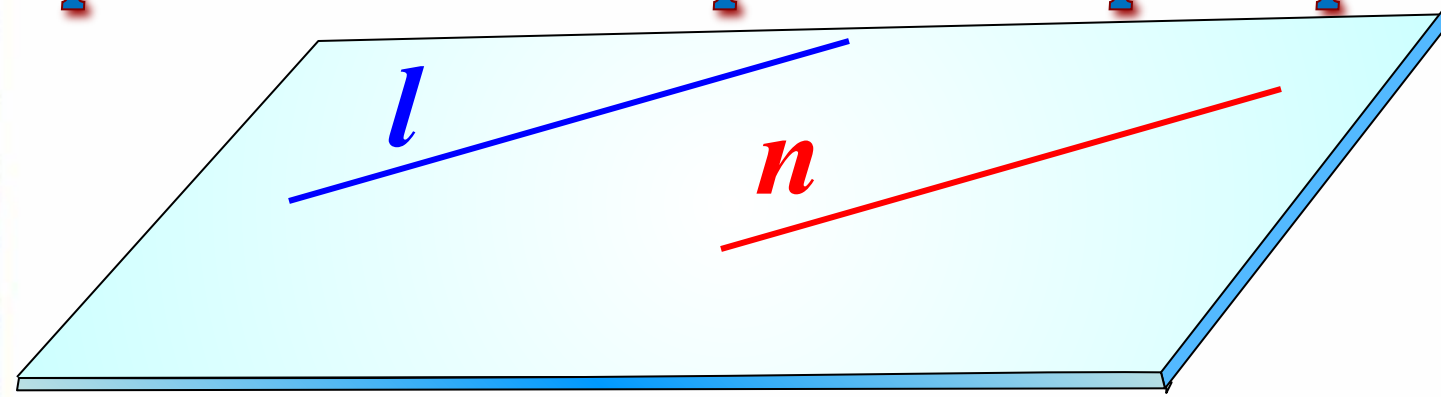


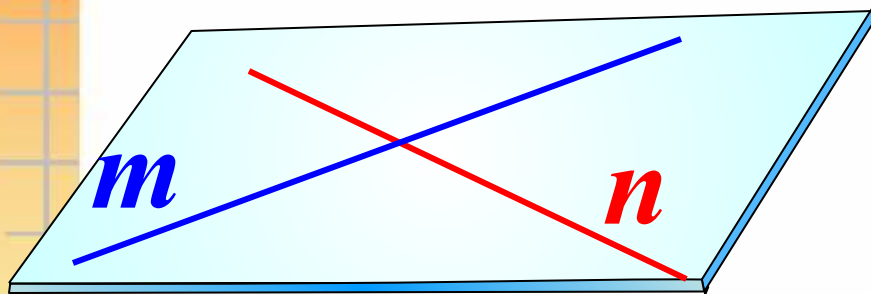


# Параллельность прямых в пространстве

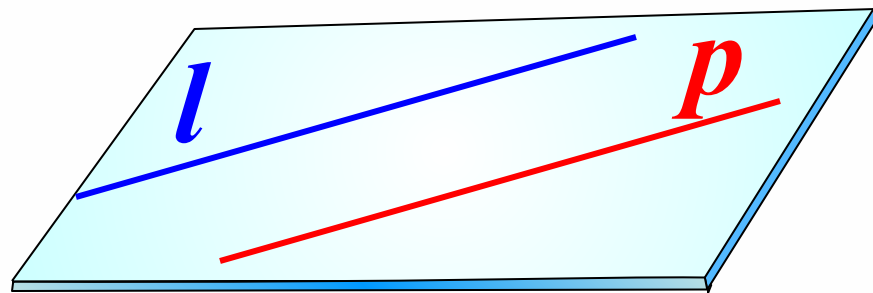




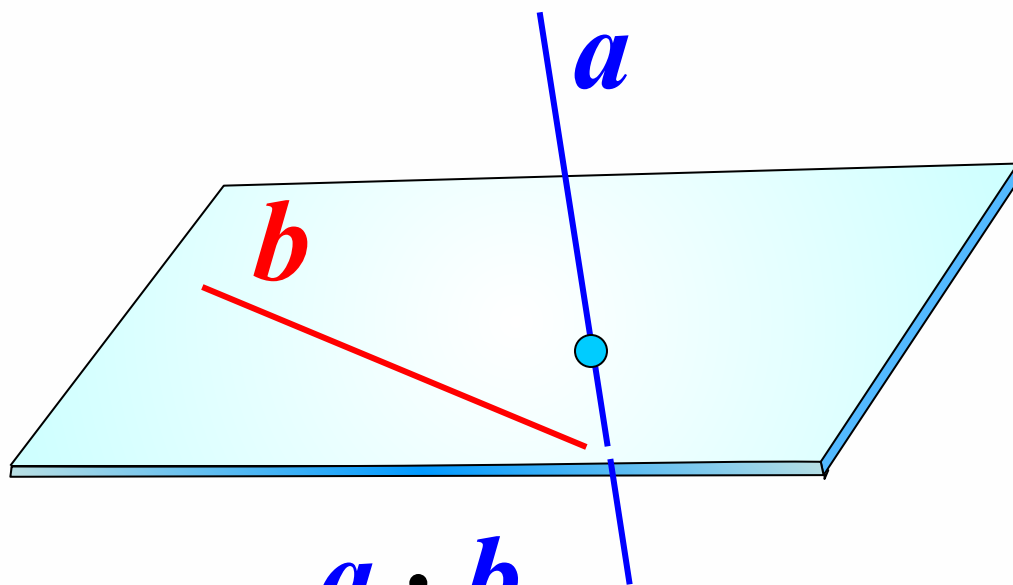
# Три случая взаимного расположения прямых в пространстве



$$n \cap m$$



$$l \parallel p$$



$$a \perp b$$



## Планиметрия

Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

**allb**

## Стереометрия

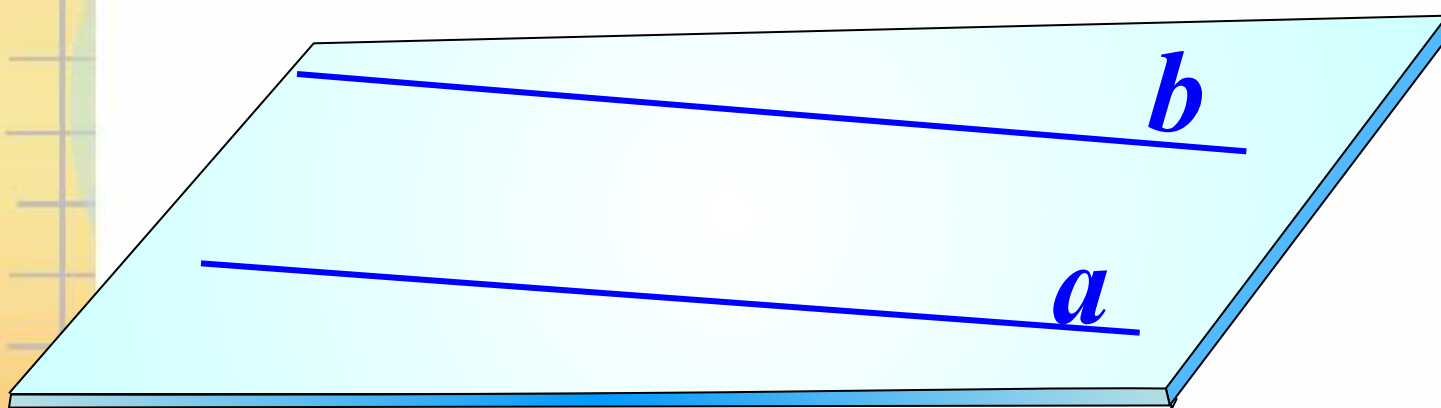
Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

