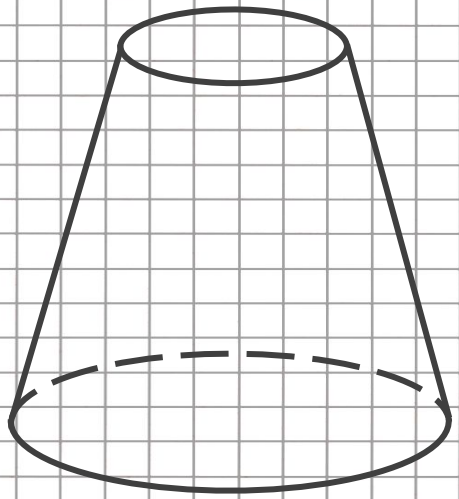
Усеченный конус

VIDEOUROKI.NET

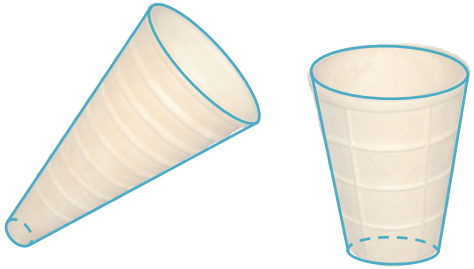
Сегодня на уроке:



- ✔ Усеченный конус
- ✔ Определение усеченного конуса
- ✔ Элементы усеченного конуса
- ✔ Площадь боковой и полной поверхностей усеченного конуса

VIDEOUROKI.NET

Усеченный конус

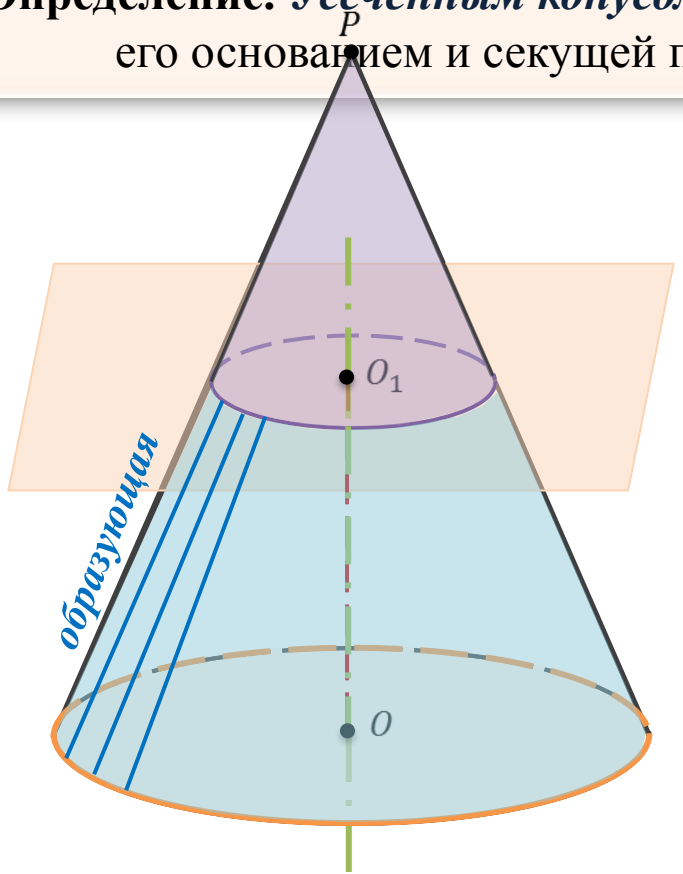


VIDEOUROKI.NET

Усеченный конус

VIDEOUROKI.NET

Определение. ***Усеченным конусом*** называется часть конуса, расположенная между его основанием и секущей плоскостью, перпендикулярной оси конуса.



Элементы усеченного конуса:

Основание исходного конуса и *круг*, полученный в сечении этого конуса плоскостью, называются ***основаниями*** усеченного конуса.

Высотой усеченного конуса называется отрезок, соединяющий центры его оснований.

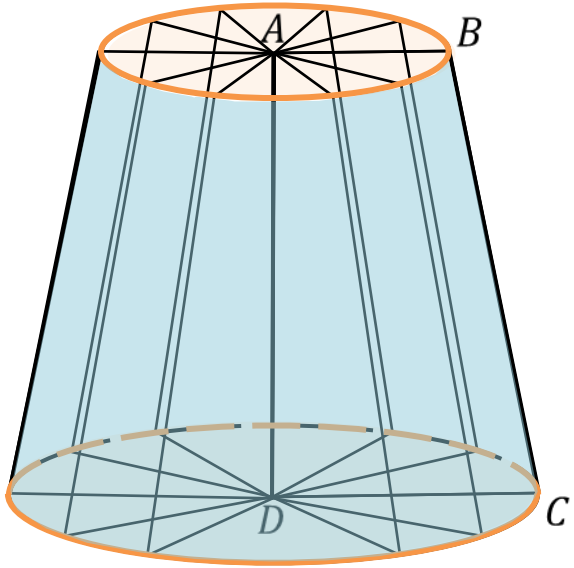
Прямая O_1O называется его ***осью***.

