

# Тема урока: «Исследование функций»



# ЭПИГРАФ К УРОКУ:

**«НАЧИНАТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ МОЖНО ПО-РАЗНОМУ... Все равно начало почти всегда оказывается весьма несовершенной, нередко безуспешной попыткой. *ЕСТЬ ИСТИНЫ*, как страны, *НАИБОЛЕЕ УДОБНЫЙ ПУТЬ К КОТОРЫМ СТАНОВИТСЯ ИЗВЕСТНЫМ ЛИШЬ ПОСЛЕ ТОГО, КАК МЫ ИСПРОБУЕМ ВСЕ ПУТИ*. Кому-то приходится, рискуя собой, сходить с проторенной дороги, чтобы указать другим правильный путь... *НА ПУТИ К ИСТИНЕ МЫ ПОЧТИ ВСЕГДА ОБРЕЧЕНЫ СОВЕРШАТЬ ОШИБКИ*».**

**Дени Дидро**



## Вопросы:

### 1. Что называется числовой функцией?

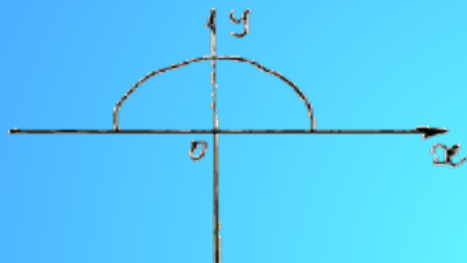
Числовой функцией с областью определения  $D$  называется соответствие, при котором каждому числу  $x$  из множества  $D$  сопоставляется по некоторому правилу число  $y$ , зависящее от  $x$ .

### 2. Что называется графиком функции?

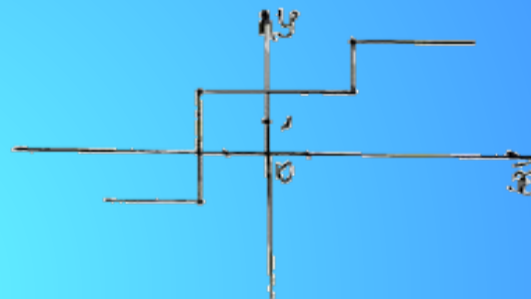
Графиком функции  $f$  называется множество всех точек  $(x; y)$  координатной плоскости, где  $y=f(x)$ , а  $x$  «пробегаёт» всю область определения функции  $f$ .

3. Какие из линий, изображённых на рисунке являются графиками функций?

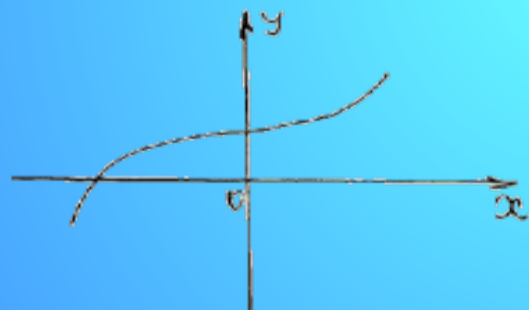
а)



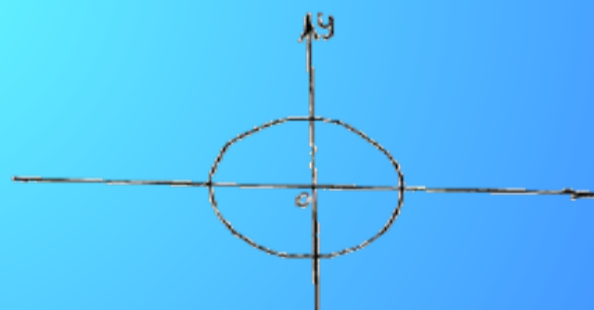
б)



в)



г)





1. Графиком функции  $y = x^2$  является ...
2. Вертикальную координатную прямую на координатной плоскости называют осью...
3. Графиком функции  $y = 1/x$  является ...
4. Зависимость, при которой каждому значению  $x$  ставится в соответствие единственное значение  $y$  называется ...
5. Множество всех точек  $(x; y)$  координатной плоскости, где  $y = f(x)$ , а  $x$  «пробегаёт» всю область определения функции  $f$ .
6. Графиком функции  $y = kx + b$  является ...
7. Горизонтальную координатную прямую на координатной плоскости называют осью...
8. Ось  $x$  и ось  $y$  называют осями ...

# Ответы к тесту:

## Вариант 1

- 1. Б
- 2. Б
- 3. А
- 4. Б
- 5. В

## Вариант 2

- 1. А
- 2. Б
- 3. А
- 4. В
- 5. Б

## Вариант 3

- 1. Б
- 2. Б
- 3. А
- 4. Б
- 5. В

## Оценки:

нет ошибок	«5»
1 ошибка	«4»
2 ошибки	«3»
3 и более	«2»

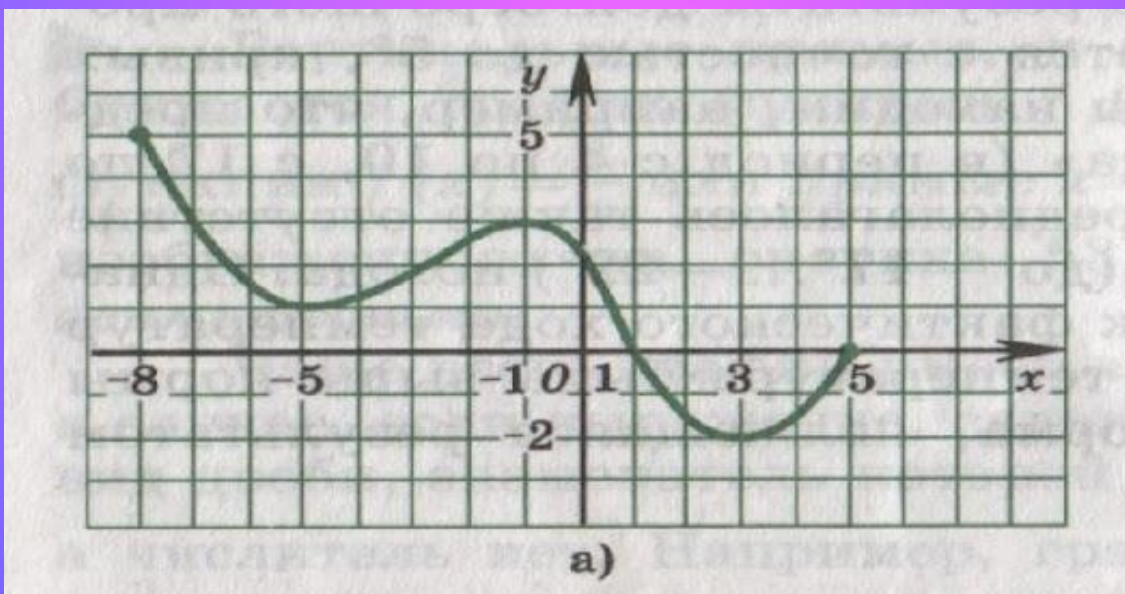
## Схема исследования функций:

1. Найти область определения функции.
2. Определить чётность или нечётность функции, периодичность.
3. Найти координаты точек пересечения графика с осями координат.
  1. Найти промежутки знакопостоянства функции.
5. Определить промежутки возрастания или убывания функции.
6. Найти точки экстремума функции, вид экстремума (максимум или минимум) и значения функции в этих точках.
7. Найти область значений функции.
8. Построить график функции.

