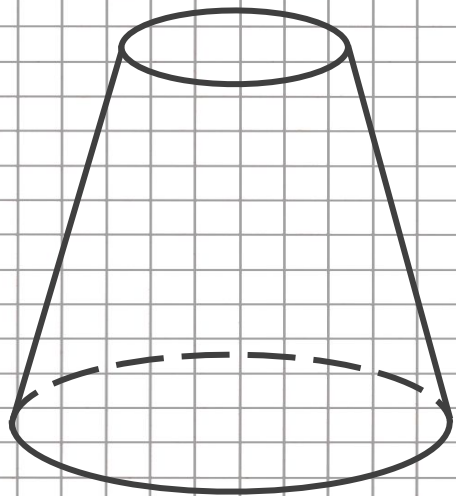


Усеченный конус

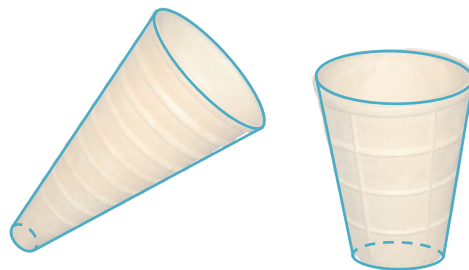
The image features three truncated cones arranged in a row. The leftmost cone is light red with several circular holes. The middle cone is light yellow with several circular holes. The rightmost cone is light blue with several circular holes. The cones are set against a light blue background and cast soft shadows on the surface below them.

Сегодня на уроке:



- ✓ Усеченный конус
- ✓ Определение усеченного конуса
- ✓ Элементы усеченного конуса
- ✓ Площадь боковой и полной поверхностей усеченного конуса

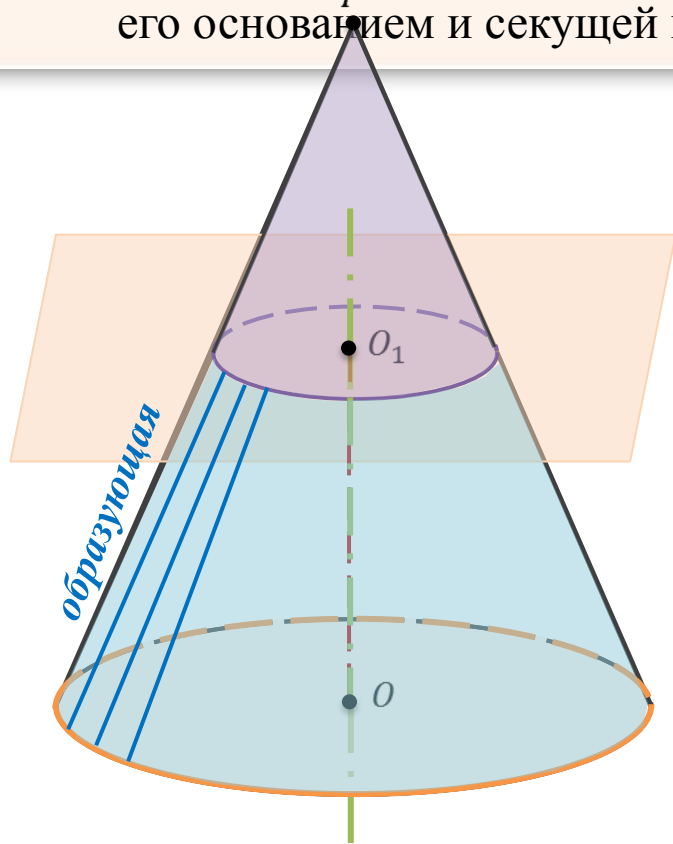
Усеченный конус



Усеченный конус



Определение. *Усеченным конусом* называется часть конуса, расположенная между его основанием и секущей плоскостью, перпендикулярной оси конуса.



Элементы усеченного конуса:

Основание исходного конуса и *круг*, полученный в сечении этого конуса плоскостью, называются *основаниями* усеченного конуса.

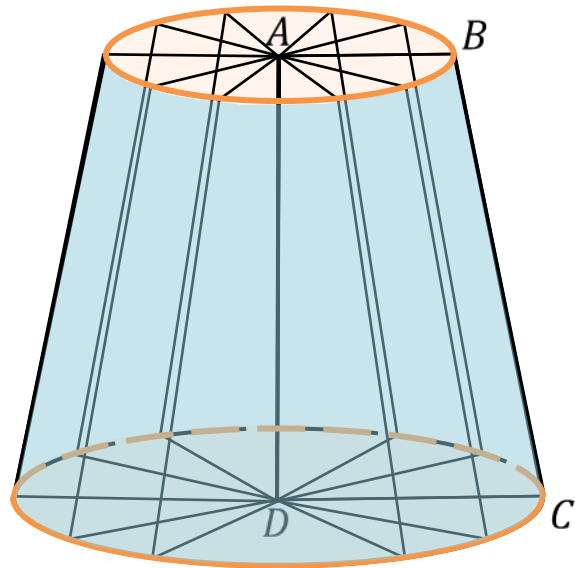
Высотой усеченного конуса называется отрезок, соединяющий центры его оснований.