Часть конической поверхности, ограничивающая усеченный конус, называется его ***боковой поверхностью***.

Отрезки образующих конической поверхности, расположенные между основаниями, называются ***образующими*** усеченного конуса.

VIDEOUROKI.NET

Усеченный конус может быть получен вращением на 360° прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной к основаниям.



Основания усеченного конуса образуются вращением оснований AB и DC трапеции.

Боковая поверхность усеченного конуса – вращением боковой стороны BC.

VIDEOUROKI.NET

$$\boldsymbol{S_{\text{бок.пов}} = \pi(r + r_1)l},$$

где r и r_1 – радиусы оснований, l – образующая усеченного конуса.

Доказательство.

Пусть P – вершина конуса.

$AA_1 = l$ – одна из образующих усеченного конуса.

Точки O и O_1 – центры его оснований.

$r > r_1$

$$S_{\text{бок.пов}} = \pi r \cdot PA - \pi r_1 \cdot PA_1 = \pi r \cdot (PA_1 + A_1A) - \pi r_1 \cdot PA_1 =$$

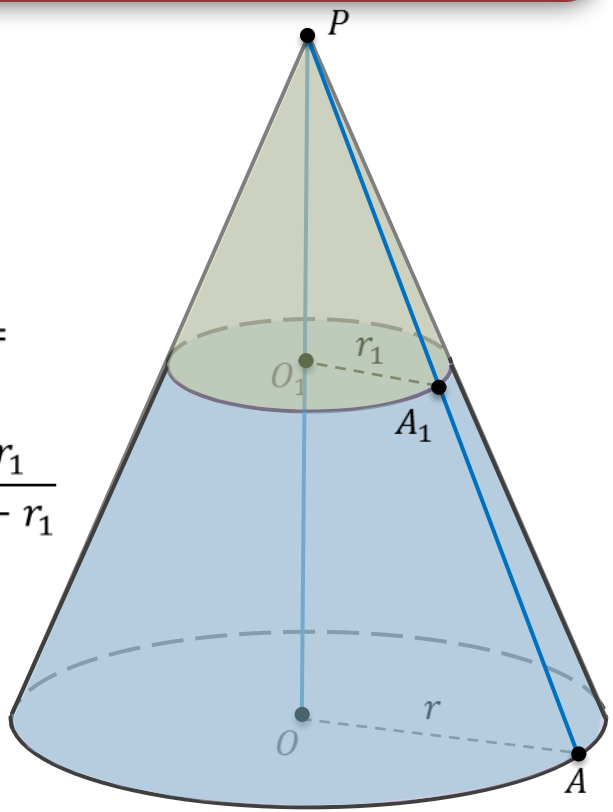
$$= \pi r \cdot PA_1 + \pi r \cdot A_1A - \pi r_1 \cdot PA_1 = \pi rl + \pi(r - r_1)PA_1$$

$$\Delta PO_1A_1 \sim \Delta POA \implies \frac{PA_1}{PA} = \frac{r_1}{r} \Leftrightarrow \frac{PA_1}{PA_1 + l} = \frac{r_1}{r} \Leftrightarrow PA_1 = \frac{lr_1}{r - r_1}$$

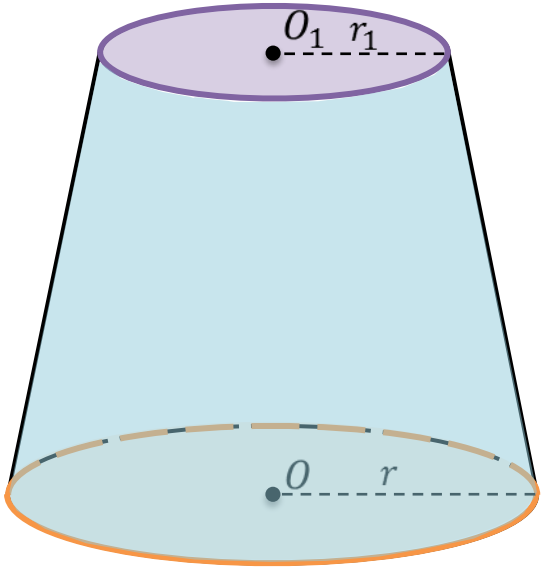
$$\pi rl + \pi(r - r_1)PA_1 = \pi rl + \pi(r - r_1) \cdot \frac{lr_1}{r - r_1} = \pi rl + \pi r_1 l =$$

$$= \pi(r + r_1)l$$

$$\boxed{\boldsymbol{S_{\text{бок.пов}} = \pi(r + r_1)l}}$$



VIDEOUROKI.NET



$$S_{\text{бок.пов.}} = \pi(r + r_1)l$$

$$S_{\text{н.круга}} = \pi r^2$$

$$S_{\text{в.круга}} = \pi {r_1}^2$$

$$S_{\text{полн.пов.}} = S_{\text{бок.пов.}} + S_{\text{н.осн}} + S_{\text{в.осн}} = \pi(r + r_1)l + \pi r^2 + \pi {r_1}^2$$

$$\boxed{S_{\text{полн.пов.}} = \pi(r + r_1)l + \pi r^2 + \pi {r_1}^2}$$

VIDEOUROKI.NET

Задача. Длины радиусов оснований и образующей усеченного конуса равны соответственно 7 см, 15 см и 17 см. Вычислите его высоту.