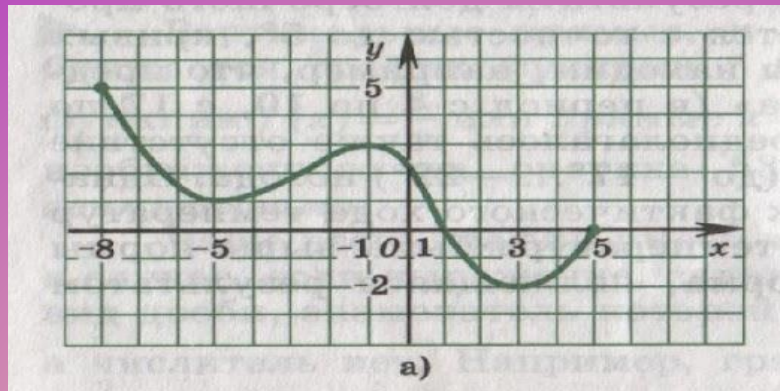


# Задание 1.

Проведите по общей схеме исследование функции, заданной графиком.







1. Область определения функции  $D(y) = [-8; 5]$ .
2. Функция ни чётная, ни нечетная. Функция не периодическая.
3. Пересечение с осью  $OX$ :  $(1; 0)$ ,  $(5; 0)$ .  
с осью  $OY$ :  $(0; 2)$ .

1. Промежутки знакопостоянства:  
 $f(x) > 0$ , при  $x$  принадлежащем промежутку  $[-8; 1)$ .  
 $f(x) < 0$ , при  $x$  принадлежащем промежутку  $(1; 5]$ .

5. Функция возрастает на промежутке  $[-5; -1] \cup [3; 5]$ .  
Функция убывает на промежутке  $[-8; -5] \cup [-1; 3]$ .

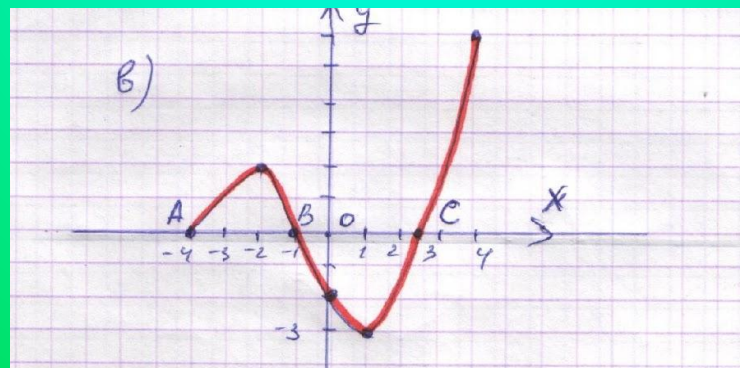
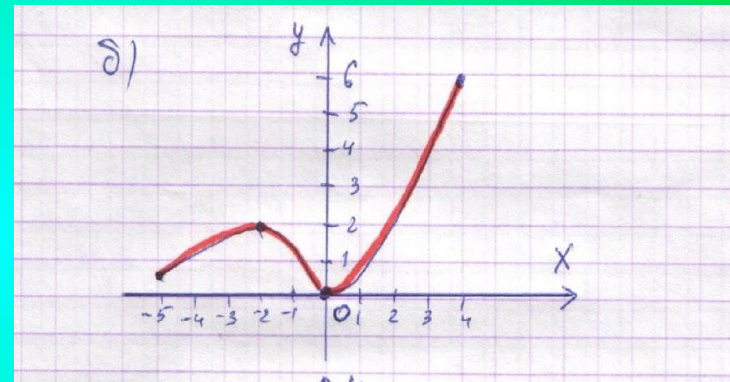
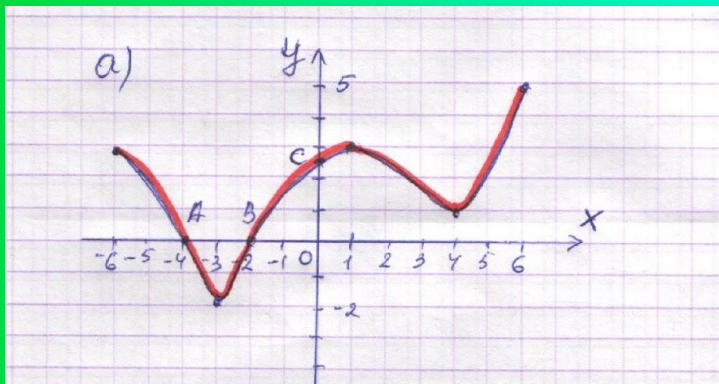
6. Точки экстремума:  $x_{\max} = -1$ ,  $y_{\max} = 3$ ,  $x_{\min} = -5$ ,  $y_{\min} = 1$ ,  
 $x_{\min} = 3$ ,  $y_{\min} = -2$ .

7. Область значений  $E(y) = [-2; 5]$ .

## Задание 2.

Постройте график функции  $f$ , если известны её свойства.

