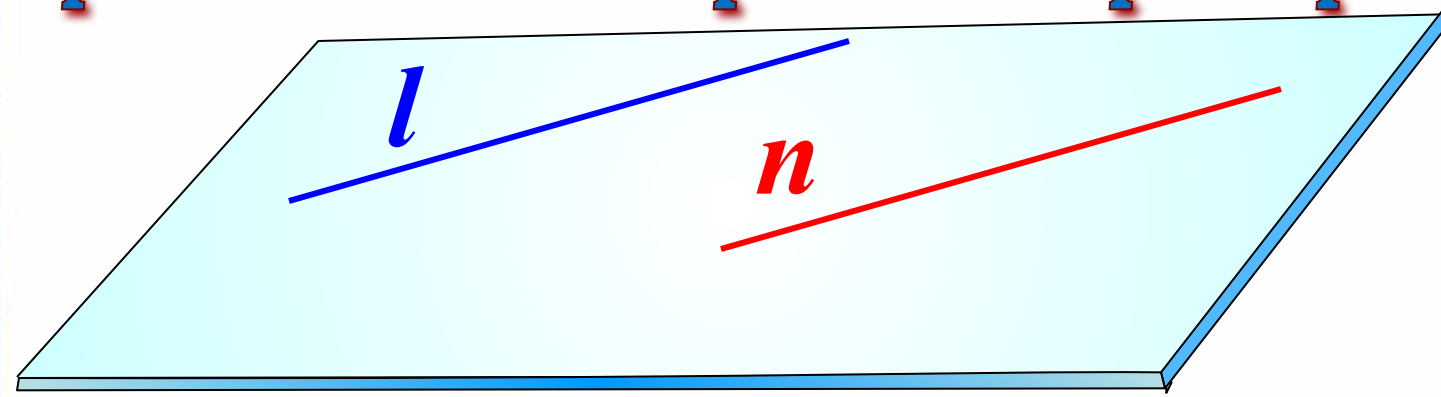


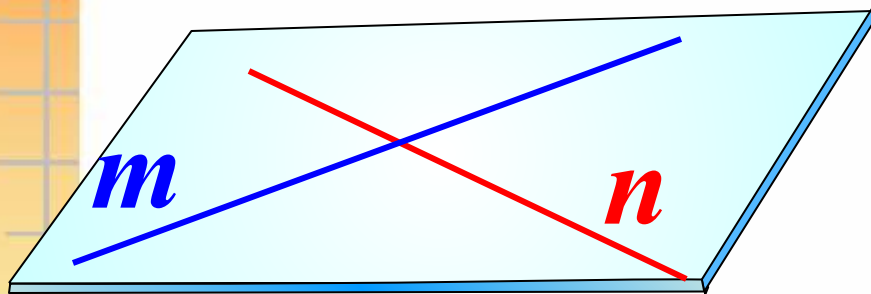


Параллельность прямых в пространстве

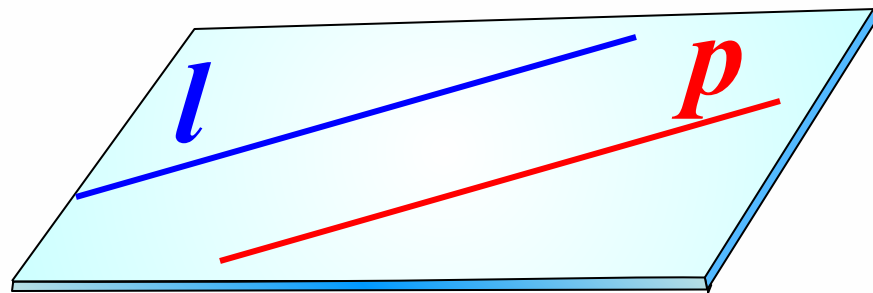




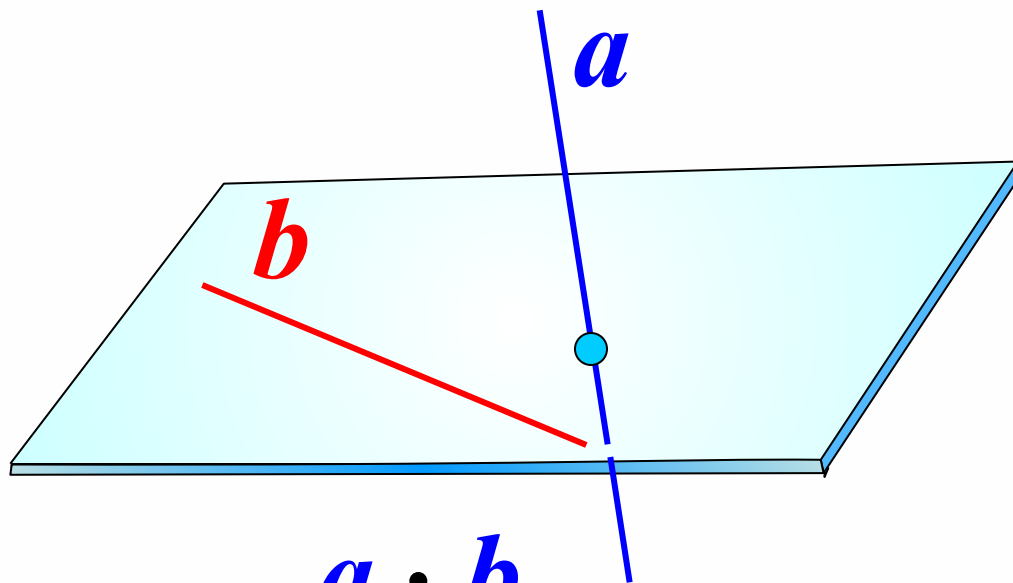
Три случая взаимного расположения прямых в пространстве



$$n \cap m$$



$$l \parallel p$$



$$a \perp b$$



Планиметрия

Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

allb

Стереометрия

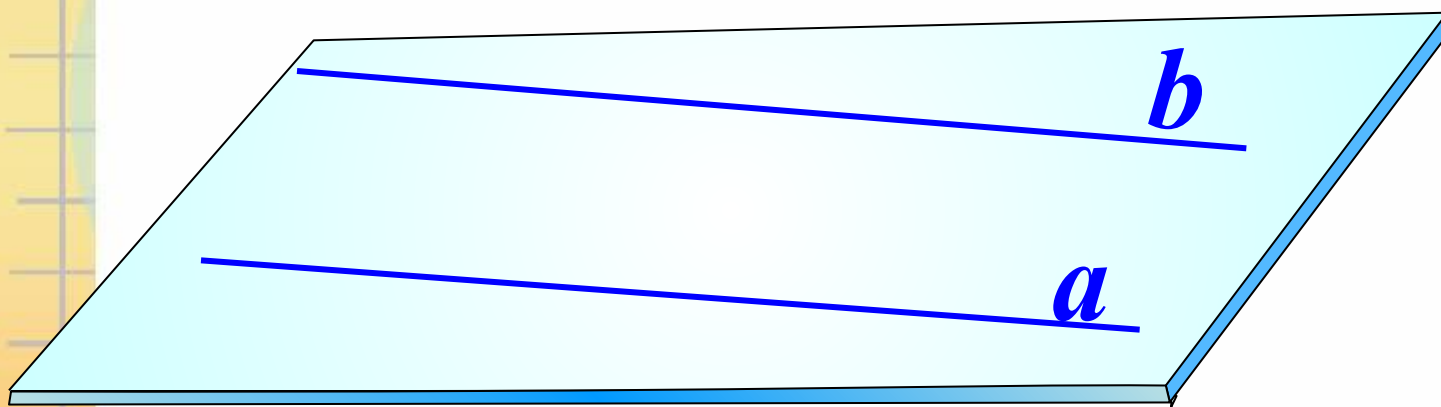
Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