**allb**

## Определение

Две прямые в пространстве называются параллельными, если

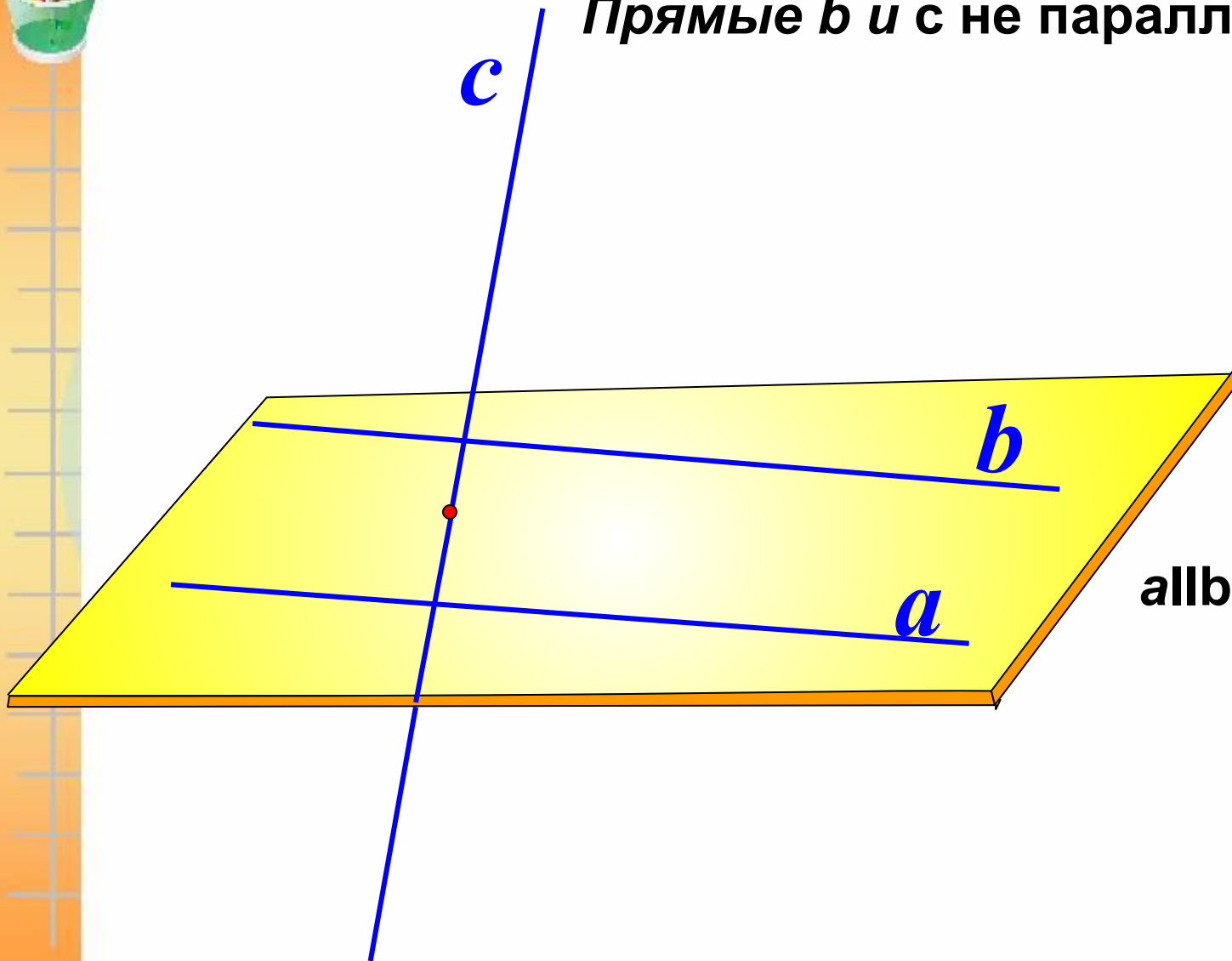
- 1) они лежат в одной плоскости и
- 2) не пересекаются



Прямые  $a$  и  $c$  не параллельны

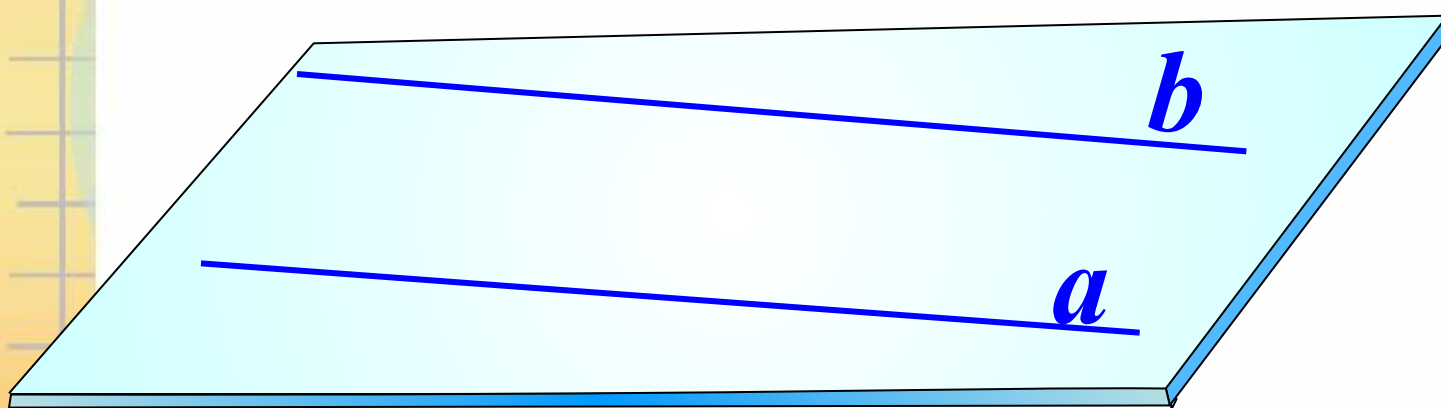


Прямые  $b$  и  $c$  не параллельны





Две параллельные прямые определяют плоскость.  
(определение параллельных прямых)



Показать (1)