Стр. 55, № 91(а, б, в)



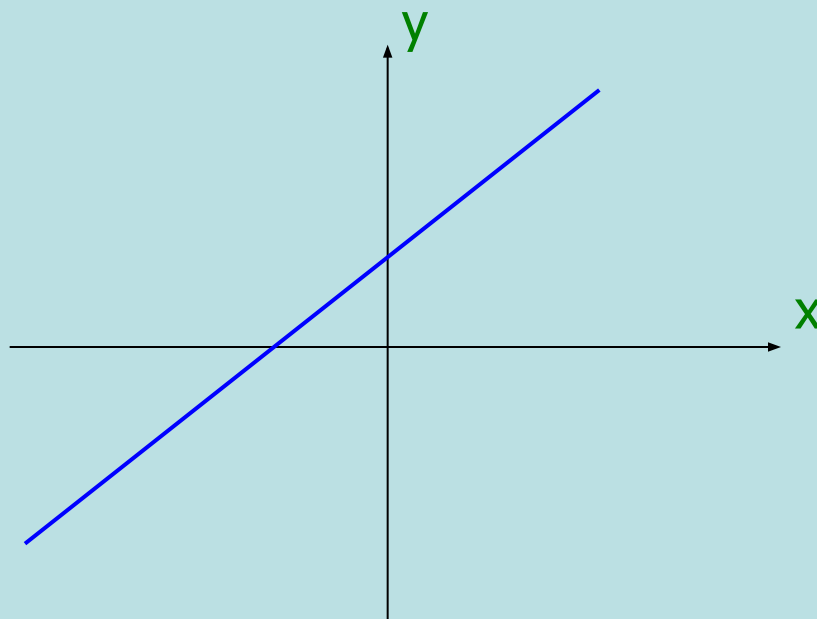
Защита проектов  
по теме:

«Построение функций по  
общей схеме исследования»



Задание группы 1. Построить график функции  $f(x) = 2x - 6$ , используя схему исследования.

**Гипотеза.** Графиком данной функции является прямая.



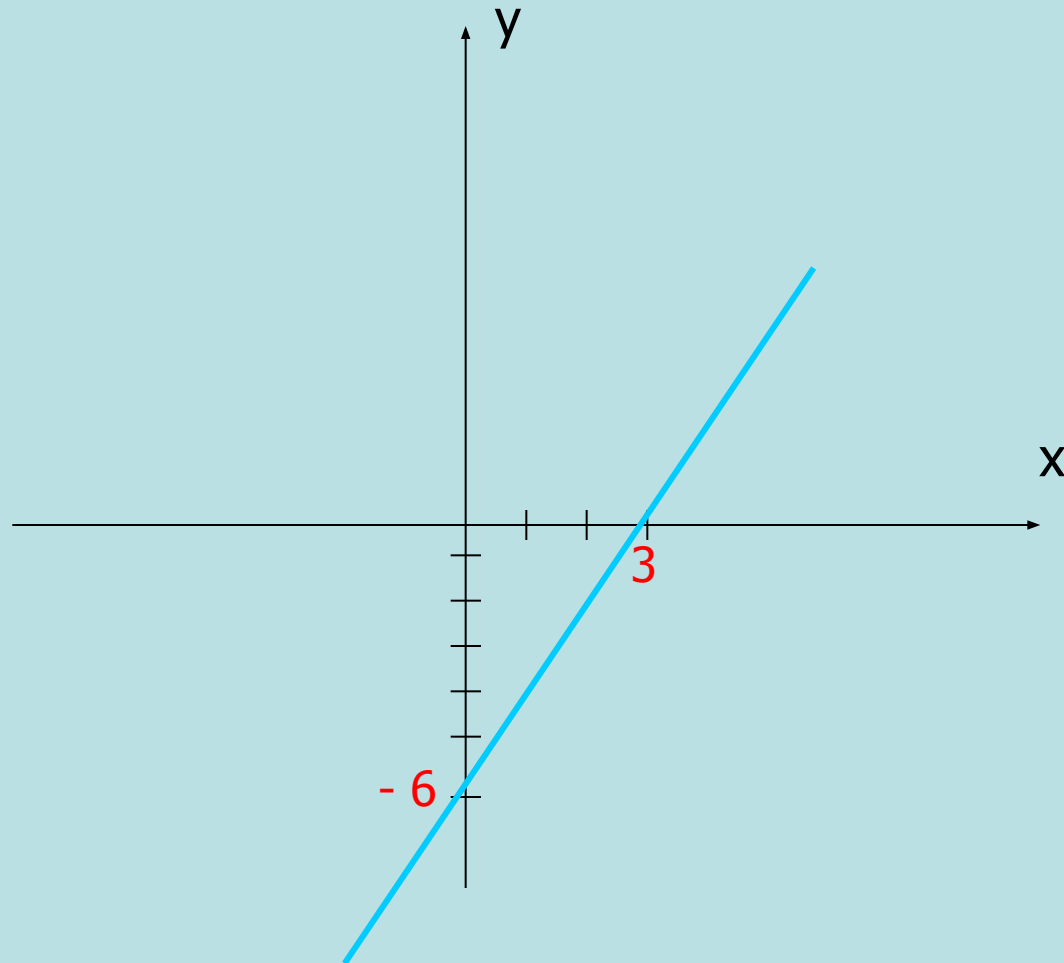
Проверим гипотезу, проведя исследование функции по общей схеме исследования.

## Исследование функции $f(x) = 2x - 6$ .

1. Область определения функции  $D(y) = (-\infty; +\infty)$ .
2.  $f(-x) = 2(-x) - 6 = -2x - 6 = -(2x + 6)$  – функция ни чётная, ни нечётная. Функция не периодическая.
3. Пересечение с осью:
  - а) с осью  $OX$ ,  $y = 0$ .
$$2x - 6 = 0,$$
$$2x = 6,$$
$$x = 3$$
$$(3; 0).$$
  - б) с осью  $OY$ ,  $x = 0$ .
$$2 \cdot 0 - 6 = y,$$
$$0 - 6 = y,$$
$$y = -6.$$
$$(0; -6).$$
4. Промежутки знакопостоянства:

$f(x) > 0,$	$2x - 6 > 0,$	$2x > 6,$	$x > 3.$	$(3; +\infty).$
$f(x) < 0,$	$2x - 6 < 0,$	$2x < 6,$	$x < 3.$	$(-\infty; 3).$
5. Функция возрастает на промежутке  $(-\infty; +\infty)$ , т. к.  $k = 2, k > 0$ .
6. Точек экстремума нет.
7. Область значений  $E(y) = (-\infty; +\infty)$ .

Построим график функции  $f(x) = 2x - 6$ .



**Вывод.** Гипотеза подтвердилась.

Графиком данной функции является прямая.