Прямая O_1O называется его *осью*.

Часть конической поверхности, ограничивающая усеченный конус, называется его *боковой поверхностью*.

Отрезки образующих конической поверхности, расположенные между основаниями, называются *образующими* усеченного конуса.

Усеченный конус может быть получен вращением на 360° прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной к основаниям.



Основания усеченного конуса образуются вращением оснований AB и DC трапеции.

Боковая поверхность усеченного конуса – вращением боковой стороны BC .

$$S_{\text{бок.пов}} = \pi(r + r_1)l,$$

где r и r_1 – радиусы оснований, l – образующая усеченного конуса.

Доказательство.

Пусть P – вершина конуса.

$AA_1 = l$ – одна из образующих усеченного конуса.

Точки O и O_1 – центры его оснований.

$$r > r_1$$

$$S_{\text{бок.пов}} = \pi r \cdot PA - \pi r_1 \cdot PA_1 = \pi r \cdot (PA_1 + A_1A) - \pi r_1 \cdot PA_1 =$$

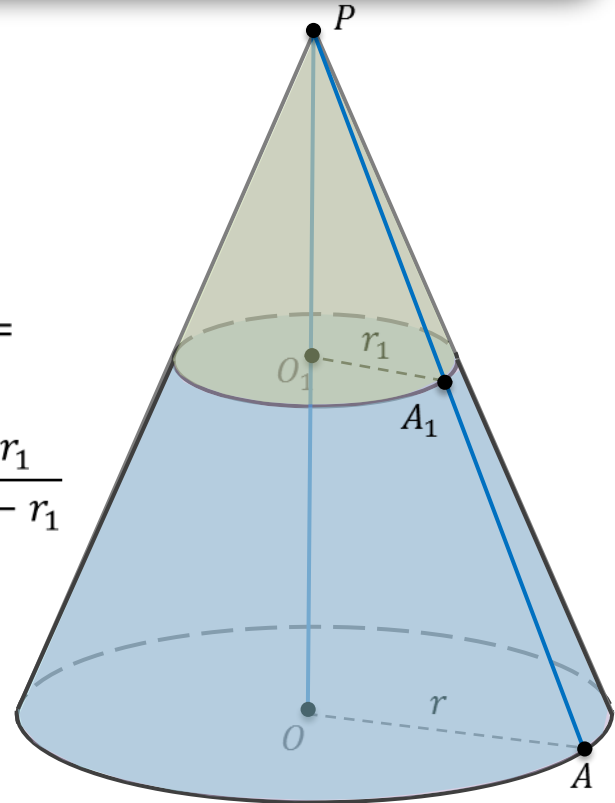
$$= \pi r \cdot PA_1 + \pi r \cdot A_1A - \pi r_1 \cdot PA_1 = \pi r l + \pi(r - r_1)PA_1$$

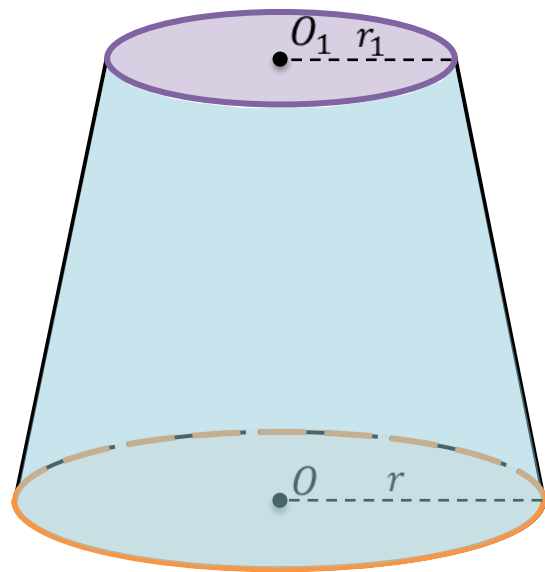
$$\Delta PO_1A_1 \sim \Delta POA \Rightarrow \frac{PA_1}{PA} = \frac{r_1}{r} \Leftrightarrow \frac{PA_1}{PA_1 + l} = \frac{r_1}{r} \Leftrightarrow PA_1 = \frac{lr_1}{r - r_1}$$

$$\pi r l + \pi(r - r_1)PA_1 = \pi r l + \pi(r - r_1) \cdot \frac{lr_1}{r - r_1} = \pi r l + \pi r_1 l =$$

$$= \pi(r + r_1)l$$

$$S_{\text{бок.пов}} = \pi(r + r_1)l$$





$$S_{\text{бок.пов.}} = \pi(r + r_1)l$$

$$S_{\text{н.круга}} = \pi r^2$$

$$S_{\text{в.круга}} = \pi r_1^2$$

$$S_{\text{полн.пов.}} = S_{\text{бок.пов.}} + S_{\text{н.осн}} + S_{\text{в.осн}} = \pi(r + r_1)l + \pi r^2 + \pi r_1^2$$

$$S_{\text{полн.пов.}} = \pi(r + r_1)l + \pi r^2 + \pi r_1^2$$

Задача. Длины радиусов оснований и образующей усеченного конуса равны соответственно 7 см, 15 см и 17 см. Вычислите его высоту.