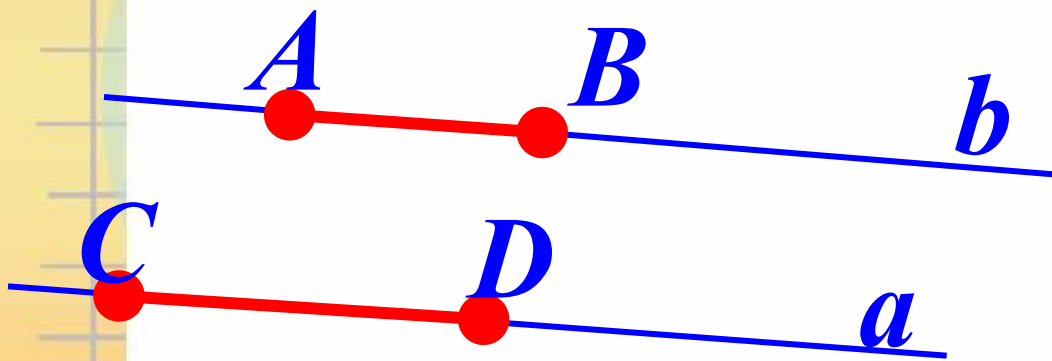




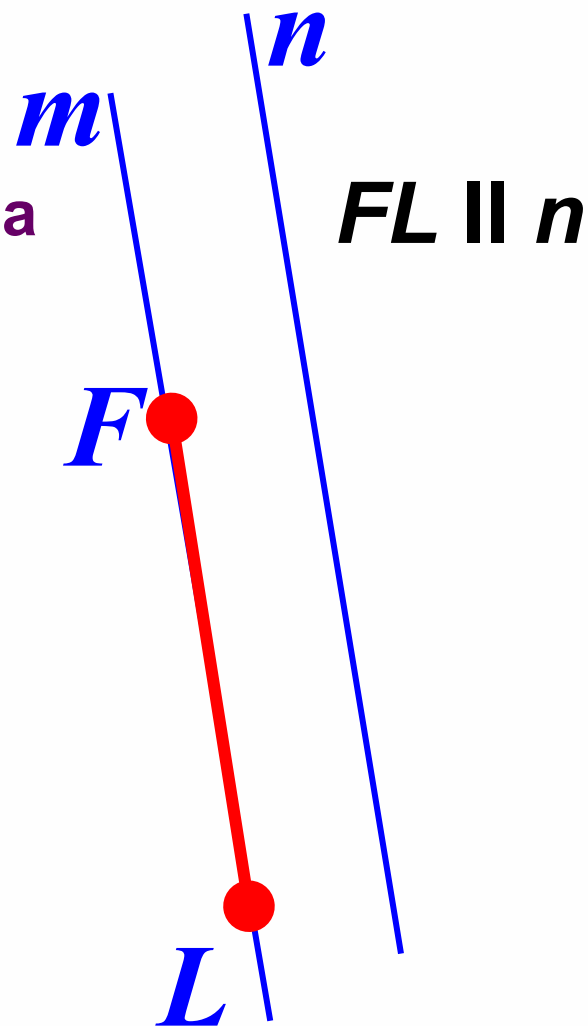
## Определение

Два отрезка называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых.

$AB \parallel CD$



Отрезки  $AB$  и  $CD$   
параллельны

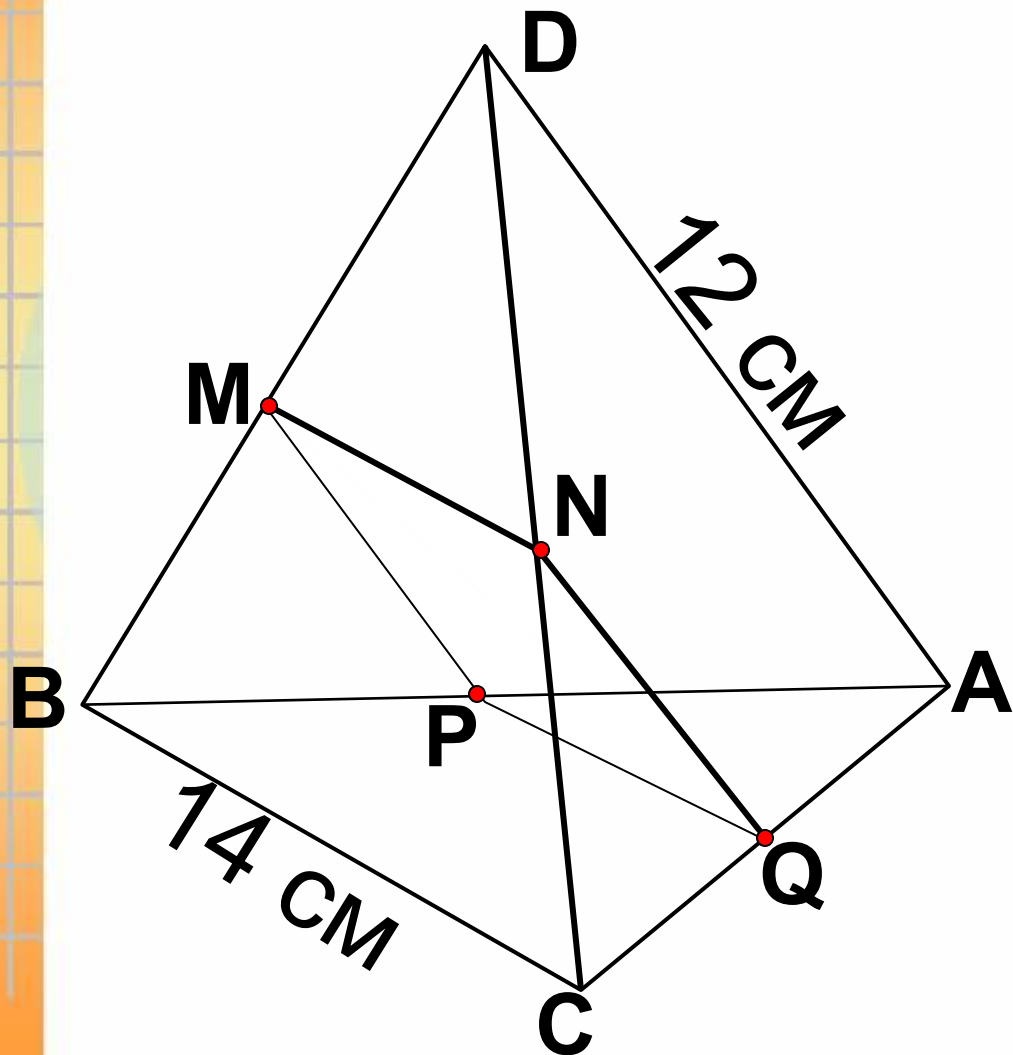


Отрезок  $FL$  параллелен  
прямой  $n$



Точки M, N, P и Q – середины отрезков BD, CD, AB и AC.