## Задание группы 2.

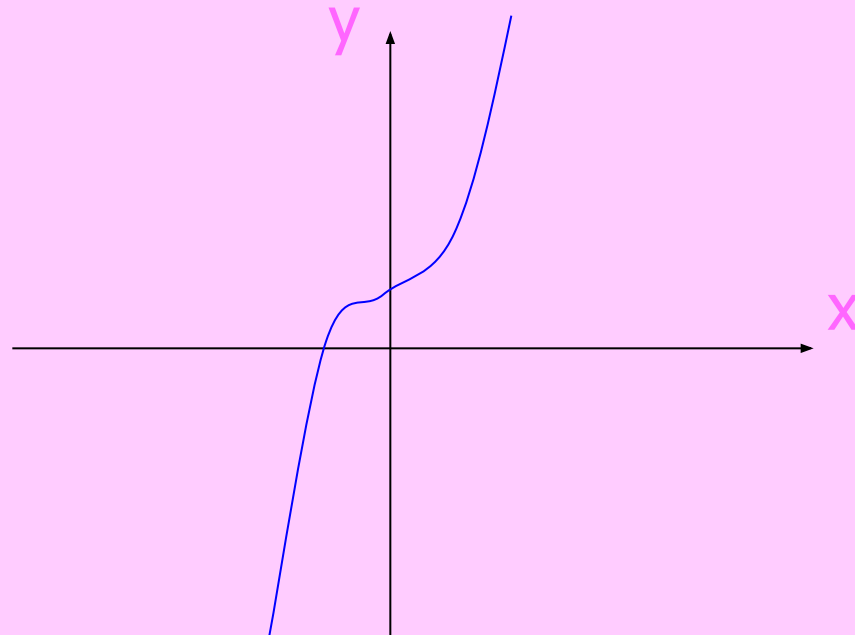
Построить график функции  $f(x) = x^3 - 1$ ,  
используя схему исследования.

# Выдвигаем гипотезу:

Графиком функции  $y = x^3 - 1$  является

кубическая парабола.

Построим схематический график.



# Исследуем функцию $y = x^3 - 1$

1. Область определения функции  $D(y) = (-\infty; +\infty)$ .

2.  $f(-x) = (-x)^3 - 1 = -x^3 - 1 = -(x^3 + 1)$  – функция ни чётная, ни нечетная. Функция не периодическая.

3. Пересечение с осью:

а) с осью  $OX$ ,  $y = 0$ .

$$x^3 - 1 = 0,$$

$$x^3 = 1,$$

$$x = 1.$$

$$(1; 0).$$

б) с осью  $OY$ ,  $x = 0$ .

$$y = 0^3 - 1,$$

$$y = -1.$$

$$(0; -1).$$

4. Промежутки знакопостоянства:

$$f(x) > 0, \quad x^3 - 1 > 0, \quad x^3 > 1, \quad x > 1. \quad (1; +\infty).$$

$$f(x) < 0, \quad x^3 - 1 < 0, \quad x^3 < 1, \quad x < 1. \quad (-\infty; 1).$$

5.  $x_2 = 1, x_1 = 0.$

$$f(x_2) = f(1) = 1^3 - 1 = 0.$$

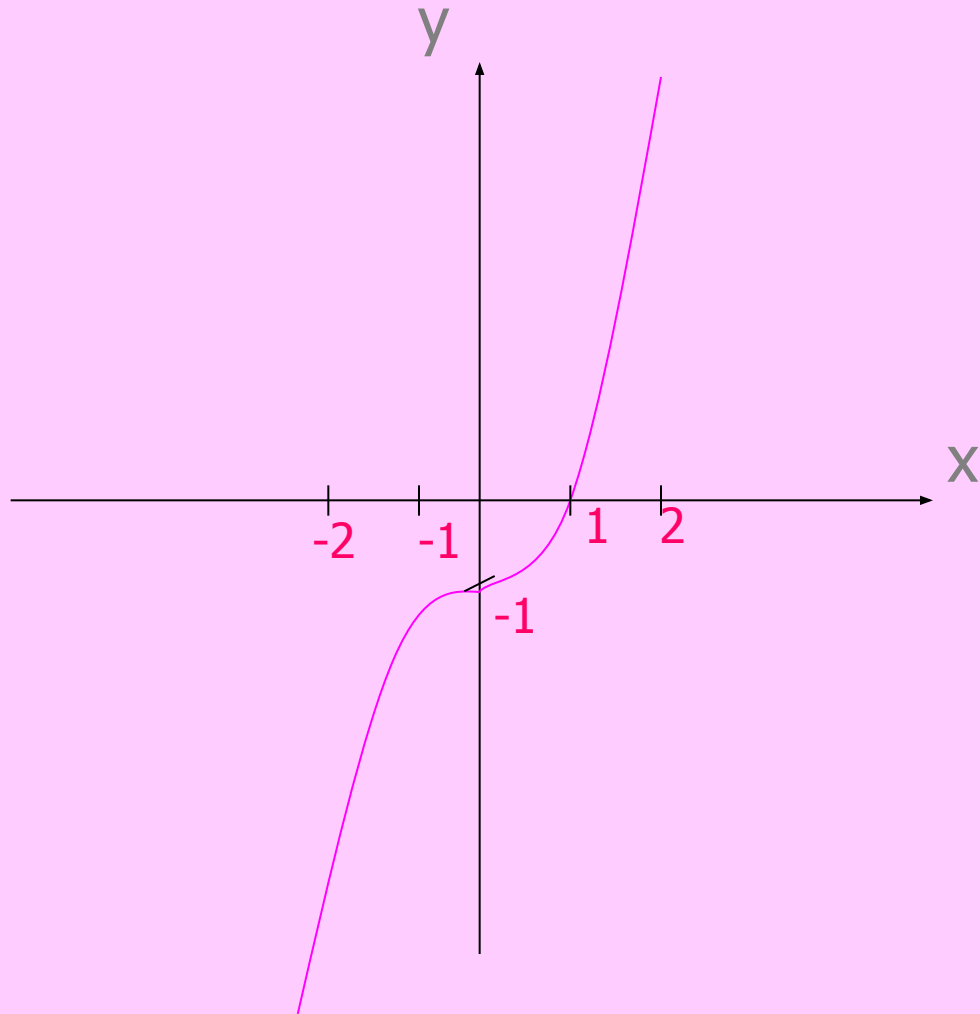
$$f(x_1) = f(0) = 0^3 - 1 = -1.$$

$x_2 > x_1, f(x_2) > f(x_1)$  – функция возрастает.

6. Точек экстремума нет, т. к. функция возрастает на всей области определения.

7. Область значений  $E(y) = (-\infty; +\infty).$

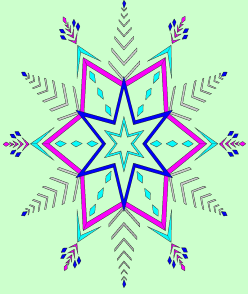
Используя схему исследования функции  $y = x^3 - 1$  строим её график.



Сделаем вывод.