allb

Определение

Две прямые в пространстве называются параллельными, если

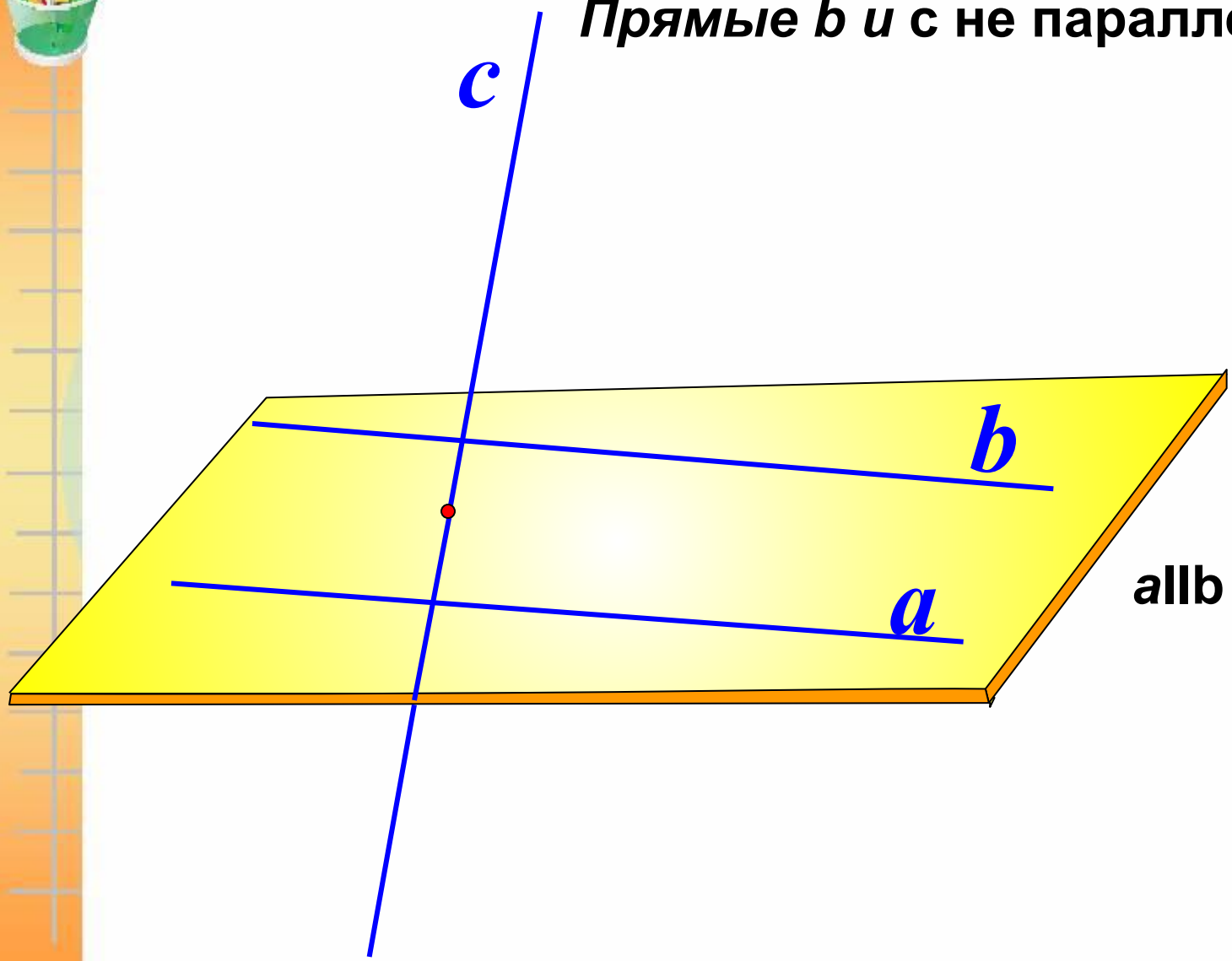
- 1) они лежат в одной плоскости и
- 2) не пересекаются



Прямые a и c не параллельны

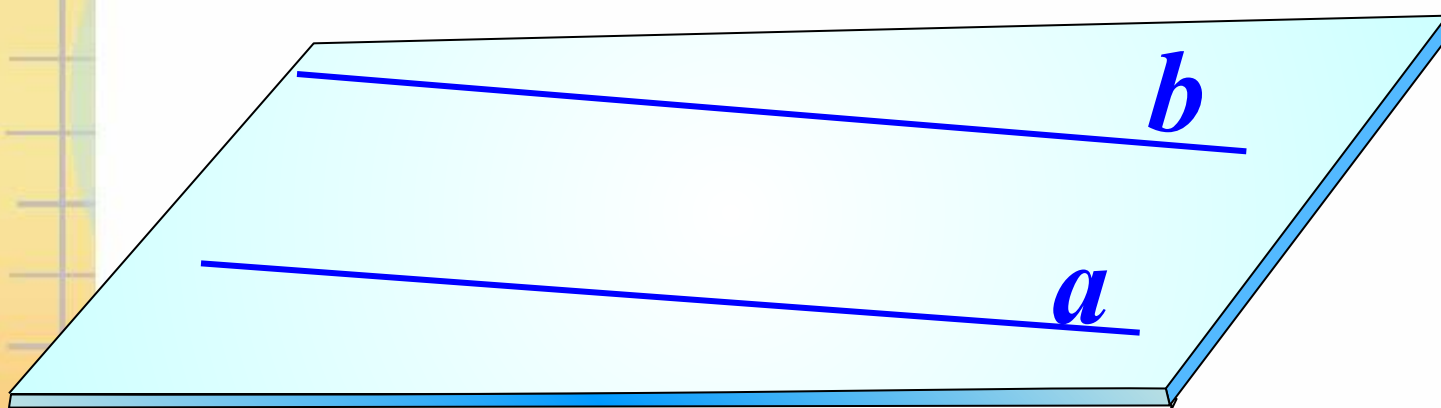


Прямые b и c не параллельны





Две параллельные прямые определяют плоскость.
(определение параллельных прямых)



