

# Численные методы решения дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = y' = y^{(n)} = f(x, y)$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)} = f(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n-1)})$$

# Численные методы решения дифференциальных уравнений

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)} = f(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n-1)})$$

$$y_1 = y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_2}{dx} = y_3 \end{array} \right.$$

⊠

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_n}{dx} = f(x, y, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array} \right.$$

# Численные методы решения дифференциальных уравнений

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \boxtimes \\ y_n \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \boxtimes \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y(x))$$

$$Y = Y(x, C)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \boxtimes \\ c_n \end{bmatrix}$$

# Виды задач для ОДУ

- Задача Коши
- Краевая задача
- Задача на собственные значения

# Методы решения ОДУ

- Аналитические методы
- Графические методы
- Приближенные методы
- Численные методы

# Особенности численных методов решения ОДУ

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y(x))$$

$$x \in [x_0; x_n]$$

# Хорошо обусловленные задачи

$$\frac{dy}{dx} = y - x$$

$$0 \leq x \leq 100$$

$$y(x_0) = 1$$

$$y(x, c) = 1 + x + ce^x$$

$$y(0) = 1$$

$$c = 0 \quad y(100) = 101$$

$$y(0) = 1.000001$$

$$c = 10^{-6} \quad y(100) \approx 2.7 \cdot 10^{37}$$

# Метод (формула) Эйлера

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$x \in [x_0; x_n]$$

$$y(x_0) = y_0$$

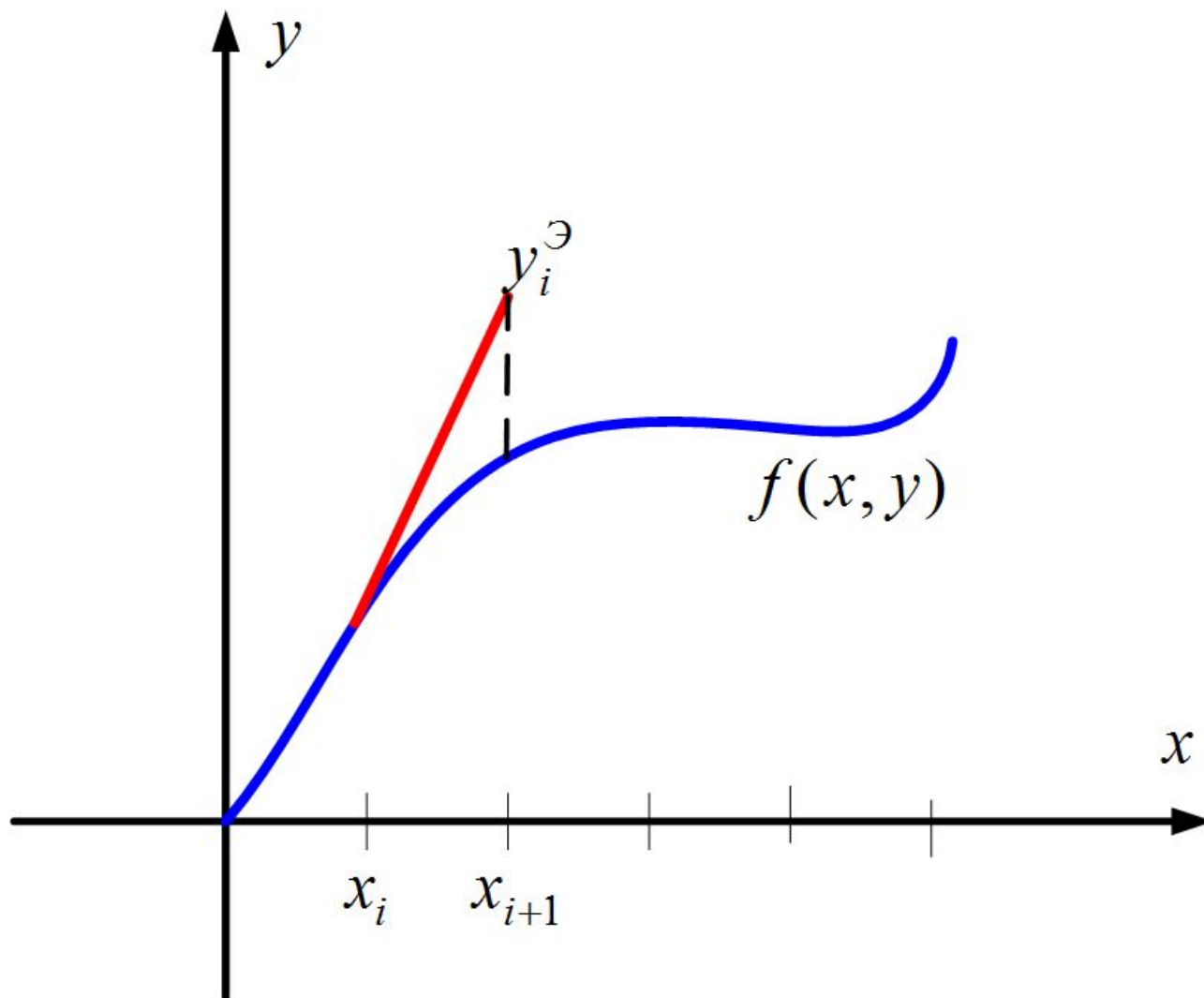
$$h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$