**Графиком функции  $y = x^3 - 1$   
является кубическая парабола,  
опущенная на 1 единицу вниз.**





## Задание группы 3.

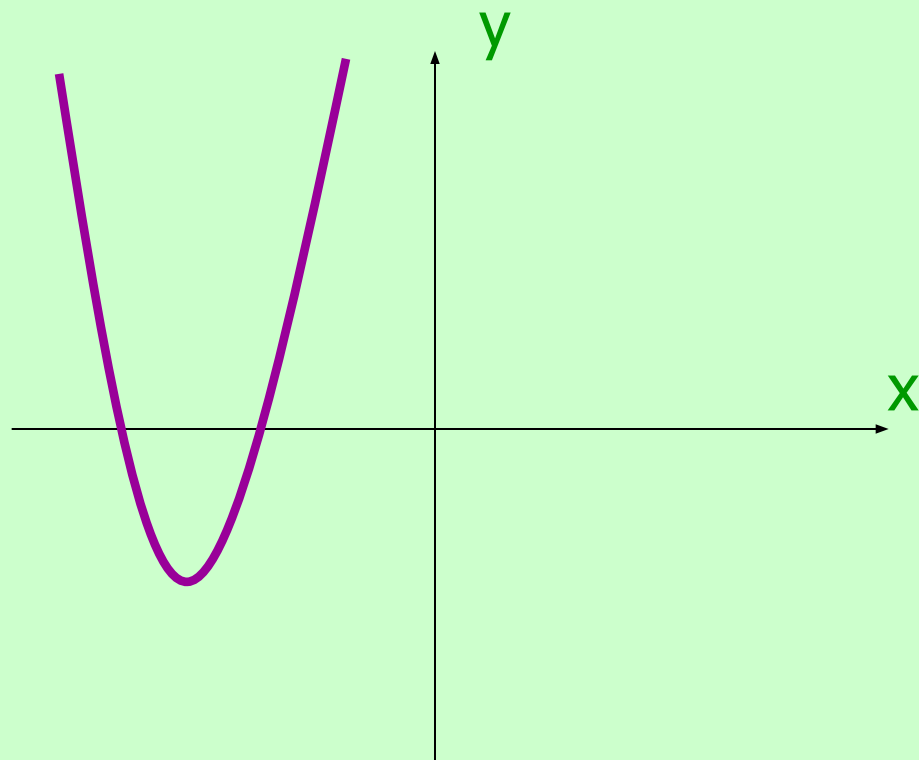
Построить график функции  $f(x) = x^2 - 4x$ ,  
используя схему исследования.

# Гипотеза

**Графиком функции  $y = x^2 - 4x$   
является парабола.**



Предположили, что график проходит так:



# Исследуем функцию $y = x^2 - 4x$

1. Область определения функции  $D(y) = (-\infty; +\infty)$ .
2.  $f(-x) = (-x)^2 - 4(-x) = x^2 + 4x = -(-x^2 - 4x)$  – функция ни чётная, ни нечётная. Функция не периодическая.

### 3. Пересечение с осью:

а) с осью  $OX$ ,  $y = 0$ .

$$x^2 - 4x = 0,$$

$$x(x - 4) = 0,$$

$$x = 0 \text{ или } x - 4 = 0$$

$$x = 4.$$

$(0; 0)$ .       $(4; 0)$ .

б) с осью  $OY$ ,  $x = 0$ .

$$y = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0,$$

$$y = 0.$$

$(0; 0)$

Найдём вершину параболы:  $x = 4 : 2 = 2$ ;

$$y = 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4.$$

$(2; -4)$  – вершина параболы.

#### 4. Промежутки знакопостоянства:



$$f(x) > 0, \quad x^2 - 4x > 0, \quad x(x - 4) > 0,$$

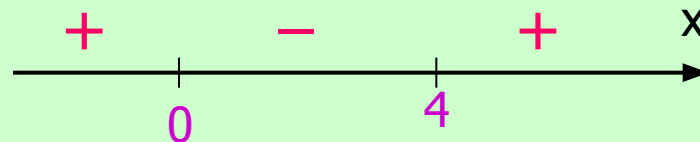
$$x^2 - 4x = 0, \quad x(x - 4) = 0,$$

$$x = 0 \text{ или } x - 4 = 0.$$

$$x = 4.$$

$$f(x) > 0, \quad (-\infty; 0) \cup (4; +\infty).$$

$$f(x) < 0, \quad (0; 4).$$



## 5. Промежутки возрастания и убывания функции:

$$x_2 = 1, x_1 = 0.$$

$$f(x_2) = f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3.$$

$$f(x_1) = f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0.$$

$x_2 > x_1$ ,  $f(x_2) < f(x_1)$  – функция убывает на промежутке  $(-\infty; 2)$ .

$$x_1 = 3, x_2 = 4.$$

$$f(x_1) = f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 = -3.$$

$$f(x_2) = f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 = 0.$$

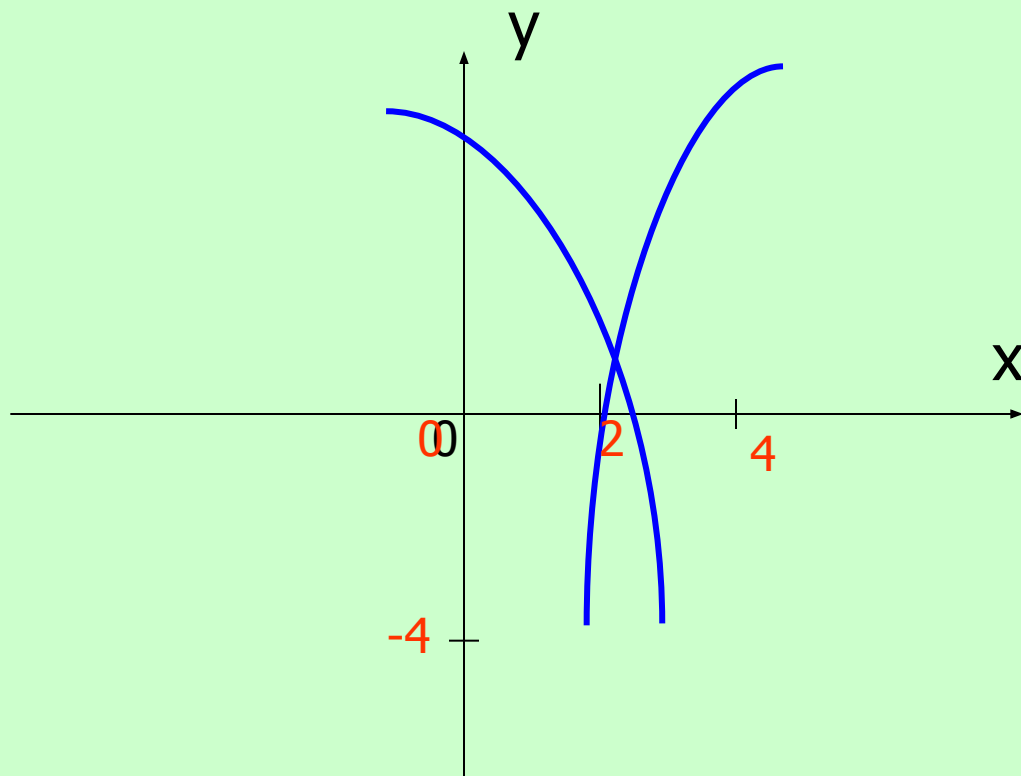
$x_2 > x_1$ ,  $f(x_2) > f(x_1)$  – функция возрастает на промежутке  $(2; +\infty)$ .