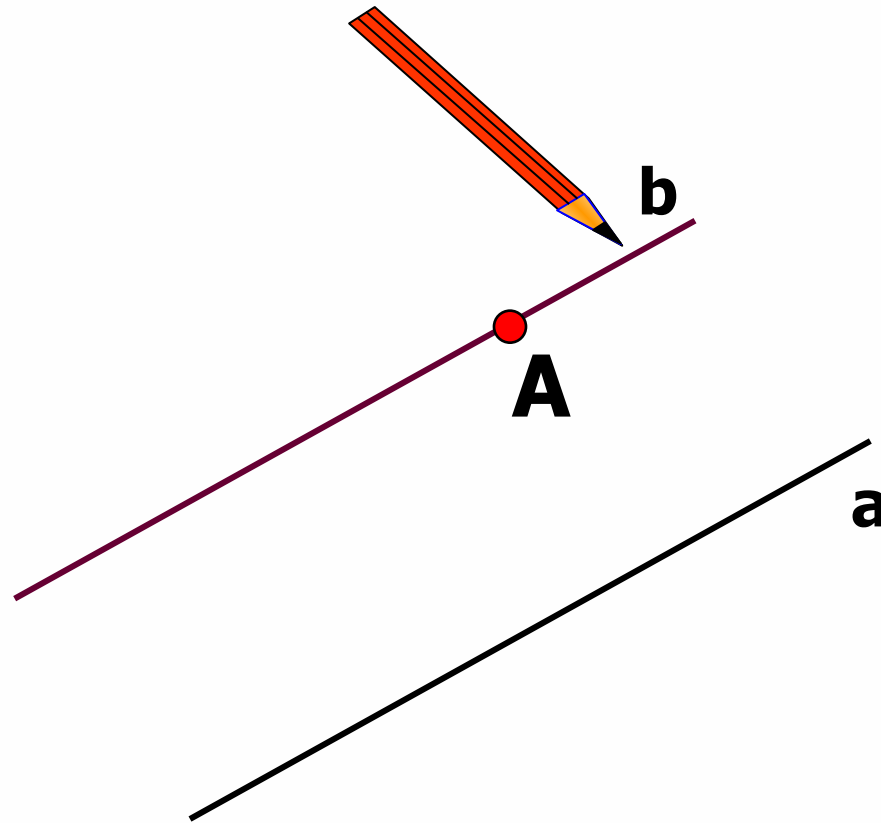
$P_{MNQP} - ?$





# Повторим. ПЛАНИМЕТРИЯ. Аксиома параллельности.

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.



Аксиома параллельности поможет доказать теорему о параллельных прямых

## Теорема

Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

### Теорема

Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

### Доказательство

Рассмотрим прямую  $a$  и точку  $M$ , не лежащую на этой прямой (рис. 11). Через прямую  $a$  и точку  $M$  проходит плоскость, и притом только одна (п. 3). Обозначим эту плоскость буквой  $\alpha$ . Прямая, проходящая через точку  $M$  параллельно прямой  $a$ , должна лежать в одной плоскости с точкой  $M$  и прямой  $a$ , т. е. должна лежать в плоскости  $\alpha$ . Но в плоскости  $\alpha$ , как известно из курса планиметрии, через точку  $M$  проходит прямая, параллельная прямой  $a$ , и притом только одна. На рисунке 11 эта прямая обозначена буквой  $b$ . Итак,  $b$  — единственная прямая, проходящая через точку  $M$  параллельно прямой  $a$ . Теорема доказана.

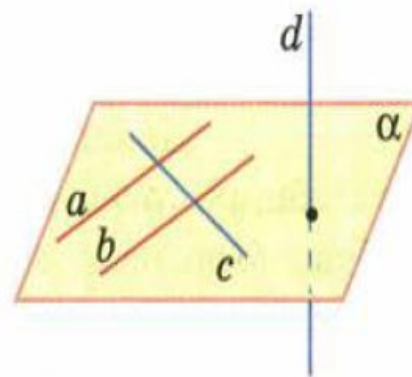
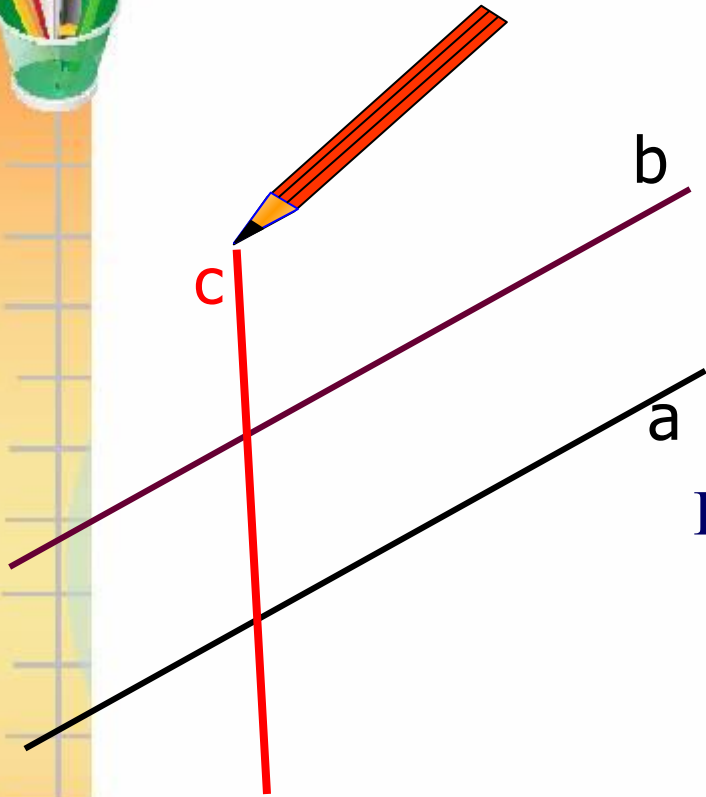


Рис. 10

Повторим. Следствие из аксиомы параллельности.