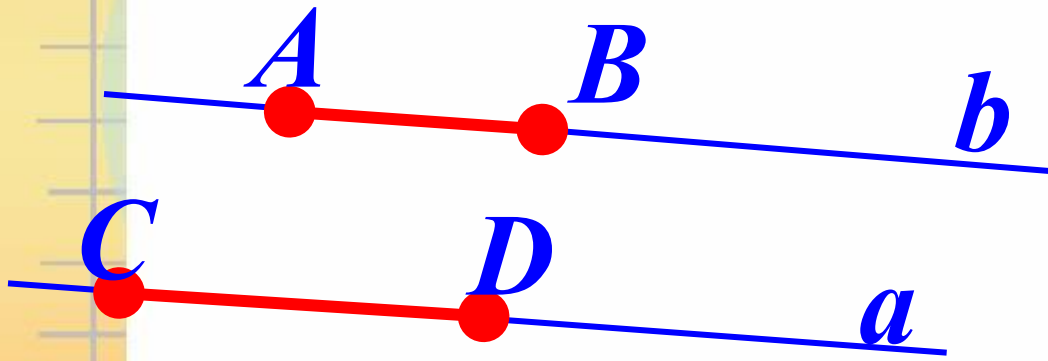
Показать (1)



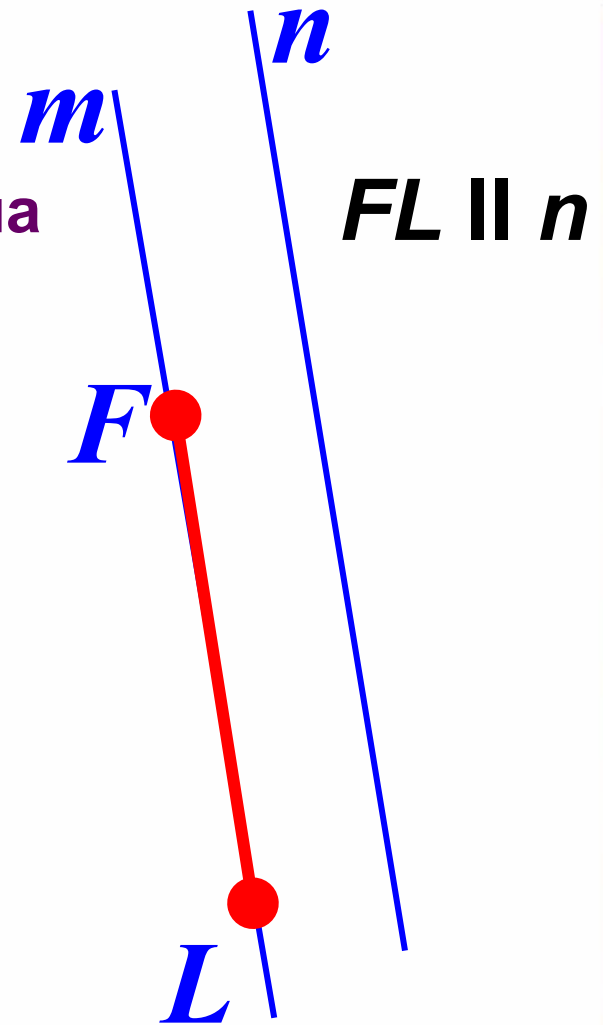
Определение

Два отрезка называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых.