## 6. Точка минимума $(2; -4)$ .

## 7. Область значений $E(y) = (-4; +\infty)$ .



Построим график функции  $y = x^2 - 4x$



## Вывод

**Графиком функции  $y = x^2 - 4x$   
является парабола,  
ветви параболы направлены вверх.**

## *Задание группы 4.*



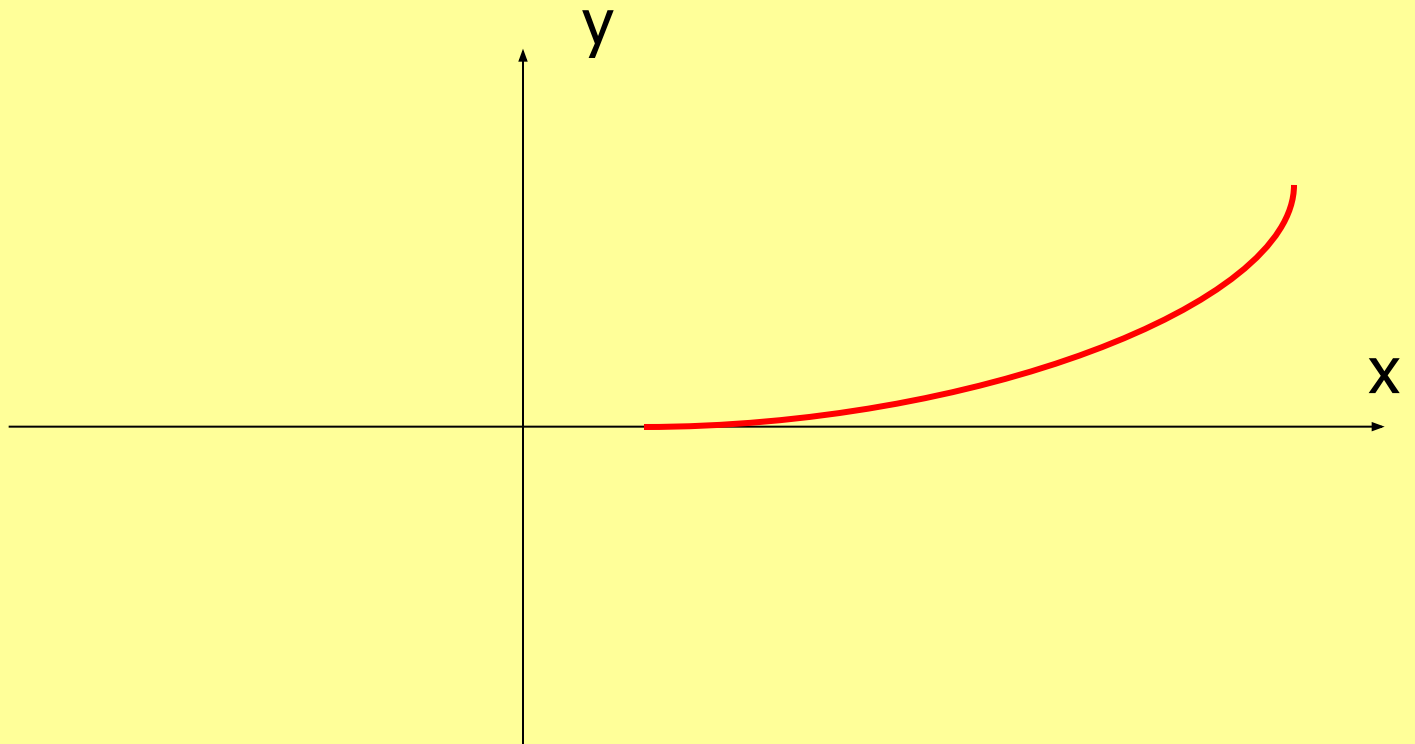
Построить график функции

$$f(x) = \sqrt{x - 3},$$

используя схему исследования.

# Гипотеза

Предположим, что график функции  $f(x) = \sqrt{x - 3}$  будет иметь вид:



Исследуем функцию  $f(x) = \sqrt{x - 3}$  по схеме исследования.

1. Область определения функции  $D(y) = [3; +\infty)$ .

2.  $f(-x) = \sqrt{(-x) - 3} = \sqrt{-x - 3}$  – функция ни чётная, ни нечётная. Функция не периодическая.

3. Пересечение с осью:

а) с осью  $OX$ ,  $y = 0$ .

$$\sqrt{x - 3} = 0,$$

$$x - 3 = 0,$$

$$x = 3.$$

$$(3; 0).$$

б) с осью  $OY$ ,  $x = 0$ .

$$y = \sqrt{0 - 3} = \sqrt{-3}.$$

точек пересечения нет.

4. Промежутки знакопостоянства:

$$f(x) > 0, \quad \sqrt{x - 3} > 0, \quad x - 3 > 0, \quad x > 3. \quad (3; +\infty).$$

