Методы решения тригонометрических уравнений

«Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!»

Д. Пойа

- ***Желаю работать , желаю трудиться***
- ***Желаю успехов сегодня добиться***
- ***Ведь в будущем все это вам пригодится.***
- ***И легче в дальнейшем вам будет учиться***

Общие формулы корней простейших тригонометрических уравнений.

1) $\sin x = a$

2) $\cos x = a$

3) $tgx=a,$

4) $ctgx=a,$

а) $x = \pm \arccos a + 2\pi n$

$n \in Z$

б) $x = arcctg\ a + \pi\ n.$

$n \in Z$

в) $x = \left(-1\right)^n \arcsin a + \pi n$

$n \in Z$

г) $x = arctga + \pi n$

$n \in Z$

Поставьте в соответствие формулы уравнений и их решений.

Уравнение, содержащее переменную под знаком тригонометрической функции, называется тригонометрическим

Способы решения тригонометрических уравнений

1. *Тригонометрические уравнения, приводимые к алгебраическим уравнениям относительно одной тригонометрической функции*

2. *Тригонометрические уравнения, решаемые путем преобразований тригонометрическими формулами*

3. *Тригонометрические уравнения, решаемые путем понижения степени уравнения*

4. *Решение однородных тригонометрических уравнений*

5. *Формулы универсальной тригонометрической подстановки*

1. Тригонометрические уравнения, приводимые к алгебраическим уравнениям относительно одной тригонометрической функции

Рассмотрим пример.

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \qquad \sin x = t$$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0$$

$$D = 9 + 16 = 25, \qquad t_1 = -2, \qquad t_2 = \frac{1}{2}.$$

$\sin x = -2,$ нет решений

$$\sin x = \frac{1}{2}, \qquad x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z$$

Рассмотрим пример 2.

$3\cos 2x = 7\cos x,$ $\qquad$ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$3(2\cos^2 x - 1) = 7\cos x$

$6\cos^2 x - 3 - 7\cos x = 0$

$6\cos^2 x - 7\cos x - 3 = 0,$ $\qquad$ $\cos x = a$

$6a^2 - 7a - 3 = 0$

$D = 49 + 72 = 121 \qquad a_1 = \frac{3}{2}, \qquad a_2 = -\frac{1}{3}.$

$\cos x = \frac{3}{2},$ нет решений

$\cos x = -\frac{1}{3}, \qquad x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n, \quad n \in Z$

$x = \pm(\pi - \arccos\frac{1}{3}) + 2\pi n, \; n \in Z$

2. Тригонометрические уравнения, решаемые путем преобразований тригонометрическими формулами

Рассмотрим пример 1.

$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$, сгруппируе м слагаемые $(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0$

Применим формулу $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, получаем

$$2\sin\frac{x+3x}{2}\cdot\cos\frac{x-3x}{2} + \sin 2x = 0$$

$2\sin 2x\cdot\cos(-x) + \sin 2x = 0,\qquad \sin 2x\cdot(2\cos x + 1) = 0$

$\sin 2x = 0,\qquad \cos x = -\frac{1}{2}$

$2x = \pi n,\qquad x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\quad n\in Z$

$x = \frac{\pi}{2}n,\quad n\in Z,\qquad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\quad n\in Z$

Ответ : $x = \frac{\pi}{2}n,\quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\quad n\in Z$

3. Тригонометрические уравнения, решаемые путем понижения степени уравнения

Пример.

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$$

Используем формулы понижения степени $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} = 2$$

$$(\cos 2x + \cos 8x) + (\cos 4x + \cos 6x) = 0$$

$$2\cos 5x \cdot \cos 3x + 2\cos 5x \cdot \cos x = 0$$

$$2\cos 5x \cdot (\cos 3x + \cos x) = 0, \qquad 2\cos 5x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = 0$$

$$\cos 5x = 0; \qquad \cos 2x = 0; \qquad \cos x = 0$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \qquad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}; \qquad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2};$$

общее решение : $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} n, \ n \in Z$ или $\text{x} = \frac{\pi}{5}\left(\frac{1}{2} + n\right), \ n \in Z$

4. *Решение однородных тригонометрических уравнений*

Опр. ***Тригонометрическое уравнение называется однородным, если показатели степени слагаемых равны.***

Пример.

$6\sin^2 x - 3\sin x\cos x - \cos^2 x = 1$

Используем равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$6\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$

$5\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0,$ разделим уравнение на $\cos^2 x \neq 0,$

$5tg^2 x - 3tgx - 2 = 0,$ $tgx = a$

$5a^2 - 3a - 2 = 0,$ $D = 9 + 40 = 49,$ $a_1 = -0{,}4;$ $a_2 = 1$

$tgx = -0{,}4;$ $tgx = 1$

$x_1 = -arctg0{,}4 + \pi n;$ $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$

Ответ : $-\mathrm{arctg}0{,}4 + \pi\ n,$ $\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

5. Формулы универсальной тригонометрической подстановки:

- Эти формулы позволяют выразить любую тригонометрическую функцию через тангенс половинного угла. Это дает возможность свести любое тригонометрическое уравнение к алгебраическому относительно этого тангенса.

Пусть $t = tg\frac{\alpha}{2}$ тогда

$$sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2};\ cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ tg\alpha = \frac{2t}{1-t^2};\ ctg\alpha = \frac{1-t^2}{2t};$$

- Эти формулы позволяют выразить любую тригонометрическую функцию через тангенс половинного угла. Это дает возможность свести любое тригонометрическое уравнение к алгебраическому относительно этого тангенса.

Пусть $t = tg\frac{\alpha}{2}$ тогда

$$sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2};\ cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ tg\alpha = \frac{2t}{1-t^2};\ ctg\alpha = \frac{1-t^2}{2t};$$

Эти формулы позволяют выразить любую тригонометрическую функцию через тангенс половинного угла. Это дает возможность свести любое тригонометрическое уравнение к алгебраическому относительно этого тангенса.

Пусть $t = tg\frac{\alpha}{2}$ тогда

$$sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2};\ cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ tg\alpha = \frac{2t}{1-t^2};\ ctg\alpha = \frac{1-t^2}{2t};$$

Применение знаний

- Эти формулы позволяют выразить любую тригонометрическую функцию через тангенс половинного угла. Это дает возможность свести любое тригонометрическое уравнение к алгебраическому относительно этого тангенса.

Пусть $t = tg\frac{\alpha}{2}$ тогда

$$sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2};\ cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ tg\alpha = \frac{2t}{1-t^2};\ ctg\alpha = \frac{1-t^2}{2t};$$

Эти формулы позволяют выразить любую тригонометрическую функцию через тангенс половинного угла. Это дает возможность свести любое тригонометрическое уравнение к алгебраическому относительно этого тангенса.

Пусть $t = tg\frac{\alpha}{2}$ тогда

$$sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2};\ cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ tg\alpha = \frac{2t}{1-t^2};\ ctg\alpha = \frac{1-t^2}{2t};$$

Итог урока

Что нового вы узнали на уроке?

Трудным ли показался вам учебный материал?

Что необходимо сделать, чтобы эта тема была усвоена вами?