$AB \parallel CD$



Отрезки AB и CD
параллельны

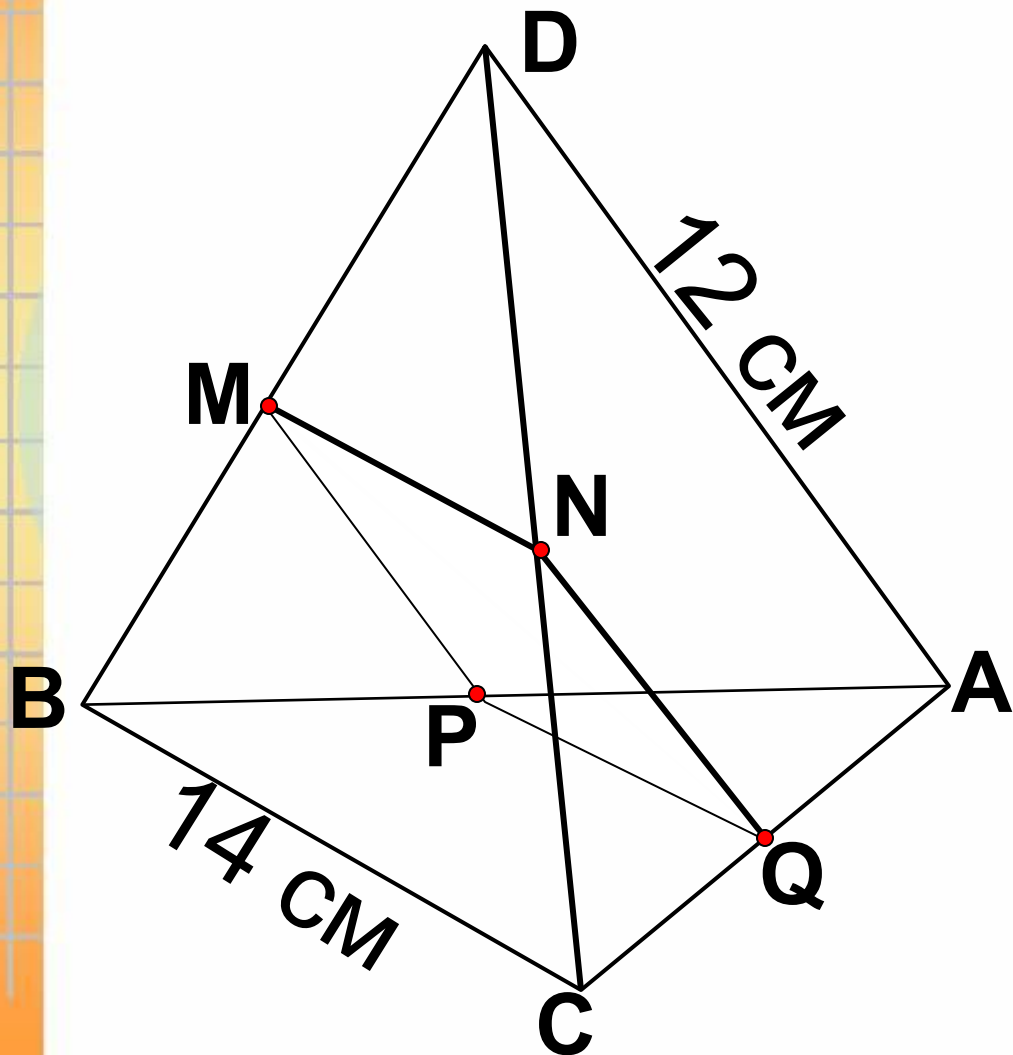


Отрезок FL параллелен
прямой n



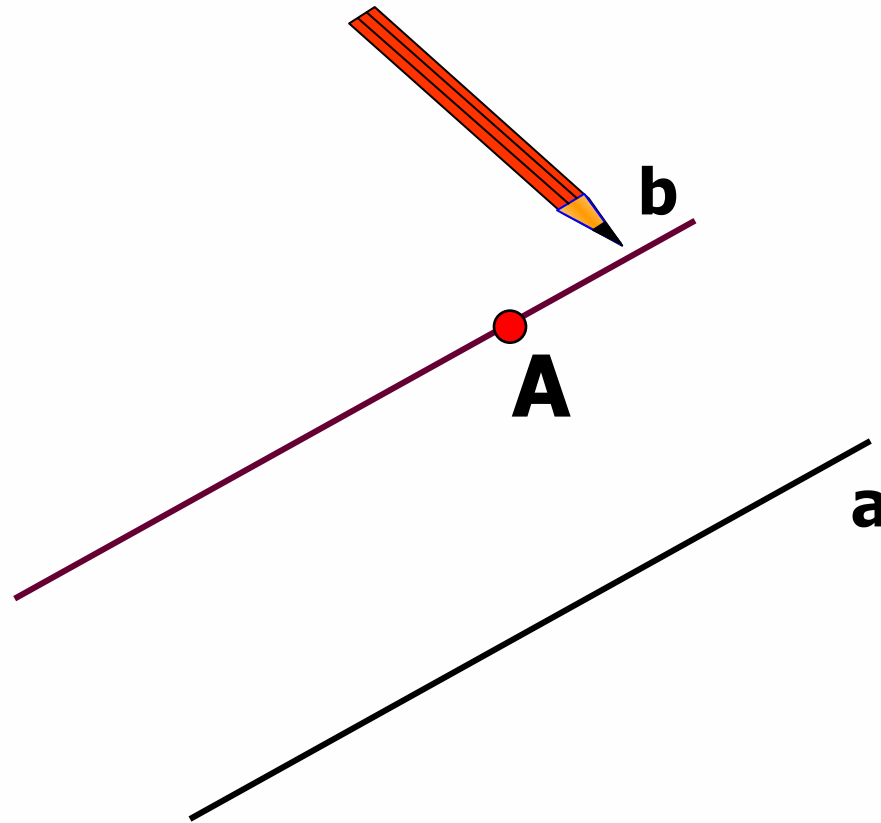
Точки M, N, P и Q – середины отрезков BD, CD, AB и AC.

$P_{MNQP} - ?$



Повторим. ПЛАНИМЕТРИЯ. Аксиома параллельности.

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.



Аксиома параллельности поможет доказать теорему о параллельных прямых

Теорема

Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Теорема

Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Доказательство

Рассмотрим прямую a и точку M , не лежащую на этой прямой (рис. 11). Через прямую a и точку M проходит плоскость, и притом только одна (п. 3). Обозначим эту плоскость буквой α . Прямая, проходящая через точку M параллельно прямой a , должна лежать в одной плоскости с точкой M и прямой a , т. е. должна лежать в плоскости α . Но в плоскости α , как известно из курса планиметрии, через точку M проходит прямая, параллельная прямой a , и притом только одна. На рисунке 11 эта прямая обозначена буквой b . Итак, b — единственная прямая, проходящая через точку M параллельно прямой a . Теорема доказана.

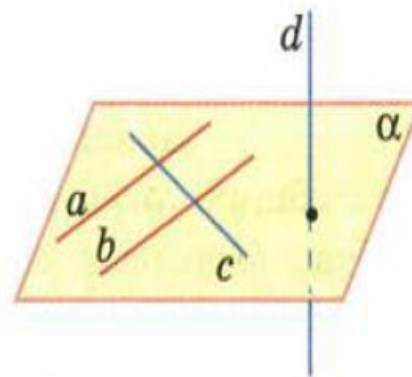
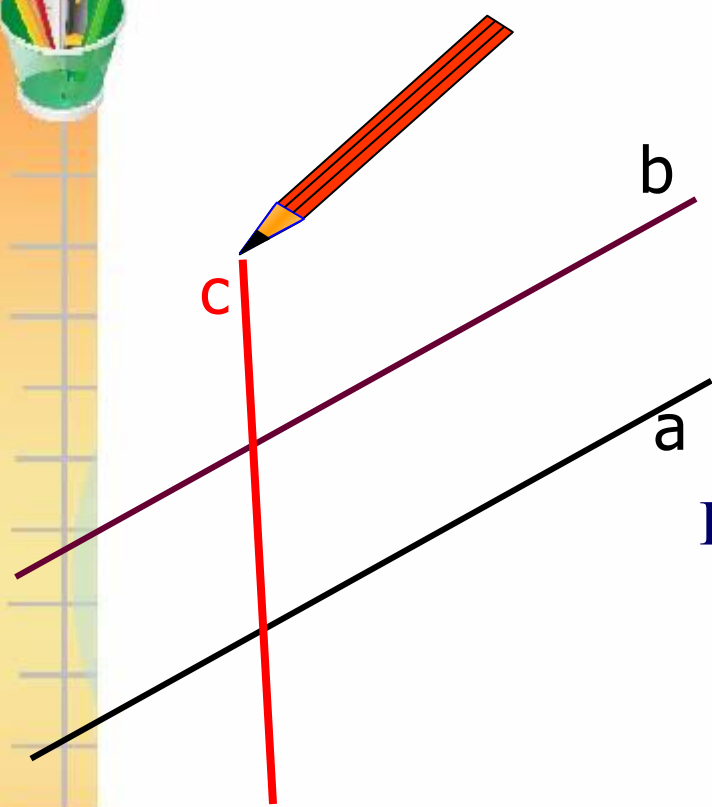


Рис. 10

Повторим. Следствие из аксиомы параллельности.