# Формула Эйлера



# Формула Эйлера

$$\frac{dy}{dx} = 0.9x + y$$

$$x \in [0; 0.2] \quad h = 0.1$$

$$y(0) = 1$$

$$x_0 = 0 \quad y_0 = 1$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.1 \cdot (0.9 \cdot 0 + 1) = 1.100$$

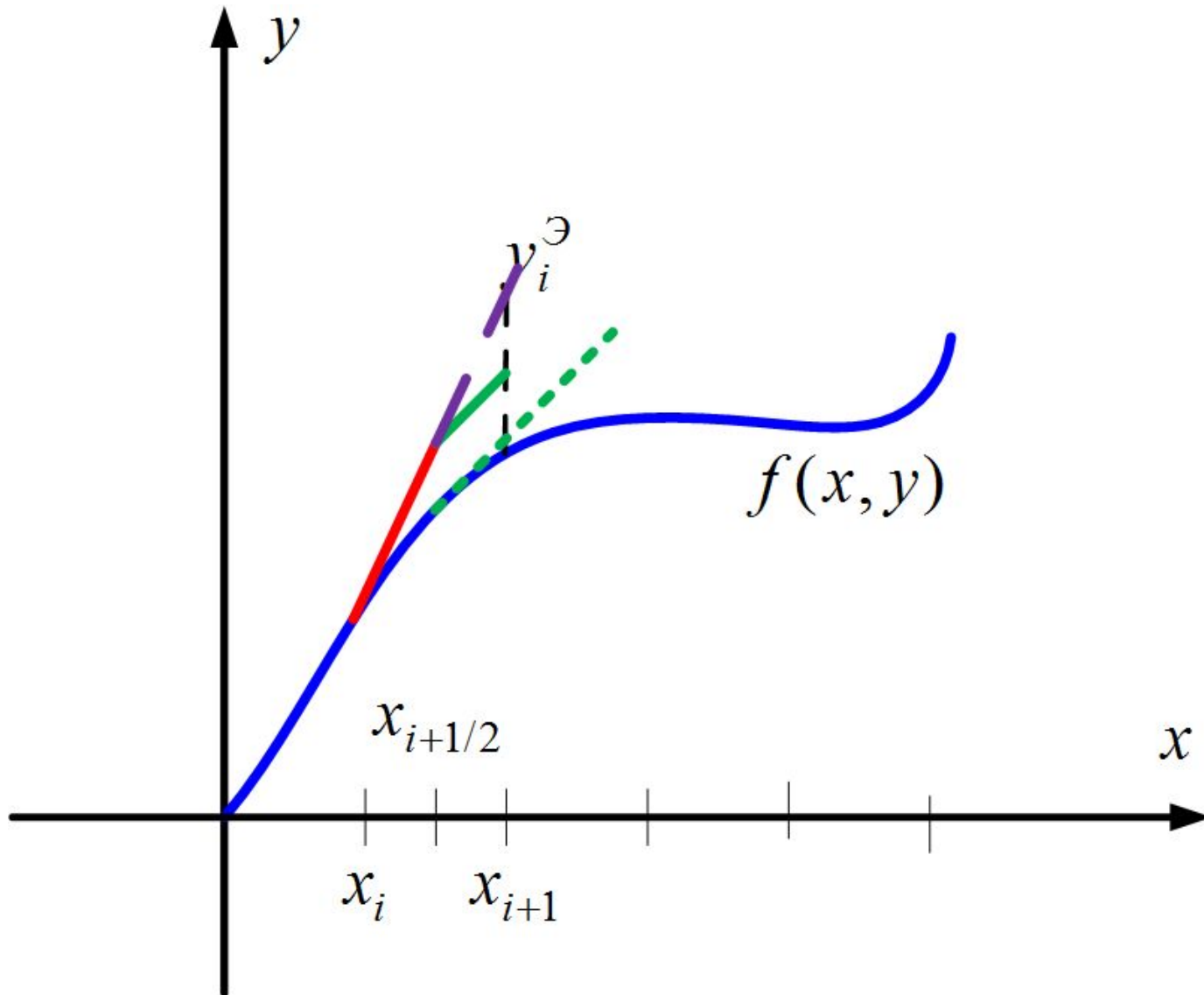
$$x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.1 + 0.1 \cdot (0.9 \cdot 0.1 + 1.1) = 1.219$$