Решение.

O_1A_1AO – прямоугольная трапеция.

$$O_1O = h$$

$$A_1M \perp OA$$

O_1A_1MO – прямоугольник.

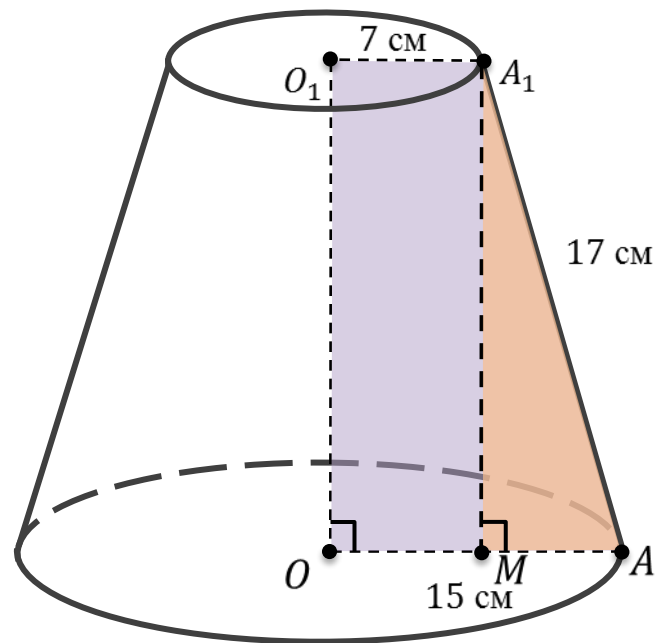
$$O_1A_1 = OM = 7 \text{ (см)}, O_1O = MA_1 = h$$

$\triangle A_1AM$ – прямоугольный.

$$MA = OA - OM = 15 - 7 = 8 \text{ (см)}$$

$$MA_1 = h = \sqrt{AA_1^2 - MA^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15 \text{ (см)}$$

Ответ: 15 см.



Задача. Длины радиусов оснований усеченного конуса равны 9 см и 4 см. Вычислите площадь боковой поверхности этого конуса, если угол между образующей и плоскостью его основания равен 45° .

Решение.

$$S_{\text{бок.пов}} = \pi(r + r_1)l$$

O_1A_1AO – прямоугольная трапеция.

$$O_1O = h$$

$$A_1F \perp OA$$

O_1A_1FO – прямоугольник.

$$O_1A_1 = OF = 4 \text{ (см)}, O_1O = FA_1 = h$$

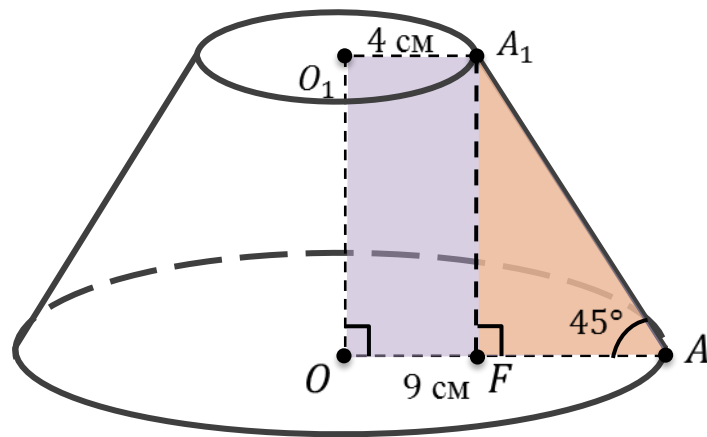
$\triangle A_1AF$ – прямоугольный.

$$A_1F = FA = OA - OF = 9 - 4 = 5 \text{ (см)}$$

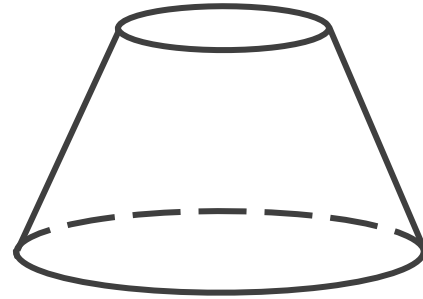
$$A_1A = l = \sqrt{A_1F^2 + FA^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2} \text{ (см)}$$

$$S_{\text{бок.пов}} = \pi(9 + 4) \cdot 5\sqrt{2} = 65\sqrt{2}\pi \text{ (см}^2\text{)}$$

Ответ: $65\sqrt{2}\pi \text{ см}^2$.



Усеченный конус



$$S_{\text{бок.пов}} = \pi(r + r_1)l$$

$$S_{\text{полн.пов.}} = \pi(r + r_1)l + \pi r^2 + \pi r_1^2$$