Теория пластин

Приближенные методы решения задачи об изгибе пластины:

- Метод Бубнова-Галеркина
- Метод Власова
- Метод Ритца-Тимошенко

Метод Бубнова-Галеркина

Метод Б.Г.Галеркина (прямой метод решения краевых задач) в 1913 году был применен И.Г.Бубновым к задаче об изгибе пластины. Рассмотрим уравнение прогибов пластины

$$\Delta_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\Delta_*\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\Delta_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=q(x,y) \qquad (1)$$

Приближенное решение будем искать в виде

$$w=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x,y) \qquad (2)$$

где **α**, - неизвестные постоянные множители, подлежащие определению,

fi(x,y) - базисные функции, удовлетворяющие краевым условиям.

Подставим аппроксимацию (2) в уравнение (1)

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\Delta_{11}\frac{\partial^4 f_i}{\partial x^4}+2\Delta_*\frac{\partial^4 f_i}{\partial x^2\partial y^2}+\Delta_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)-q(x,y)=\delta(x,y) \qquad (3)$$

где **δ*(x,y)*** - функция невязки.

Метод Бубнова-Галеркина

Для того, чтобы функция **δ(x,y)=0**, необходимо выполнение условия

$$\int_S \delta(x,y)\varphi(x,y)ds = 0 \quad (4)$$

где ***φ*** - произвольная функция,

S - площадь пластины.

Приближенно удовлетворим последнее условие, рассматривая в качестве произвольных функций базисные функции

$$\int_S \delta(x,y)f_i(x,y)ds = 0 \quad (5)$$

в результате получим систему линейных относительно искомых коэффициентов αi уравнений

$$[C]\{\alpha\} = \{F,n\} \quad (6)$$

где [C] – матрица $n*n$,

$\{\alpha$ - n-мерный вектор неизвестных,

$\{F$ - n-мерный вектор свободных членов;

Метод Бубнова-Галеркина

$$F_j = \int_S q(x,y) f_j ds$$

$$C_{ij} \int_S \left(\Delta_{11} \frac{\partial^4 f_i}{\partial x^4} + 2\Delta_* \frac{\partial^4 f_i}{\partial x^2 \partial y^2} + \Delta_{22} \frac{\partial^4 f_i}{\partial y^4} \right) f_j ds \qquad (7)$$

Разрешая систему (6) относительно αi, определим их значения и получим приближенное решение данной задачи

Метод Власова

Решение уравнения изгиба (1) будем искать в виде

$$w(x,y)=\sum_{i=1}^{n}W_i(y)\chi_i(x) \tag{8}$$

где ***Wj***- функция обобщенных прогибов,

χi - функция поперечного распределения прогибов.

Пусть ***χi*** - некоторые заданные и удовлетворяющие части граничных условий функции, ***Wi*** - функции, подлежащие определению. Подставим (8) в (1)

$$\Delta_{11}W_i\chi_i^{IV}+2\Delta_*W_i^{//}\chi_i^{//}+\Delta_{22}W_i^{IV}\chi_i-q(x,y)=\delta(x) \tag{9}$$

и минимизируем функцию невязки:

$$\sum_i\int_0^a\left(\Delta_{11}W_i\chi_i^{IV}+2\Delta_*W_i^{//}\chi_i^{//}+\Delta_{22}W_i^{IV}\chi_i-q(x,y)\right)\chi_j dx=0 \tag{10}$$

$$[A]\{W^{IV}\}+[B]\{W^{//}\}+[C]\{W\}=\{F$$

Метод Власова

где

$$A_{ij} = \int_0^a \Delta_{22} \chi_i \chi_j dx$$

$$B_{ij} = 2\int_0^a \Delta_* \chi_i^{//} \chi_j dx \qquad (11)$$

$$C_{ij} = \int_0^a \Delta_{11} \chi_i^{IV} \chi_j dx$$

Необходимо решить систему *n* обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, что достаточно непросто. Можно потребовать от функций ***χi*** ортогональности, чтобы

$$A_{ij} = B_{ij} = C_{ij} = 0 \qquad (12)$$

Метод Ритца-Тимошенко

Для построения вариационной постановки краевой задачи об изгибе пластины воспользуемся принципом минимума потенциальной энергии, согласно которому из всех возможных перемещений точек упругого тела, удовлетворяющих условиям устойчивого равновесия, сообщают потенциальной энергии минимальное значение

$$E=U-A \to min \qquad (13)$$

где $\boldsymbol{E}$ – потенциальная энергия,

$\boldsymbol{U}$ – энергия упругого деформирования,

$\boldsymbol{A}$ – работа внешних сил;

для пластины толщиной h по технической теории изгиба пластин

$$U=\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV=\frac{1}{2}\int_V(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\tau_{xy}\gamma_{xy})dV=$$

$$\frac{1}{2}\int_V z^2\left[\left(C_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+C_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(C_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+C_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+4C_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdydz= \qquad (14)$$

$$=\frac{1}{2}\int_S\left[\Delta_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2\Delta_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\Delta_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+4\Delta_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dS$$

Метод Ритца-Тимошенко

$$A = \int_S q(x,y)w(x,y)dS \qquad (15)$$

Таким образом, необходимо исследовать на экстремум (минимум) функционал (16)

$$E(w(x,y)) \to \min$$

Приближенное решение задачи о прогибе w ищем в виде

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x,y) \qquad (17)$$

где $\boldsymbol{\alpha i}$ - неизвестные коэффициенты,

$\boldsymbol{fi}$ - базисные функции.

После подстановки получаем функцию $\boldsymbol{E(\alpha i)}$. Систему из n разрешающих соотношений получаем из условия

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = 0 \qquad (18)$$

Метод Ритца-Тимошенко

Функционал ***E*** является квадратичным, после взятия частных производных получим систему линейных алгебраических уравнений относительно ***αi*** :

Где

$$C_{ij} = \int_S \left[\Delta_{11} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} + 2\Delta_{12} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f_j}{\partial y^2} + \Delta_{22} \frac{\partial^2 f_j}{\partial y^2} \frac{\partial^2 f_j}{\partial y^2} + 4\Delta_{66} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial y} \right] dS \qquad (19)$$