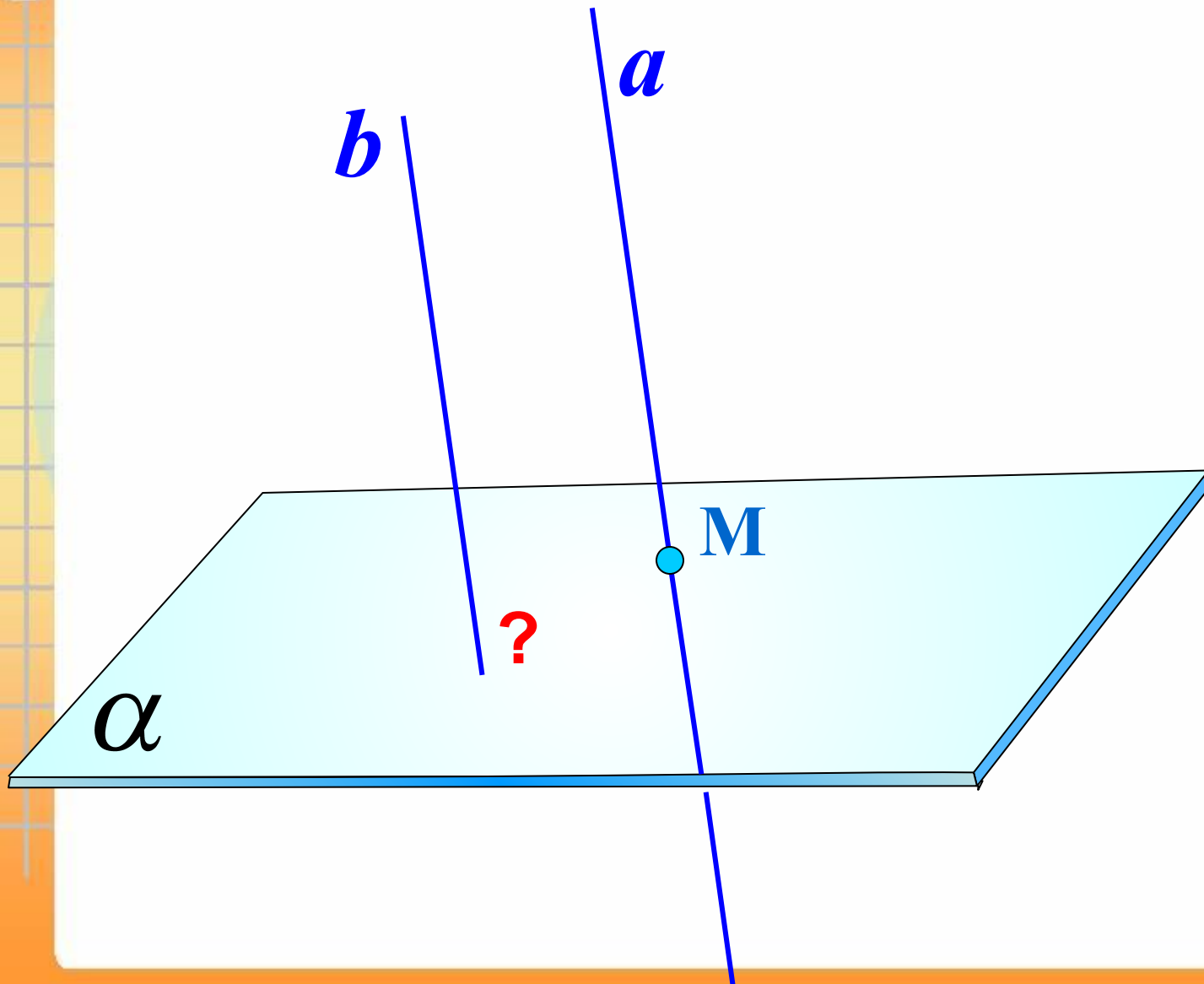
Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

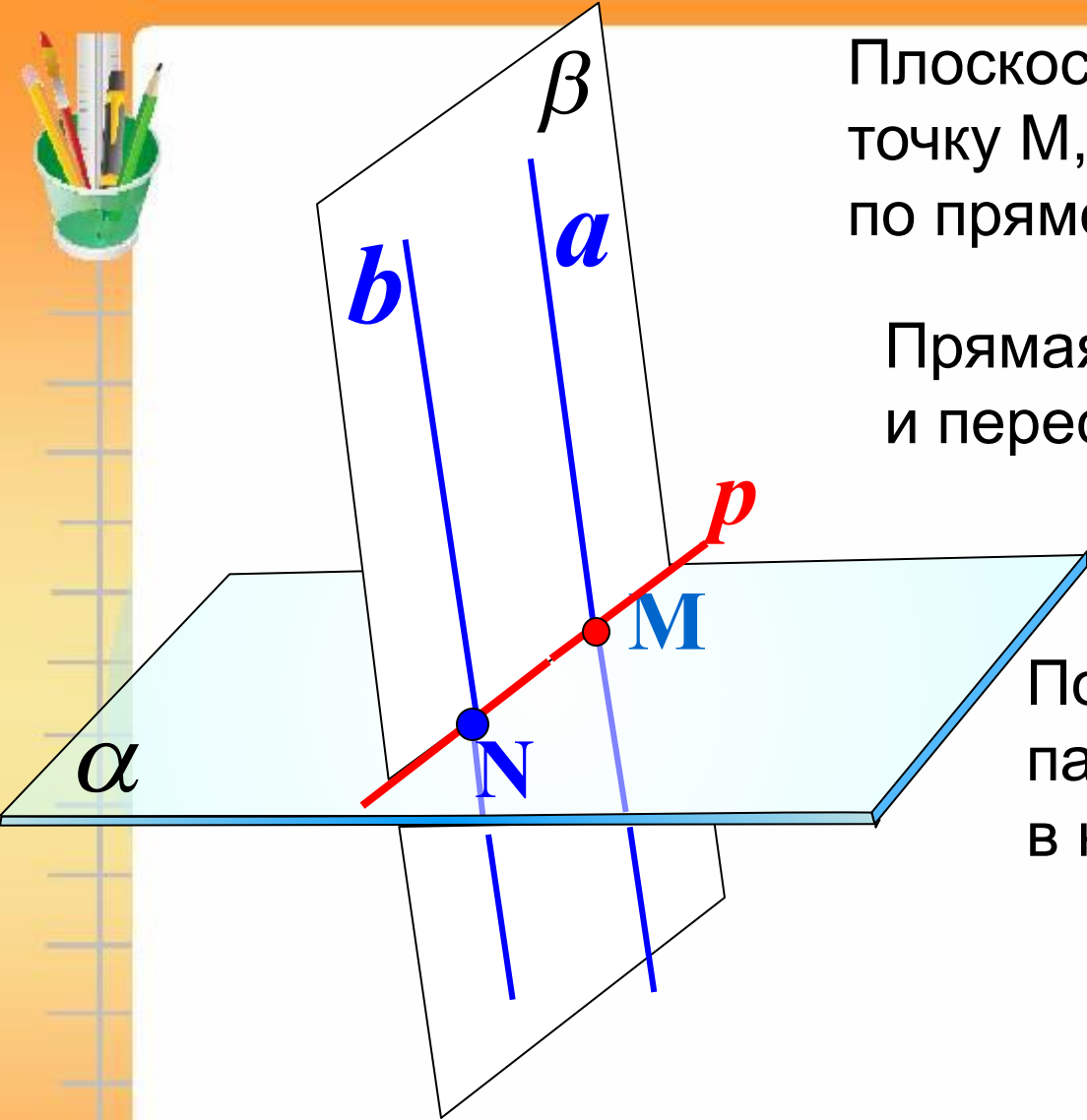
$$a \parallel b, c \cap b \implies c \cap a$$

Это следствие из аксиомы параллельности поможет доказать лемму о параллельных прямых

Лемма

Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает данную плоскость.