5. Промежутки возрастания и убывания функции:

$$x_2 = 4, x_1 = 3.$$

$$f(x_2) = f(4) = \sqrt{4 - 3} = \sqrt{1} = 1, \quad 1 > 0.$$

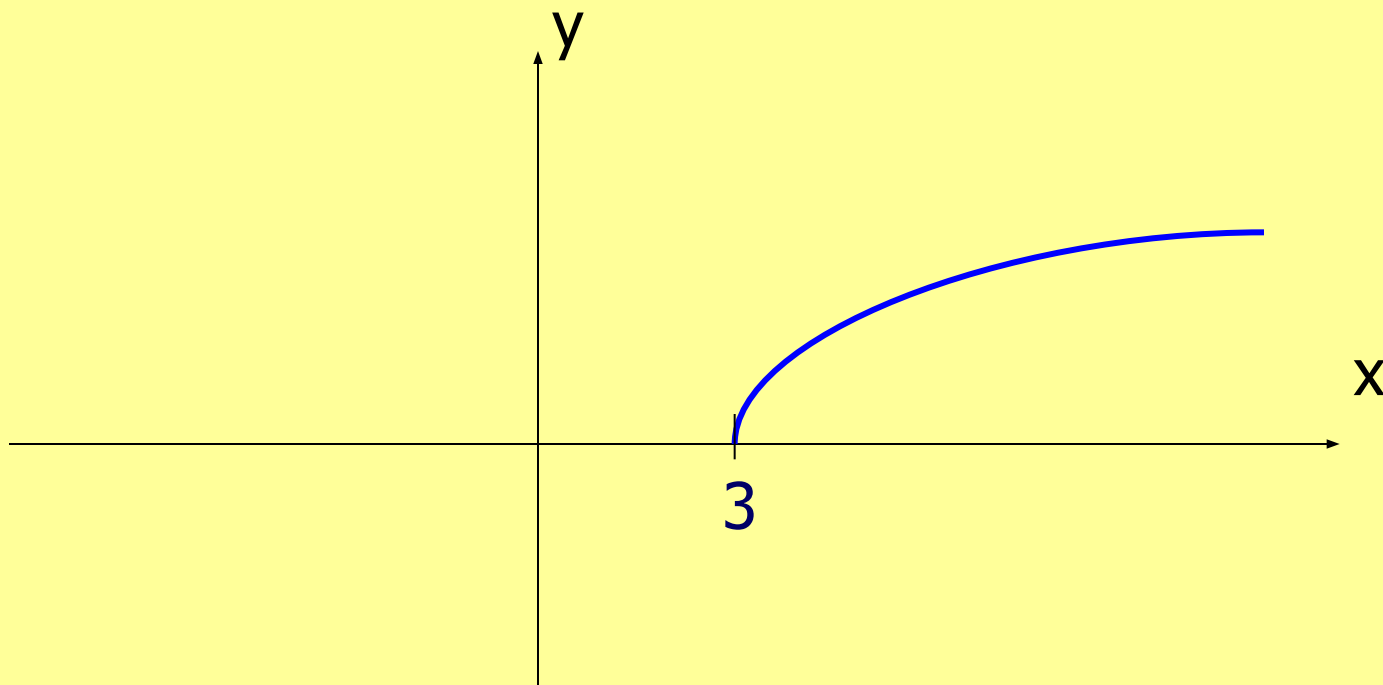
$$f(x_1) = f(3) = \sqrt{3 - 3} = 0.$$

$x_2 > x_1, f(x_2) > f(x_1)$  – функция возрастает.

6. Точек экстремума нет, т.к. функция возрастает.

7. Область значений  $E(y) = (0; +\infty)$ .

Используя схему исследования функции  $f(x) = \sqrt{x} - 3$  построим её график.



Вывод:

Гипотеза подтвердилась.

Мы построили график функции

$$f(x) = \sqrt{x - 3}.$$





## Задание группы 5.

**Построить график функции  $f(x) = |x| + 1$ ,  
используя схему исследования.**

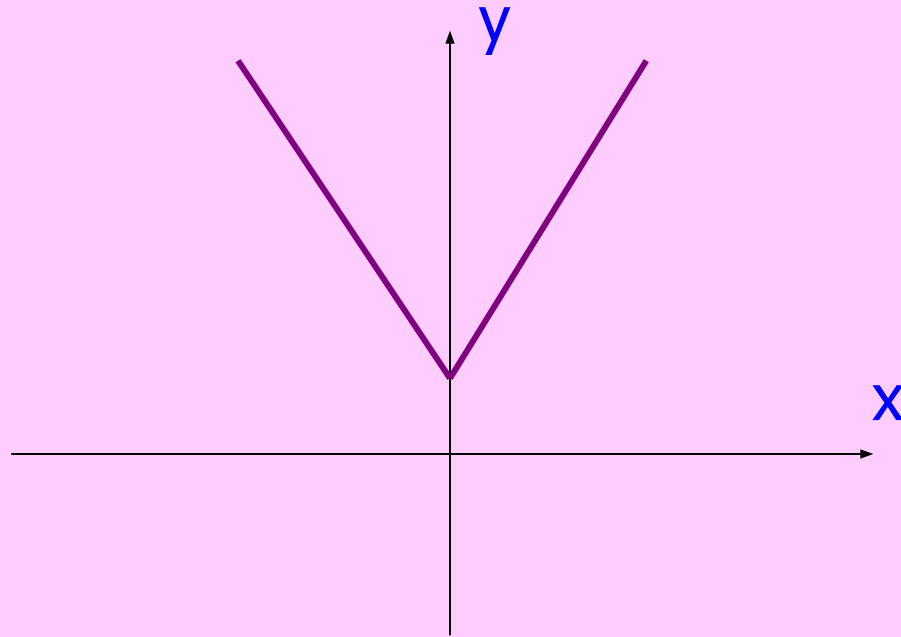




# Гипотеза

Предположим, что график функции

$f(x) = |x| + 1$  будет иметь вид:



# Исследуем функцию $f(x) = |x| + 1$

1. Область определения функции  $D(y) = (-\infty; +\infty)$ .

2.  $f(-x) = |-x| + 1 = |x| + 1 = f(x)$  – функция чётная.  
Функция не периодическая.

3. Пересечение с осью:

а) с осью  $OX$ ,  $y = 0$ .

$$|x| + 1 = 0,$$

$$|x| = -1,$$

пересечений нет.

б) с осью  $OY$ ,  $x = 0$ .

$$y = |0| + 1 = 1.$$

$(0; 1)$ .

4. Промежутки знакопостоянства:

$f(x) > 0$ ,  $|x| + 1 > 0$ , при  $x$  принадлежащем промежутку  $(-\infty; +\infty)$ .