Решение.

O_1A_1AO – прямоугольная трапеция.

$O_1O = h$

$A_1M \perp OA$

O_1A_1MO – прямоугольник.

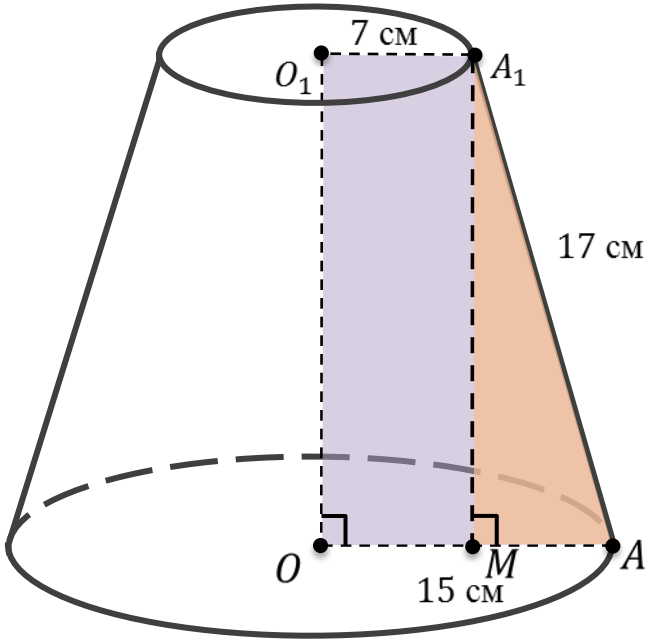
$O_1A_1 = OM = 7$ (см), $O_1O = MA_1 = h$

$\triangle A_1AM$ – прямоугольный.

$MA = OA - OM = 15 - 7 = 8$ (см)

$$MA_1 = h = \sqrt{{AA_1}^2 - MA^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15 \text{ (см)}$$

Ответ: 15 см.



VIDEOUROKI.NET

Задача. Длины радиусов оснований усеченного конуса равны 9 см и 4 см. Вычислите площадь боковой поверхности этого конуса, если угол между образующей и плоскостью его основания равен 45°.

Решение.

$\boldsymbol{S_{\text{бок.пов}} = \pi(r + r_1)l}$

O_1A_1AO – прямоугольная трапеция.

$O_1O = h$

$A_1F \perp OA$

O_1A_1FO – прямоугольник.

$O_1A_1 = OF = 4$ (см), $O_1O = FA_1 = h$

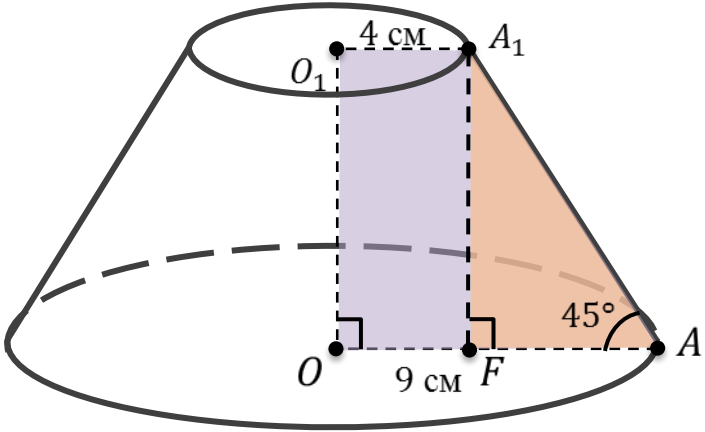
$\triangle A_1AF$ – прямоугольный.

$A_1F = FA = OA - OF = 9 - 4 = 5$ (см)

$A_1A = l = \sqrt{A_1F^2 + FA^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$ (см)

$S_{\text{бок.пов}} = \pi(9 + 4) \cdot 5\sqrt{2} = 65\sqrt{2}\pi$ (см^2)

Ответ: $65\sqrt{2}\pi$ см^2.



VIDEOUROKI.NET

Усеченный конус

$$S_{\text{бок.пов}} = \pi(r + r_1)l$$

$$S_{\text{полн.пов.}} = \pi(r + r_1)l + \pi r^2 + \pi {r_1}^2$$

VIDEOUROKI.NET