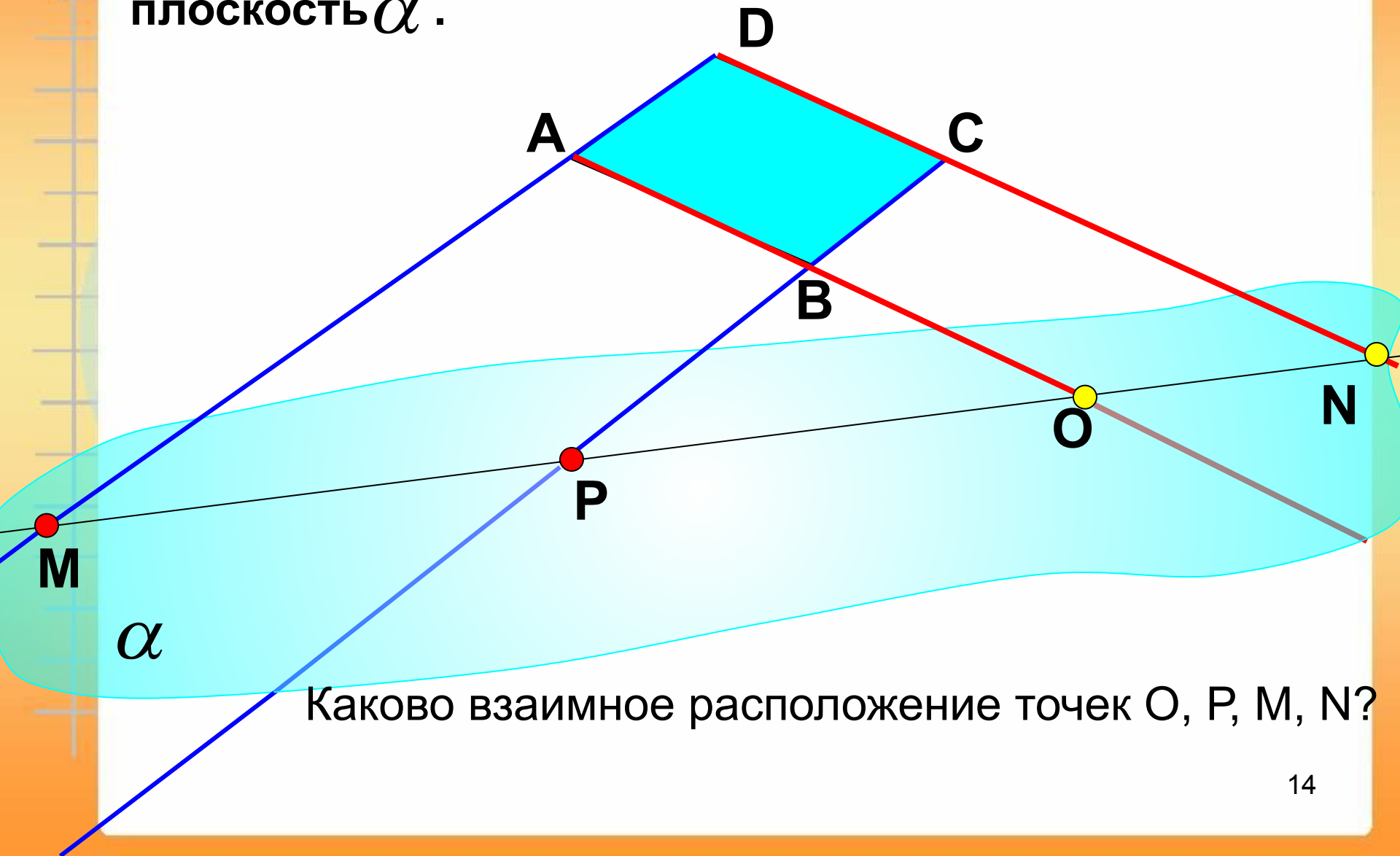
Плоскости α и β имеют общую точку M , значит они пересекаются по прямой (A_3)

Прямая r лежит в плоскости β и пересекает прямую a в т. M .

Поэтому она пересекает и параллельную ей прямую b в некоторой точке N .

Прямая r лежит также в плоскости α , поэтому N – точка плоскости α .
Значит, N – общая точка прямой b и плоскости α .

Прямые, содержащие стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ пересекают плоскость α . Докажите, что прямые AD и DC также пересекают плоскость α .

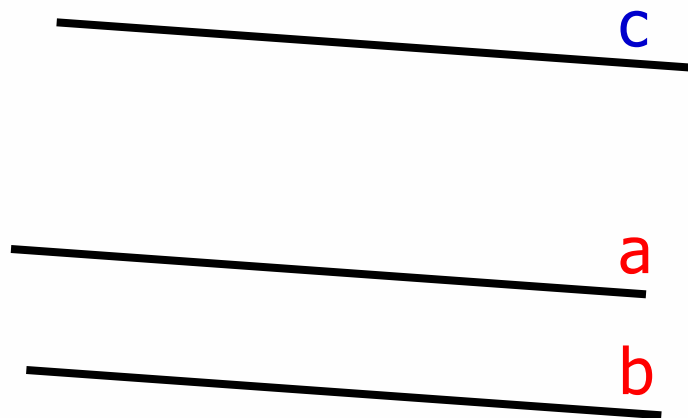


Каково взаимное расположение точек O , P , M , N ?



Повторим.

Следствие из аксиомы параллельности.



Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

$$a \parallel c, b \parallel c \Rightarrow a \parallel b$$

Аналогичное утверждение имеет место и для трех прямых в пространстве.



Теорема

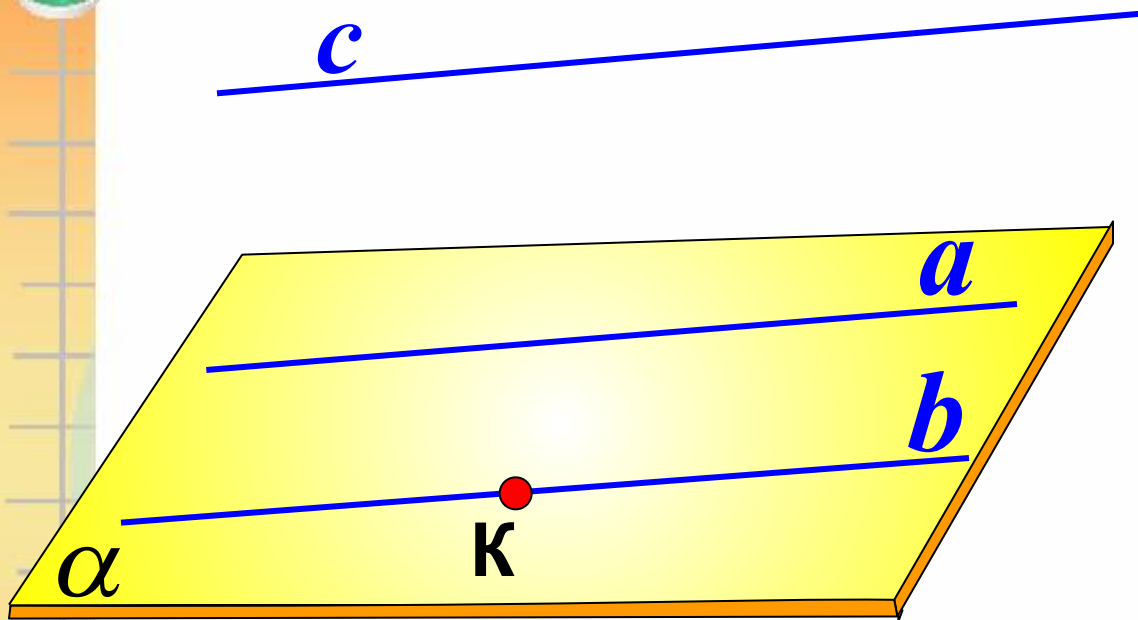
Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

$a \parallel c, b \parallel c$

Докажем, что $a \parallel b$

Докажем, что a и b

- 1) Лежат в одной плоскости
- 2) не пересекаются



1) Точка K и прямая a определяют плоскость.