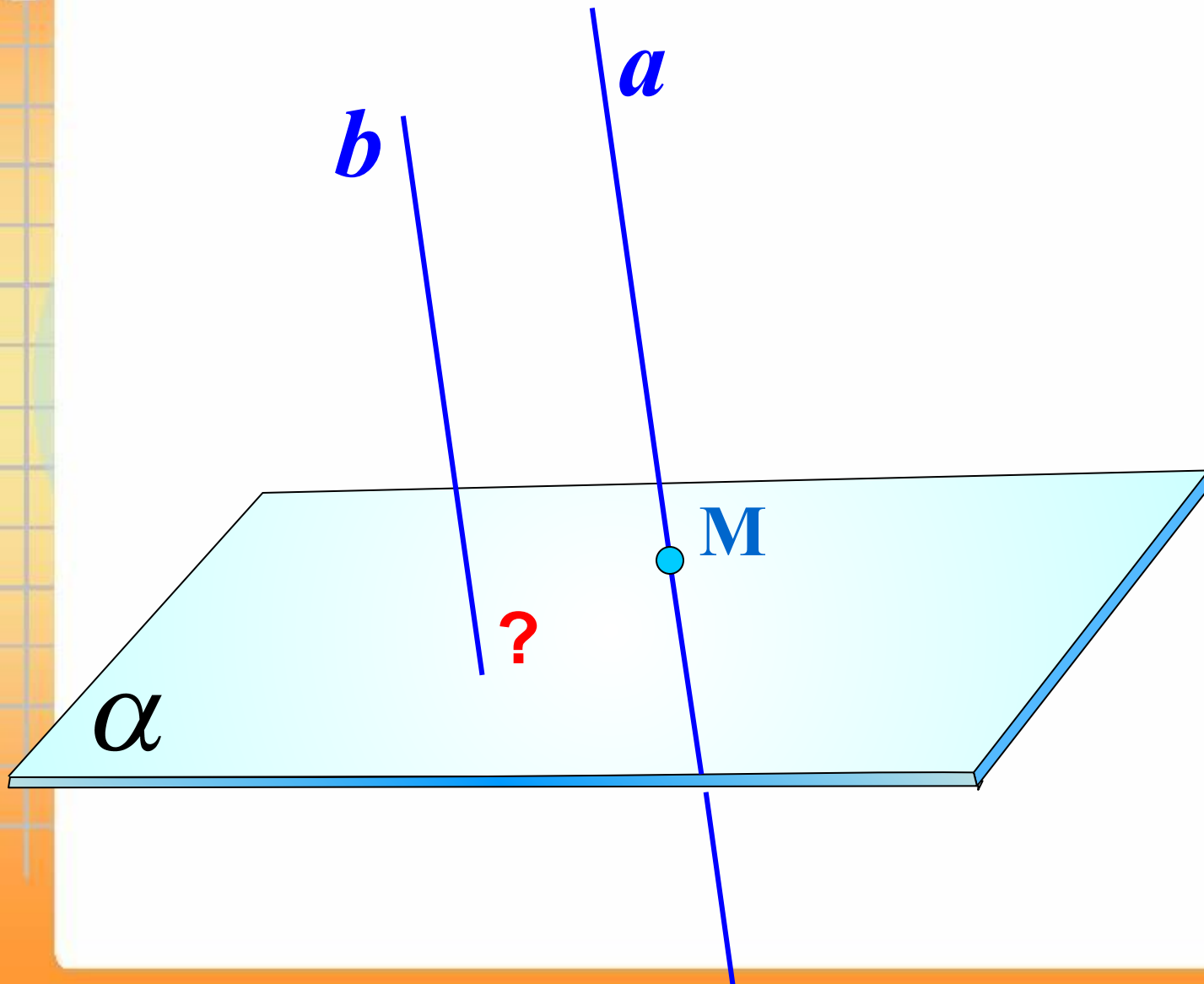
Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

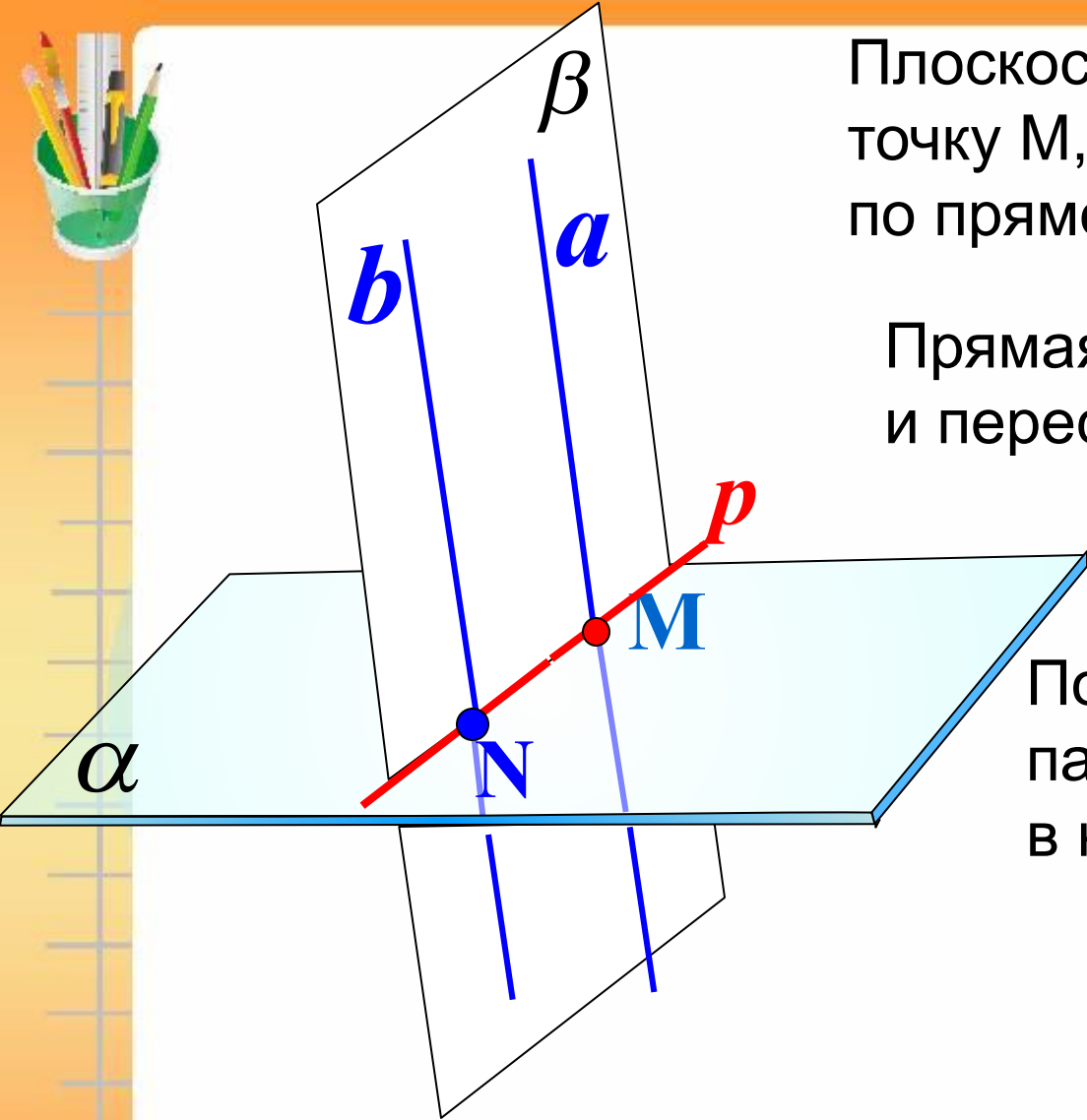
$$a \parallel b, c \cap b \Rightarrow c \cap a$$

Это следствие из аксиомы параллельности поможет доказать лемму о параллельных прямых

## Лемма

Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает данную плоскость.