# Формула Эйлера

$x$	$\Phi Э$ $y$
0.0	1.000
0.1	1.100
0.2	1.219

# Первая улучшенная формула Эйлера



# Первая улучшенная формула Эйлера

$$x \in [x_0; x_n]$$

*промежуточная точка*

$$x_{i+1/2} = x_i + h/2$$

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$$

# Первая улучшенная формула Эйлера

$$\frac{dy}{dx} = 0.9x + y$$

$$x \in [0; 0.2] \quad h = 0.1$$

$$y(0) = 1$$

$$x_0 = 0 \quad y_0 = 1$$

$$x_{0+1/2} = x_0 + \frac{h}{2} = 0 + \frac{0.1}{2} = 0.05$$

$$y_{0+1/2} = y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0) = 1 + \frac{0.1}{2} \cdot (0.9 \cdot 0 + 1) = 1.050$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_{0+1/2}, y_{0+1/2}) = 1 + 0.1 \cdot (0.9 \cdot 0.05 + 1.050) = 1.110$$

# Первая улучшенная формула Эйлера

$$x_{1+1/2} = x_1 + \frac{h}{2} = 0.1 + \frac{0.1}{2} = 0.15$$

$$y_{1+1/2} = y_1 + \frac{h}{2} f(x_1, y_1) =$$

$$= 1.110 + \frac{0.1}{2} \cdot (0.9 \cdot 0.1 + 1.110) = 1.170$$

$$x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_{1+1/2}, y_{1+1/2}) =$$

$$= 1.110 + 0.1 \cdot (0.9 \cdot 0.15 + 1.170) = 1.240$$

# Формула Эйлера-1УФЭ

$x$	$\Phi Э$ $y$	1УФЭ $y$
0.0	1.000	1.000
0.1	1.100	1.110
0.2	1.219	1.240



# Вторая улучшенная формула Эйлера

$$x \in [x_0; x_n]$$

*промежуточная точка*

$$x_i^* = x_i + h$$

$$y_i^* = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}^*, y_{i+1}^*)}{2}$$