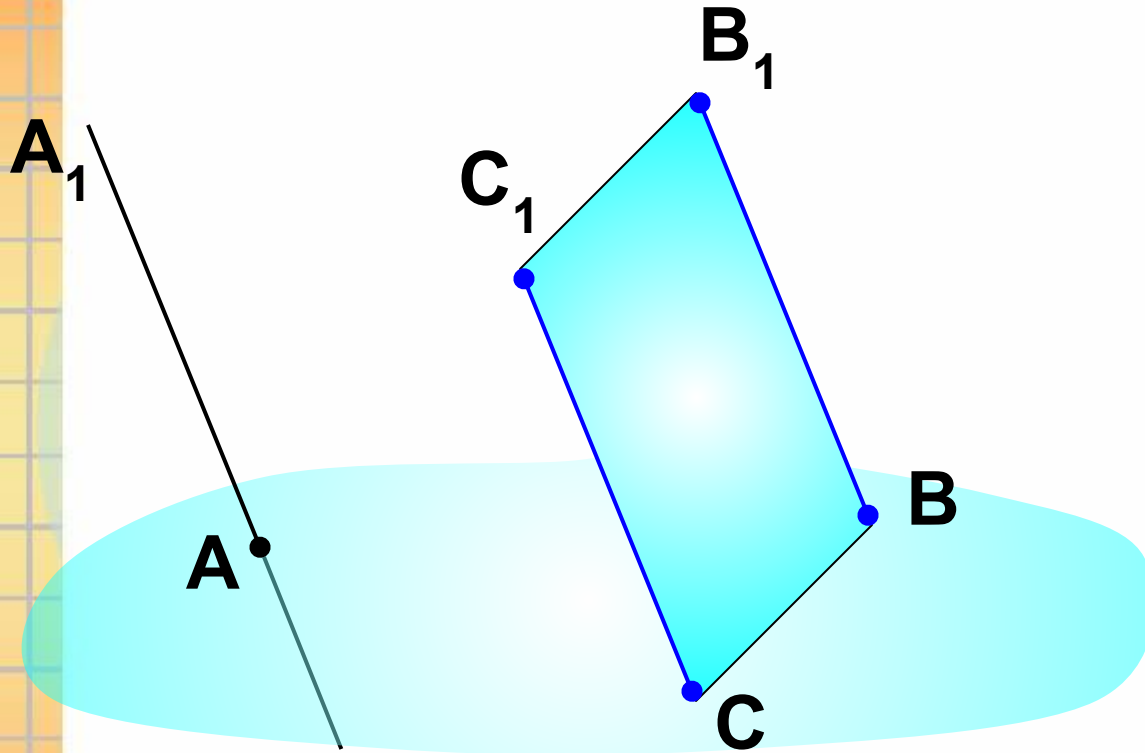
Докажем, что прямая b лежит в этой плоскости.

Допустим, что прямая b пересекает плоскость α . Тогда по лемме c также пересекает α . По лемме и a также пересекает α . Это невозможно, т.к. a лежит в плоскости α

2) Используя метод от противного объясните почему прямые a и b не пересекаются.

Дано: $AA_1 \parallel CC_1$, $AA_1 \parallel BB_1$, $BB_1 = CC_1$

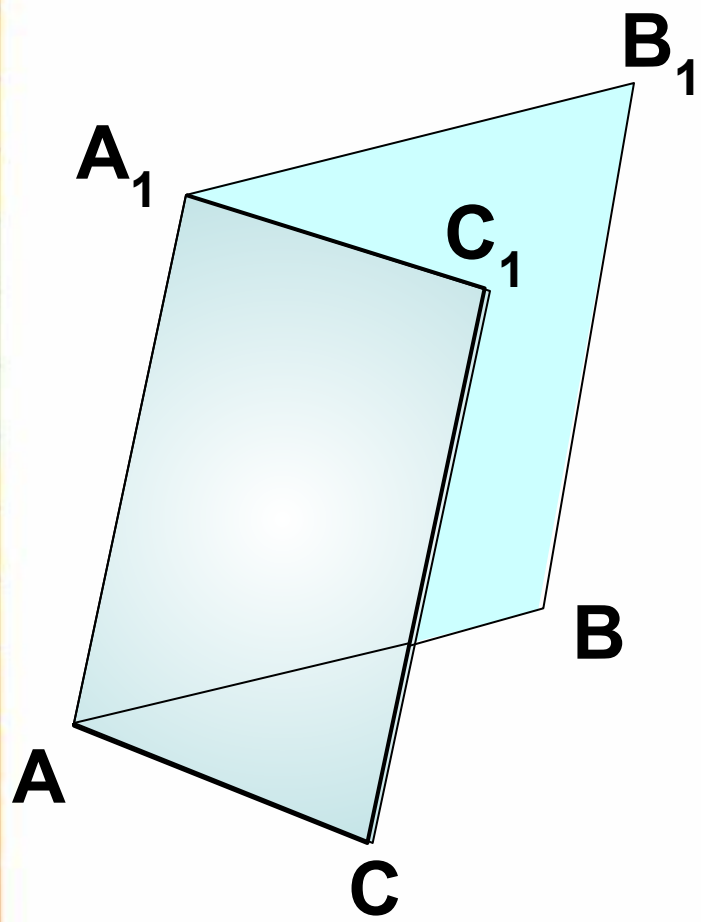
Доказать, что $B_1C_1 = BC$





Дано: $A_1C_1 = AC$, $A_1C_1 \parallel AC$, $A_1B_1 = AB$,
 $A_1B_1 \parallel AB$