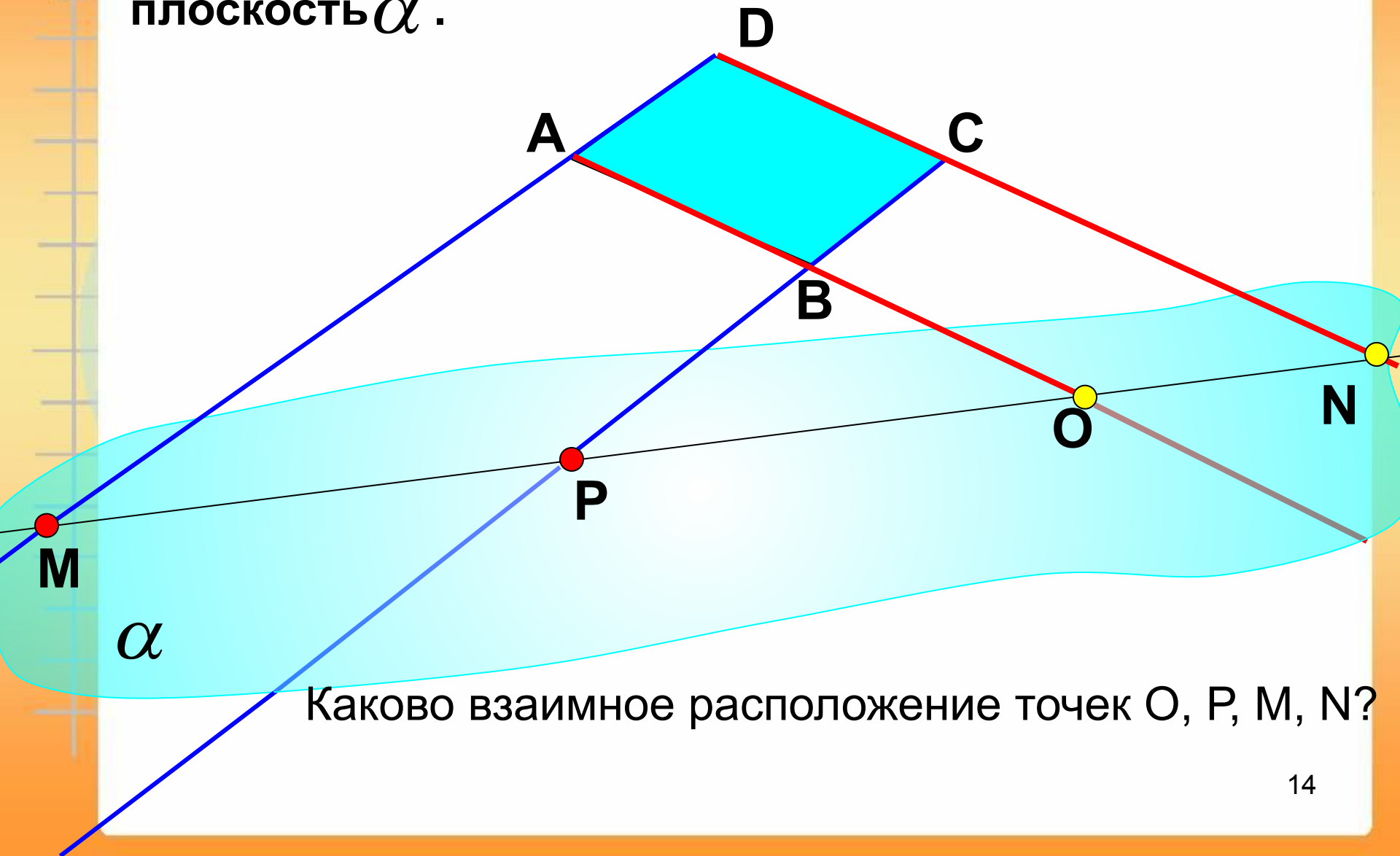
Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  имеют общую точку  $M$ , значит они пересекаются по прямой ( $A_3$ )

Прямая  $r$  лежит в плоскости  $\beta$  и пересекает прямую  $a$  в т.  $M$ .

Поэтому она пересекает и параллельную ей прямую  $b$  в некоторой точке  $N$ .

Прямая  $r$  лежит также в плоскости  $\alpha$ , поэтому  $N$  – точка плоскости  $\alpha$ .  
Значит,  $N$  – общая точка прямой  $b$  и плоскости  $\alpha$ .

Прямые, содержащие стороны  $AB$  и  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  пересекают плоскость  $\alpha$ . Докажите, что прямые  $AD$  и  $DC$  также пересекают плоскость  $\alpha$ .

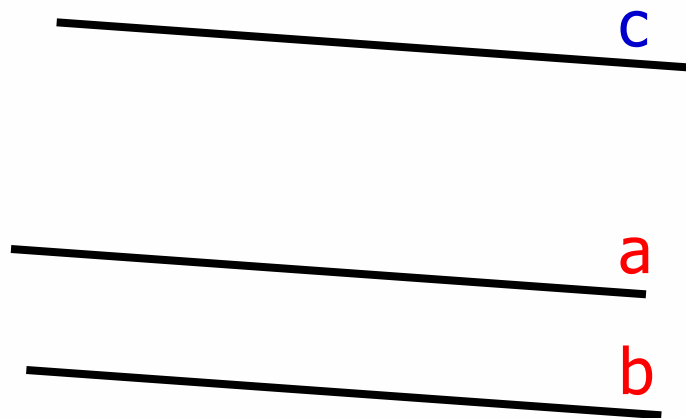


Каково взаимное расположение точек  $O$ ,  $P$ ,  $M$ ,  $N$ ?



Повторим.

Следствие из аксиомы параллельности.



Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

$$a \parallel c, b \parallel c \Rightarrow a \parallel b$$

Аналогичное утверждение имеет место и для трех прямых в пространстве.



## Теорема

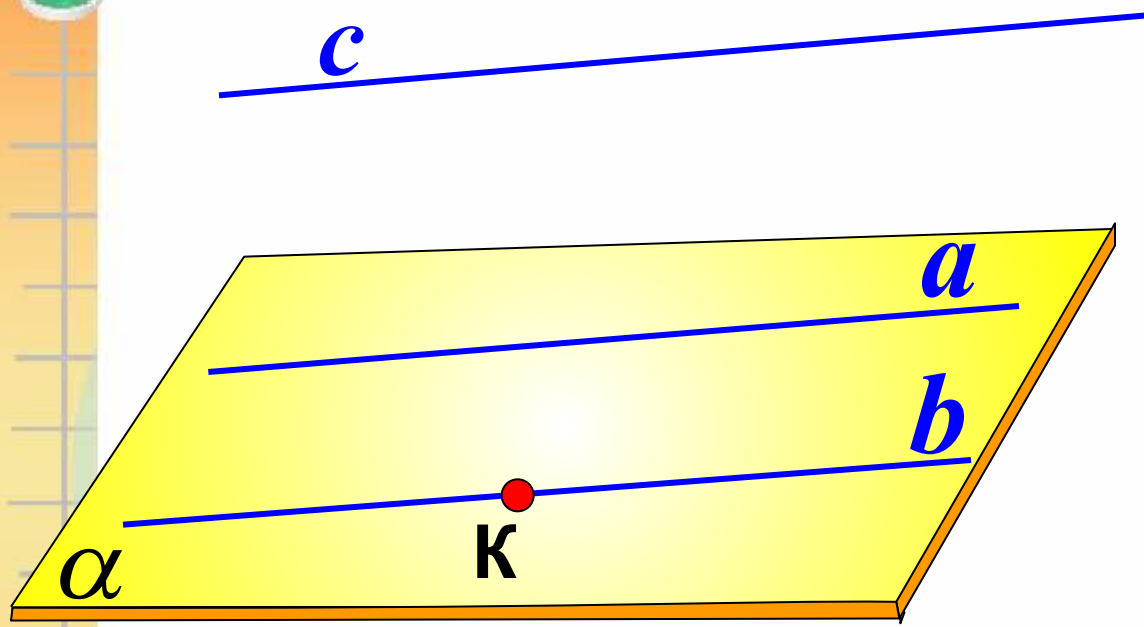
Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

$a \parallel c, b \parallel c$

Докажем, что  $a \parallel b$

Докажем, что  $a$  и  $b$

- 1) Лежат в одной плоскости
- 2) не пересекаются



1) Точка  $K$  и прямая  $a$  определяют плоскость.

