

*Методы решения
тригонометрических
уравнений*



«Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!»

Д. Пойа

- *Желаю работать , желаю трудиться*
- *Желаю успехов сегодня добиться*
- *Ведь в будущем все это вам пригодится.*
- *И легче в дальнейшем вам будет учиться*

Общие формулы корней простейших тригонометрических уравнений.

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1) $\sin x = a$ | а) $x = \pm \arccos a + 2\pi n$
$n \in \mathbb{Z}$ |
| 2) $\cos x = a$ | б) $x = \arccos a + \pi n$
$n \in \mathbb{Z}$ |
| 3) $\operatorname{tg} x = a,$ | в) $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$
$n \in \mathbb{Z}$ |
| 4) $\operatorname{ctg} x = a,$ | г) $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$
$n \in \mathbb{Z}$ |

Поставьте в соответствие формулы уравнений и их решений.

Уравнение, содержащее
переменную под знаком
тригонометрической функции,
называется
тригонометрическим

Способы решения тригонометрических уравнений

- 1. Тригонометрические уравнения, приводимые к алгебраическим уравнениям относительно одной тригонометрической функции*
- 2. Тригонометрические уравнения, решаемые путем преобразований тригонометрическими формулами*
- 3. Тригонометрические уравнения, решаемые путем понижения степени уравнения*
- 4. Решение однородных тригонометрических уравнений*
- 5. Формулы универсальной тригонометрической подстановки*

1. Тригонометрические уравнения, приводимые к алгебраическим уравнениям относительно одной тригонометрической функции

Рассмотрим пример.

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0 \quad \sin x = t$$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0$$

$$D = 9 + 16 = 25, \quad t_1 = -2, \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\sin x = -2, \quad \text{нет решений}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z$$

Рассмотрим пример 2.

$$3 \cos 2x = 7 \cos x, \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$3(2 \cos^2 x - 1) = 7 \cos x$$

$$6 \cos^2 x - 3 - 7 \cos x = 0$$

$$6 \cos^2 x - 7 \cos x - 3 = 0, \quad \cos x = a$$

$$6a^2 - 7a - 3 = 0$$

$$D = 49 + 72 = 121 \quad a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_2 = -\frac{1}{3}.$$

$$\cos x = \frac{3}{2}, \quad \text{нет решений}$$

$$\cos x = -\frac{1}{3}, \quad x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

2. Тригонометрические уравнения, решаемые путем преобразований тригонометрическими формулами

Рассмотрим пример 1.

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0, \text{ сгруппируем слагаемые } (\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0$$

Применим формулу $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, получаем

$$2 \sin \frac{x + 3x}{2} \cdot \cos \frac{x - 3x}{2} + \sin 2x = 0$$

$$2 \sin 2x \cdot \cos(-x) + \sin 2x = 0, \quad \sin 2x \cdot (2 \cos x + 1) = 0$$

$$\sin 2x = 0, \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = \pi n, \quad x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{2}n, \quad n \in Z, \quad x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

ОТВЕТ : $x = \frac{\pi}{2}n, \quad x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$

3. Тригонометрические уравнения, решаемые путем понижения степени уравнения

Пример.

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$$

Используем формулы понижения степени $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2} = 2$$

$$(\cos 2x + \cos 8x) + (\cos 4x + \cos 6x) = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 3x + 2 \cos 5x \cdot \cos x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot (\cos 3x + \cos x) = 0, \quad 2 \cos 5x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = 0$$

$$\cos 5x = 0; \quad \cos 2x = 0; \quad \cos x = 0$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2};$$

$$\text{общее решение : } x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n, \quad n \in Z \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{5} \left(\frac{1}{2} + n \right), \quad n \in Z$$

4. Решение однородных тригонометрических уравнений

Опр. Тригонометрическое уравнение называется однородным, если показатели степени слагаемых равны.

Пример.

$$6 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - \cos^2 x = 1$$

Используем равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$6 \sin^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

$5 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$, разделим уравнение на $\cos^2 x \neq 0$,

$$5 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0, \quad \operatorname{tg} x = a$$

$$5a^2 - 3a - 2 = 0, \quad D = 9 + 40 = 49, \quad a_1 = -0,4; \quad a_2 = 1$$

$$\operatorname{tg} x = -0,4; \quad \operatorname{tg} x = 1$$

$$x_1 = -\operatorname{arctg} 0,4 + \pi n; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$$

$$\text{Ответ: } -\operatorname{arctg} 0,4 + \pi n, \quad \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$$

5. *Формулы универсальной тригонометрической подстановки:*

Эти формулы позволяют выразить любую тригонометрическую функцию через тангенс половинного угла. Это дает возможность свести любое тригонометрическое уравнение к алгебраическому относительно этого тангенса.

Пусть $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ тогда

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1-t^2}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1-t^2}{2t};$$

Эти формулы позволяют выразить любую тригонометрическую функцию через тангенс половинного угла. Это дает возможность свести любое тригонометрическое уравнение к алгебраическому относительно этого тангенса.

Пусть $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ тогда

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1-t^2}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1-t^2}{2t};$$

Эти формулы позволяют выразить любую тригонометрическую функцию через тангенс половинного угла. Это дает возможность свести любое тригонометрическое уравнение к алгебраическому относительно этого тангенса.

Пусть $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ тогда

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1-t^2}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1-t^2}{2t};$$

Применение знаний

Эти формулы позволяют выразить любую тригонометрическую функцию через тангенс половинного угла. Это дает возможность свести любое тригонометрическое уравнение к алгебраическому относительно этого тангенса.

Эти формулы позволяют выразить любую тригонометрическую функцию через тангенс половинного угла. Это дает возможность свести любое тригонометрическое уравнение к алгебраическому относительно этого тангенса.

Пусть $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ тогда

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1-t^2}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1-t^2}{2t};$$

Итог урока

Что нового вы узнали на уроке?

Трудным ли показался вам учебный материал?

Что необходимо сделать, чтобы эта тема была усвоена вами?