Доказать, что $CC_1 = BB_1$

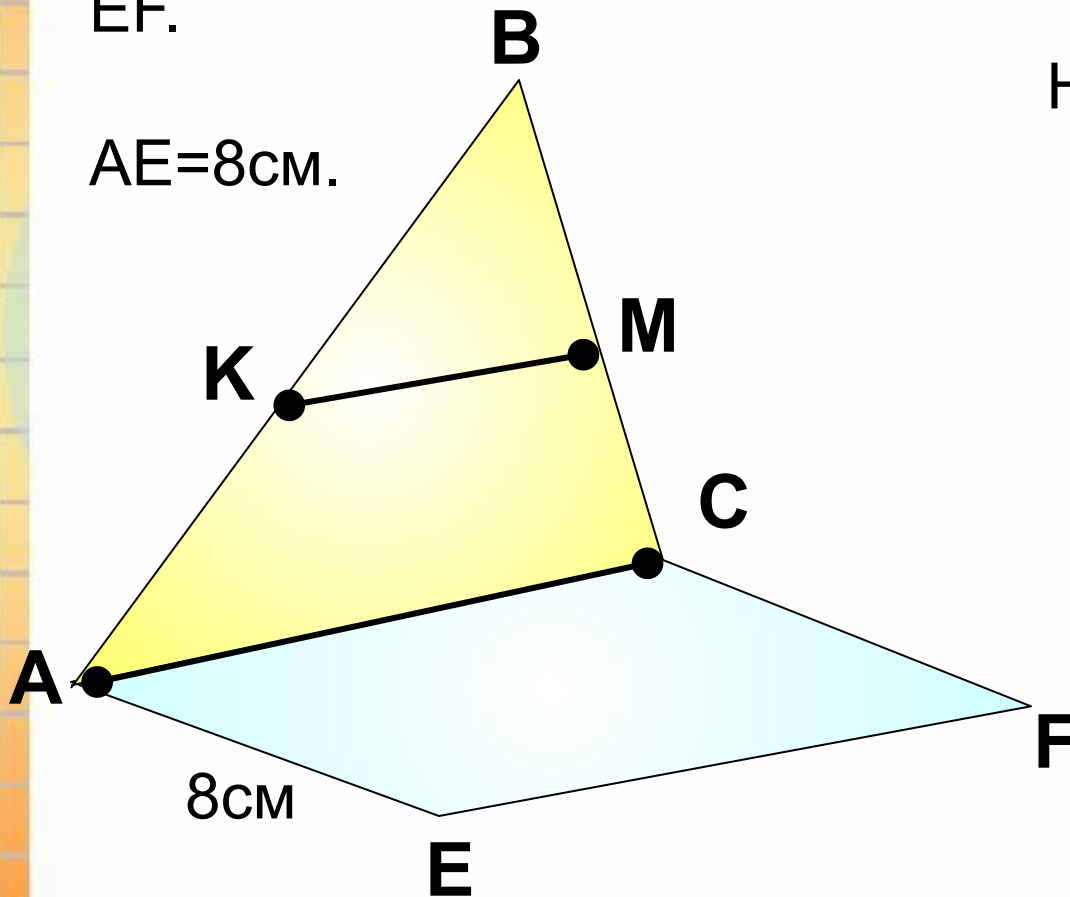




Треугольник ABC и квадрат $AEFC$ не лежат в одной плоскости. Точки K и M – середины отрезков AB и BC соответственно. Докажите, что $KM \parallel EF$.

$AE = 8\text{ см}$.

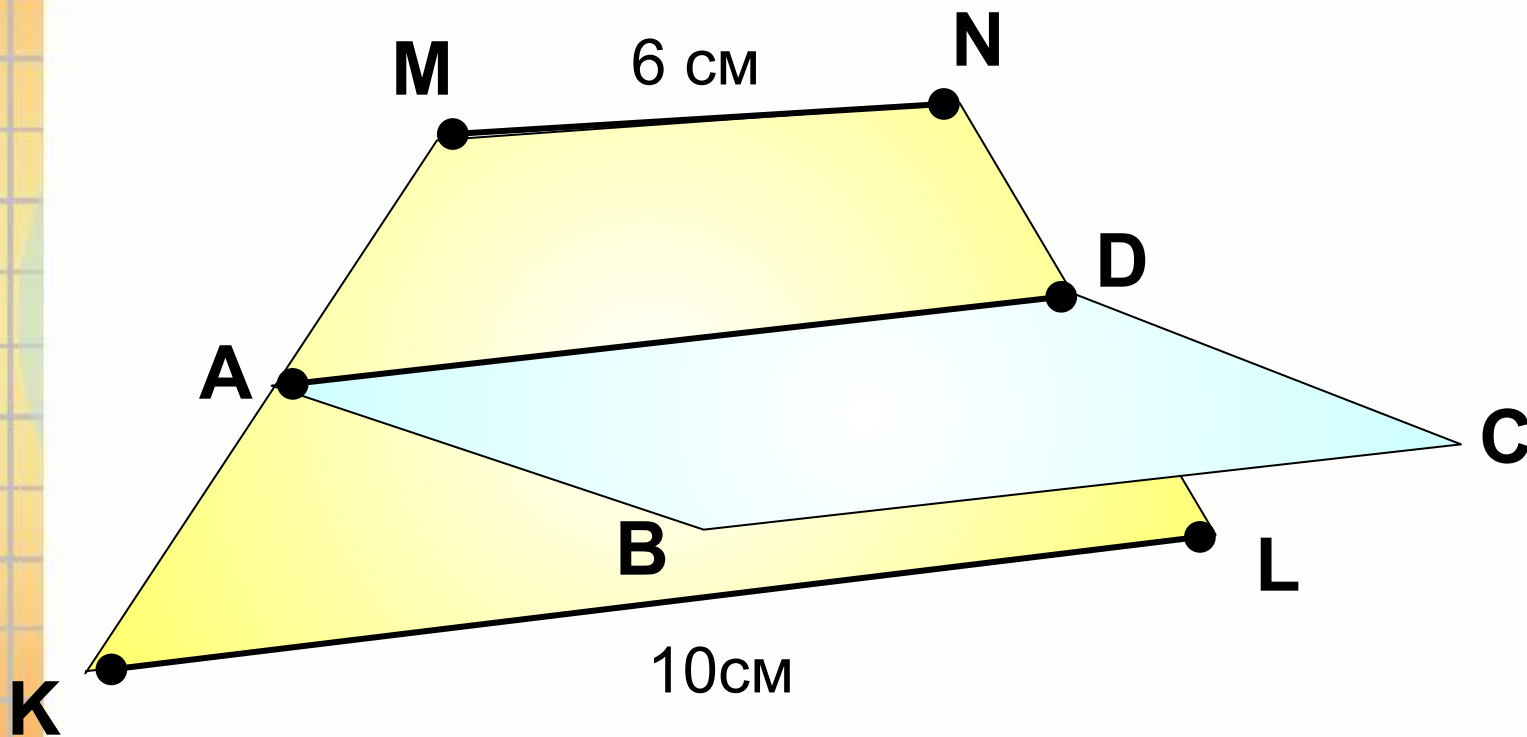
Найдите KM , если





Квадрат $ABCD$ и трапеция $KMNL$ не лежат в одной плоскости. Точки A и D – середины отрезков KM и NL соответственно. Докажите, что $KL \parallel BC$.

Найдите BC , если $KL=10$ см, $MN=6$ см.





Отрезок AB не пересекается с плоскостью α . Через концы отрезка AB и его середину (точку M) проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1 , B_1 и M_1 . а) Докажите, что точки A_1 , B_1 и M_1 лежат на одной прямой. б) Найдите AA_1 , если $BB_1 = 12\text{см}$, $MM_1 = 8\text{см}$.