Докажем, что прямая  $b$  лежит в этой плоскости.

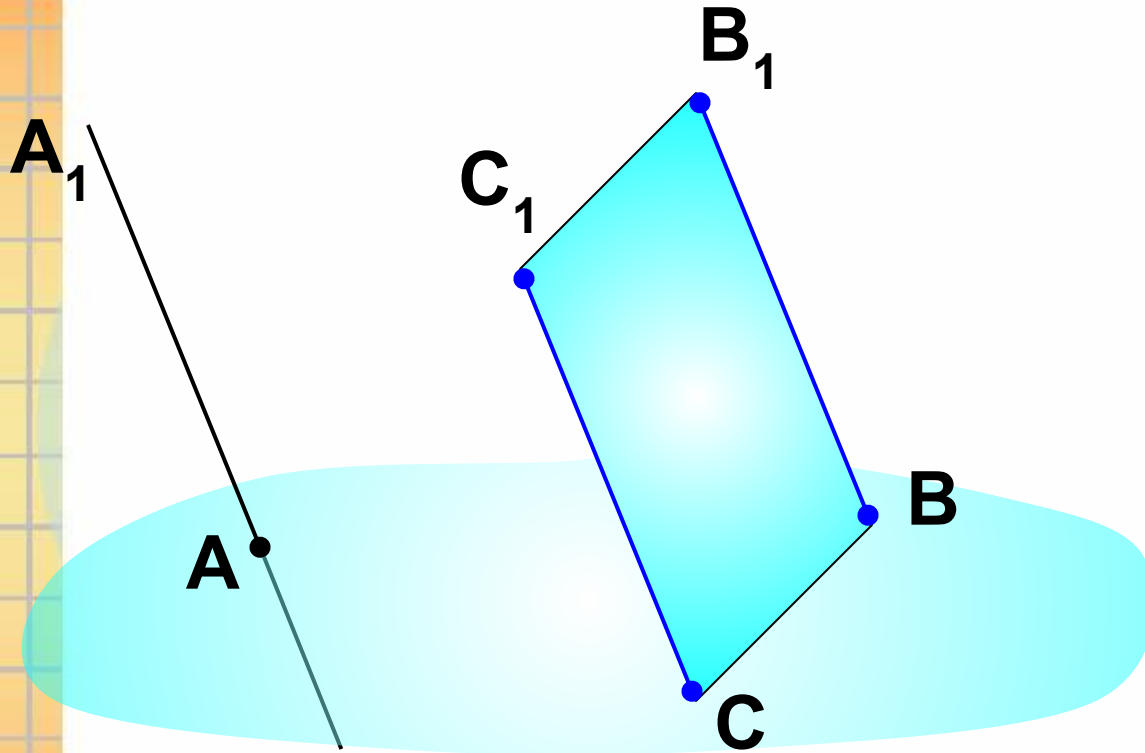
Допустим, что прямая  $b$  пересекает плоскость  $\alpha$ . Тогда по лемме  $c$  также пересекает  $\alpha$ . По лемме и  $a$  также пересекает  $\alpha$ . Это невозможно, т.к.  $a$  лежит в плоскости  $\alpha$

2) Используя метод от противного объясните почему прямые  $a$  и  $b$  не пересекаются.



Дано:  $AA_1 \parallel CC_1$ ,  $AA_1 \parallel BB_1$ ,  $BB_1 = CC_1$

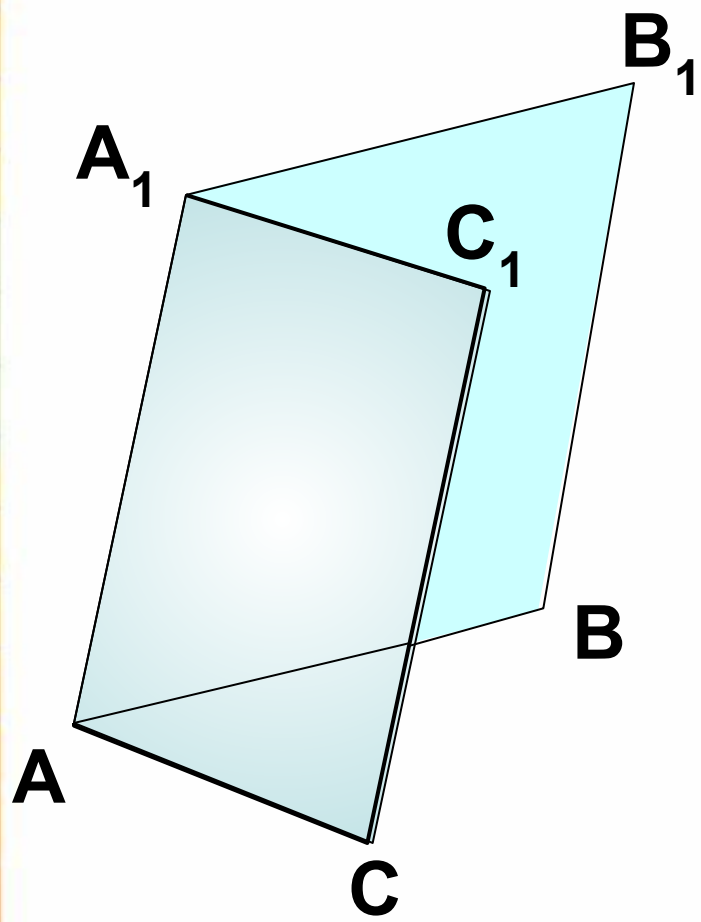
Доказать, что  $B_1C_1 = BC$





Дано:  $A_1C_1 = AC$ ,  $A_1C_1 \parallel AC$ ,  $A_1B_1 = AB$ ,  
 $A_1B_1 \parallel AB$