# Вторая улучшенная формула Эйлера

$$\frac{dy}{dx} = 0.9x + y \quad x \in [0; 0.2] \quad h = 0.1$$

$$y(0) = 1$$

$$x_0 = 0 \quad y_0 = 1$$

$$x_1^* = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$$

$$y_1^* = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.1 \cdot (0.9 \cdot 0 + 1) = 1.100$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$$

$$y_1 = y_0 + h \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1^*, y_1^*)}{2} =$$

$$= 1 + 0.1 \cdot \frac{(0.9 \cdot 0 + 1) + (0.9 \cdot 0.1 + 1.1)}{2} \approx 1.110$$

# Вторая улучшенная формула Эйлера

$$x_2^* = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

$$\begin{aligned} y_2^* &= y_1 + hf(x_1, y_1) = \\ &= 1.110 + 0.1 \cdot (0.9 \cdot 0.2 + 1.110) = 1.239 \end{aligned}$$

$$x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + h \frac{f(x_1, y_1) + f(x_2^*, y_2^*)}{2} = \\ &= 1.110 + 0.1 \cdot \frac{(0.9 \cdot 0.1 + 1.110) + (0.9 \cdot 0.2 + 1.239)}{2} \approx 1.241 \end{aligned}$$

# Формула Эйлера-1УФЭ-2УФЭ

$x$	$\Phi Э$ $y$	1УФЭ $y$	2УФЭ $y$
0.0	1.000	1.000	1.000
0.1	1.100	1.110	1.110
0.2	1.219	1.240	1.241

# Обобщенная формула Рунге-Кутты

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21} k_1)$$

⊠

$$k_s = hf(x_i + \alpha_s h, y_i + \beta_{s1} k_1 + \beta$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{m=1}^s \gamma_m k_m$$

# Формула Рунге-Кутта 4-го порядка

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4}{6}$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0.1 \cdot (0.9 \cdot 0 + 1) = 0.1$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 0.1 \cdot \left(0.9 \cdot \left(0 + \frac{0.1}{2}\right) + \left(1 + \frac{0.1}{2}\right)\right) = 0.110$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0.1 \cdot \left(0.9 \cdot \left(0 + \frac{0.1}{2}\right) + \left(1 + \frac{0.11}{2}\right)\right) = 0.110$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.1 \cdot (0.9 \cdot (0 + 0.1) + (1 + 0.110)) = 0.120$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$$

$$y_1 = y_0 + \frac{k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4}{6} =$$

$$= 1 + \frac{0.1 + 2(0.110 + 0.110) + 0.12}{6} = 1.110$$

$$k_1 = hf(x_1, y_1) = 0.1 \cdot (0.9 \cdot 0.1 + 1.11) = 0.120$$

$$k_2 = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}\right) =$$

$$= 0.1 \cdot \left(0.9 \cdot \left(0.1 + \frac{0.1}{2}\right) + \left(1.11 + \frac{0.12}{2}\right)\right) = 0.130$$

$$k_3 = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}\right) =$$

$$= 0.1 \cdot \left(0.9 \cdot \left(0.1 + \frac{0.1}{2}\right) + \left(1.11 + \frac{0.13}{2}\right)\right) = 0.131$$

$$k_4 = hf(x_1 + h, y_1 + k_3) = 0.1 \cdot (0.9 \cdot (0.1 + 0.1) + (1 + 0.131)) = 0.142$$

$$x_2 = x_1 + h = 0 + 0.1 = 0.1$$

$$y_2 = y_1 + \frac{k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4}{6} =$$

$$= 1.11 + \frac{0.12 + 2(0.130 + 0.131) + 0.142}{6} = 1.241$$



# Формула Эйлера-1УФЭ-2УФЭ-формула Рунге-Кутта

$x$	$\Phi Э$ $y$	1УФЭ $y$	2УФЭ $y$	$\Phi РК$ $y$
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	1.100	1.110	1.110	1.110
0.2	1.219	1.239	1.241	1.241

# Выбор шага интегрирования в формуле Рунге-Кутта 4-го порядка

$$\theta = \left| \frac{k_2^i - k_3^i}{k_1^i - k_4^i} \right| \leq 0.01 \div 0.03$$