## 5. Промежутки возрастания и убывания функции:

$$x_2 = -1, x_1 = -2.$$

$$f(x_2) = f(-1) = |-1| + 1 = 2.$$

$$f(x_1) = f(-2) = |-2| + 1 = 3.$$

$x_2 > x_1, f(x_2) < f(x_1)$  – функция убывает на промежутке  $(-\infty; 0)$ .

$$x_1 = 1, x_2 = 2.$$

$$f(x_1) = f(1) = |1| + 1 = 2.$$

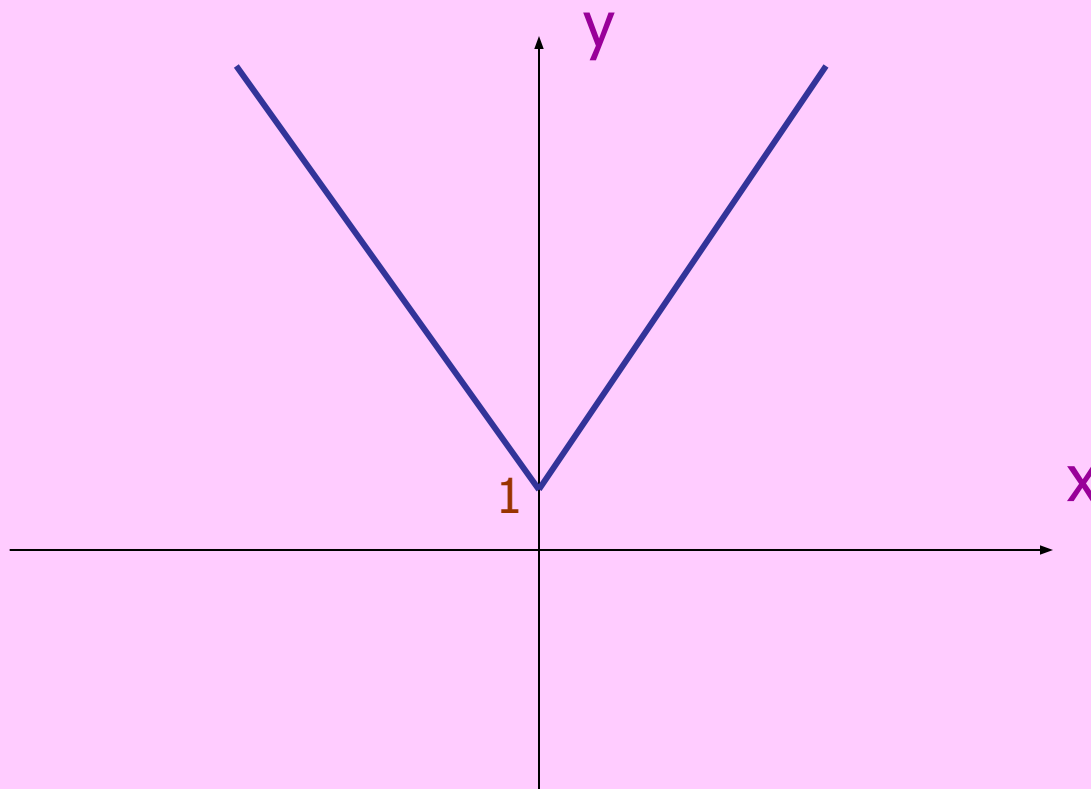
$$f(x_2) = f(2) = |2| + 1 = 3.$$

$x_2 > x_1, f(x_2) > f(x_1)$  – функция возрастает на промежутке  $(0; +\infty)$ .

## 6. Точка минимума $(0; 1)$ .

## 7. Область значений $E(y) = (1; +\infty)$ .

Построим график функции  $f(x) = |x| + 1$



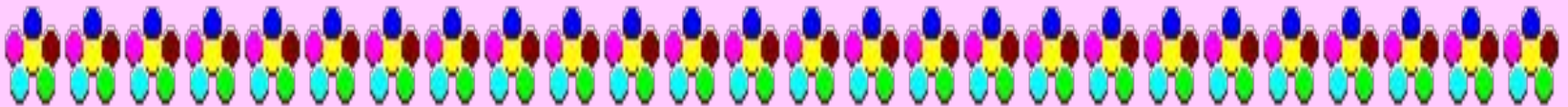
Вывод:



Гипотеза подтвердилась.

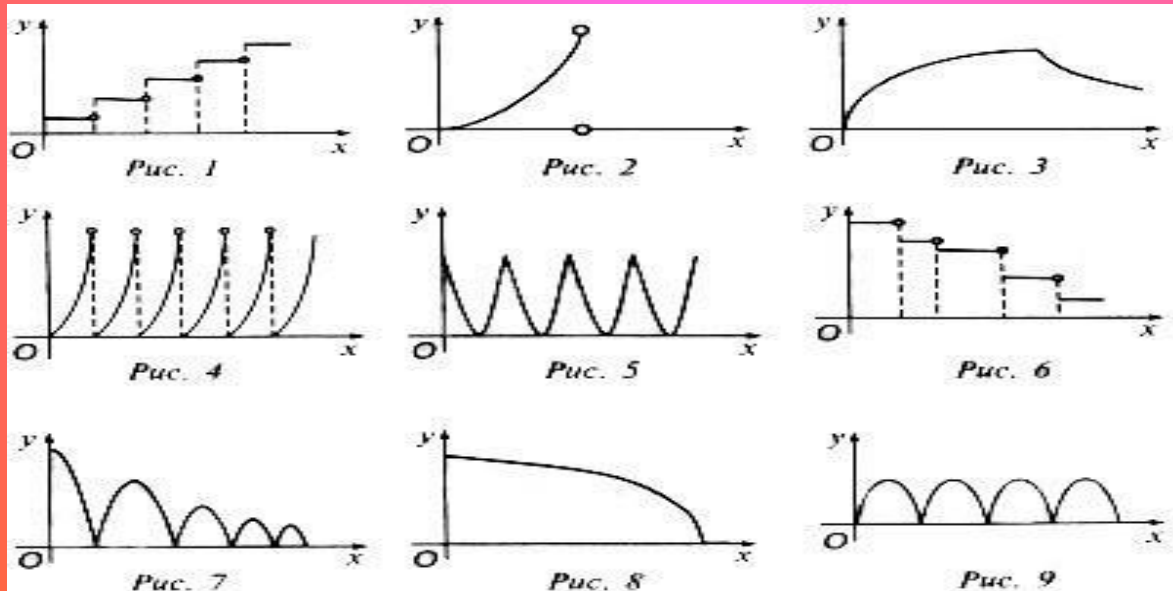
Мы построили график функции

$$f(x) = |x| + 1.$$



# Работа по таблице

Среди данных графиков найти тот, который соответствует следующему описанию: яблоко растёт, затем его срывают и сушат. На весь этот процесс уходит  $x$  дней. Найдите в таблице график, описывающий зависимость массы яблока  $y$  от  $x$ .







# Рефлексия

Я доволен своей работой на уроке –  
поднять красную карточку.

Я хорошо работал, но умею ещё лучше –  
поднять зелёную карточку.

Работа не получилась, я не доволен собой –  
поднять синюю карточку.



## Домашнее задание

На оценку «3» исследовать функцию  
$$f(x) = x + 5$$

На оценку «4» исследовать функцию  
$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

На оценку «5» исследовать функцию  
$$f(x) = \sqrt{(x-2)} - 2.$$