Доказать, что  $CC_1 = BB_1$



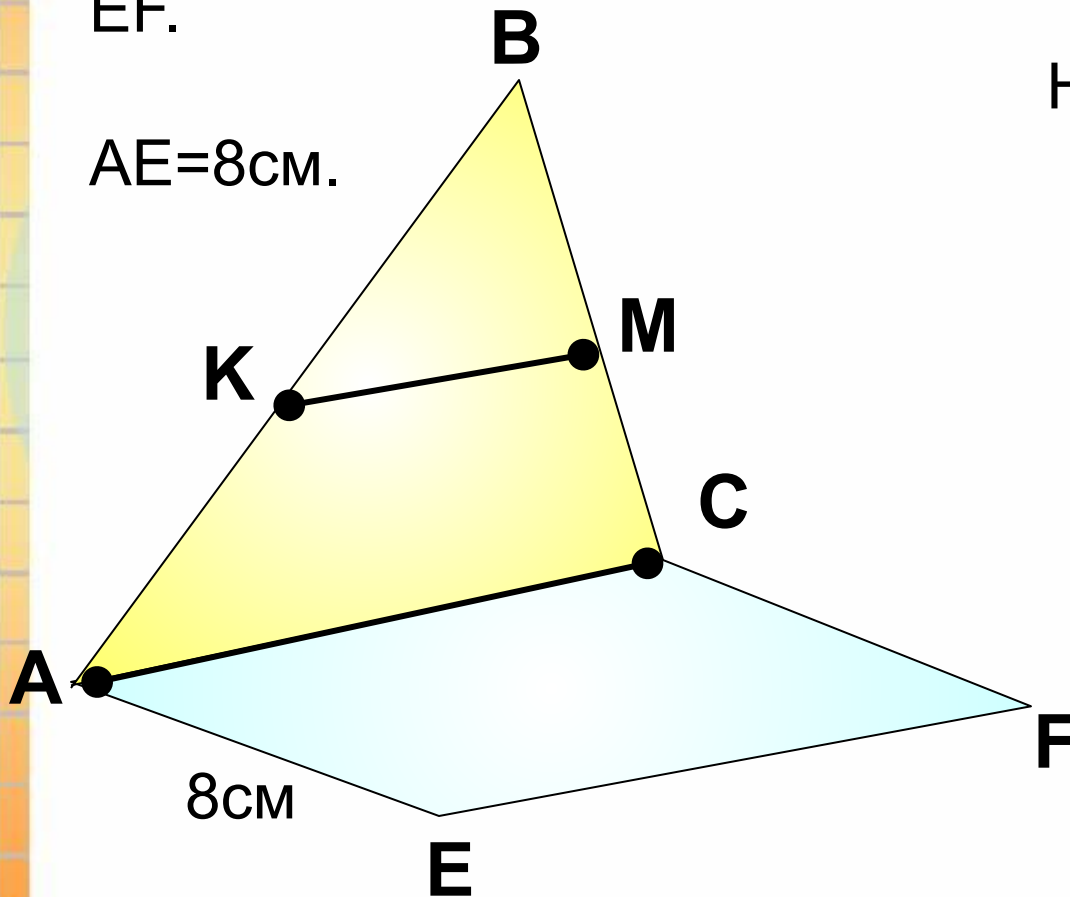


Треугольник  $ABC$  и квадрат  $AEFC$  не лежат в одной плоскости. Точки  $K$  и  $M$  – середины отрезков  $AB$  и  $BC$  соответственно.

Докажите, что  $KM \parallel EF$ .

$AE = 8\text{ см.}$

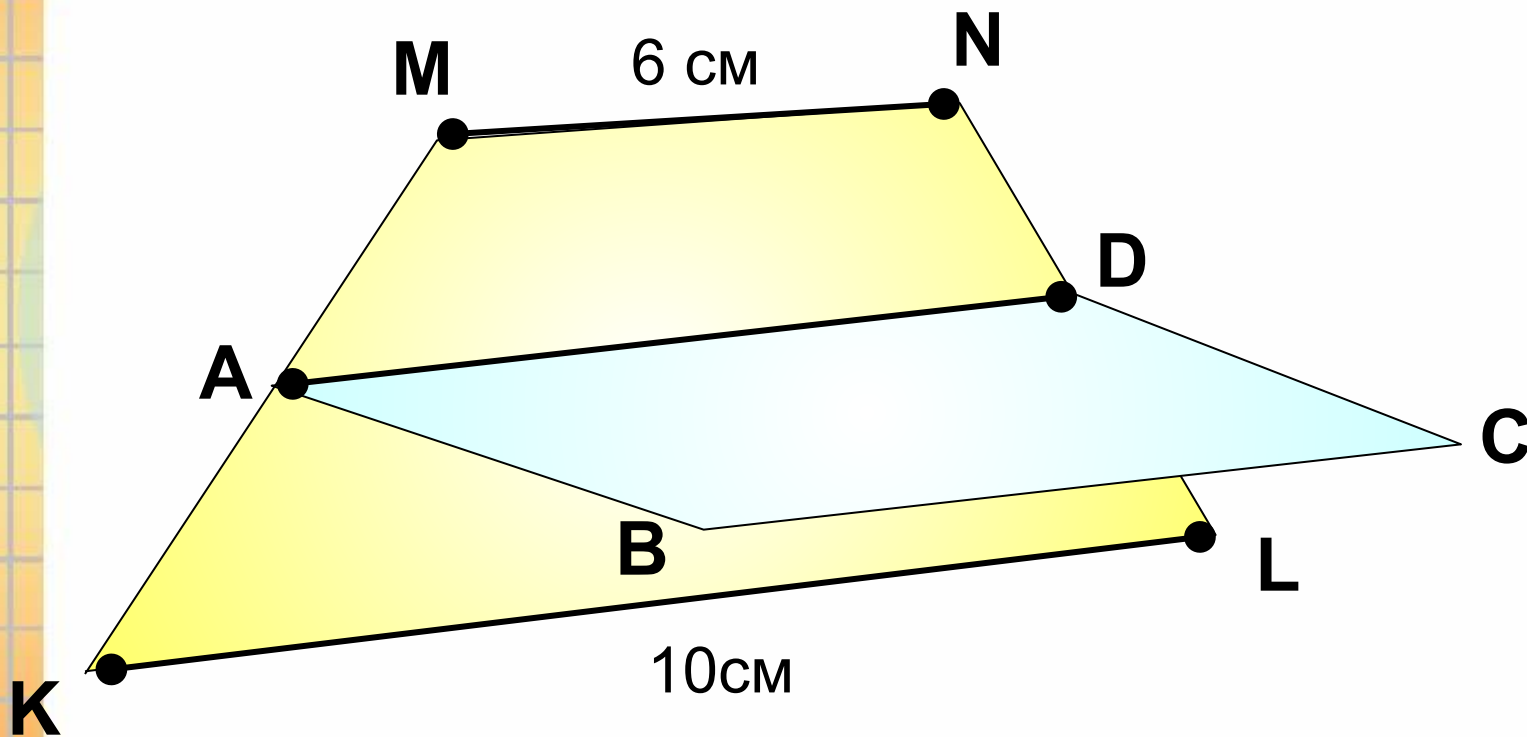
Найдите  $KM$ , если





Квадрат  $ABCD$  и трапеция  $KMNL$  не лежат в одной плоскости. Точки  $A$  и  $D$  – середины отрезков  $KM$  и  $NL$  соответственно. Докажите, что  $KL \parallel BC$ .

Найдите  $BC$ , если  $KL=10$  см,  $MN=6$  см.





Отрезок  $AB$  не пересекается с плоскостью  $\alpha$ . Через концы отрезка  $AB$  и его середину (точку  $M$ ) проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость  $\alpha$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $M_1$ . а) Докажите, что точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $M_1$  лежат на одной прямой. б) Найдите  $AA_1$ , если  $BB_1 = 12\text{см}$ ,  $MM_1 = 8\text{см}$ .

