Теоретическая механика

Ирина Николаевна Харыбина
Кафедра «Теоретическая механика и сопротивление материалов» (СМиТМ)
Аудитория: 450 а
2 семестр: 10 лекций, 10 семинаров

Литература

- 1. Еленев С.А., Новиков В.Г., Шевелева Г.И. Статика: Учебное пособие. М.: Изд-во МГТУ “Станкин”, 2006.
- 2. Еленев С.А., Новиков В.Г., Шевелева Г.И. Кинематика: 2009.
- 3. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике. Учебное пособие для вузов. М.: "Лань", 2006.
- 4. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Учебник для вузов. - М.: "Интеграл-Пресс", 2006.
- 5. Еленев С.А., Новиков В.Г. Методические указания по выполнению домашнего индивидуального задания по статике. - М.: ИЦ ГОУ ВПО МГТУ "Станкин", 2006. - 16 с. (№450) .
- 6. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под ред. А.А.Яблонского. Учебное пособие для технических вузов. М.: "Интеграл-пресс", 2006.
- 7. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учебник для вузов. - М.: "Высшая школа", 2007.

Лекция 1.

Основные понятия, определения и аксиомы механики

- Теоретическая механика представляет собою часть механики, в которой изучаются общие законы движения и взаимодействия материальных тел.
- Под движением в механике понимают механическое движение, т.е. происходящее с течением времени изменение взаимного положения материальных тел в пространстве.
- ***Механическим взаимодействием*** между телами называется тот вид взаимодействия, в результате которого происходит изменение движения этих тел или изменение их формы (деформация).
- Основной задачей теоретической механики является изучение общих законов движения и равновесия материальных тел под действием приложенных к ним сил.

Разделы теоретической механики

- ***Статика***
- ***Кинематика***
- ***Динамика***

Модели в теоретической механике

1. Модели материальных тел:

- *материальная точка (точечная масса)* – простейшая схематизация материального тела, представляющая собой тело определенной массы, положение которого можно определить как положение геометрической точки. В теоретической механике абсолютно все тела рассматриваются как совокупность взаимодействующих материальных точек.
- *механическая система* – совокупность материальных точек (тел), движения которых взаимосвязаны между собой.
- *абсолютно твердое тело* – совокупность материальных точек, расстояния между которыми сохраняются в процессе любых движений, совершаемых этим телом.

2. Модель пространства:

абсолютное пространство - трёхмерное евклидово пространство, в котором выполняется принцип относительности при преобразованиях Галилея.

3. Модель времени:

абсолютное время – время, существующее независимо от наблюдателя и движущееся с постоянной скоростью.

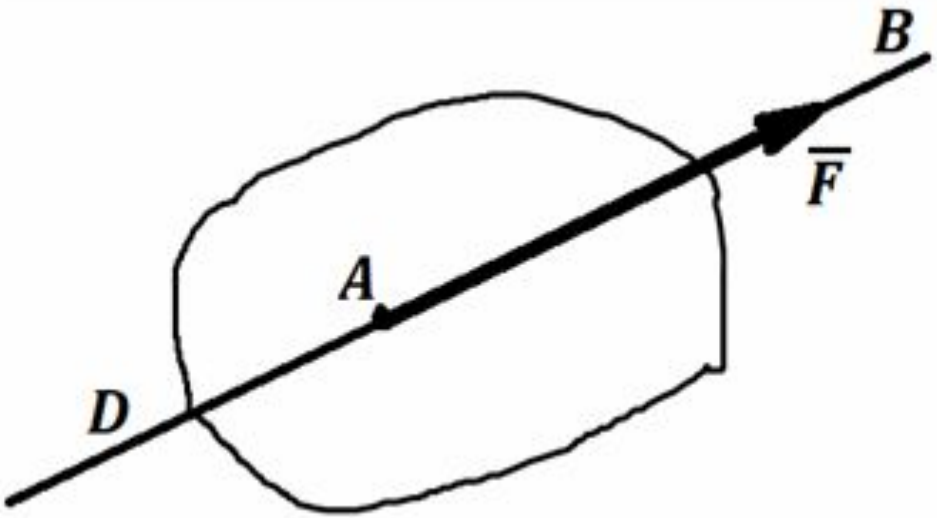
Сила

- Величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия материальных тел, называется в механике ***силой.***
- В Международной системе единиц (СИ) силу измеряют в ньютонах (Н).
- Сила является величиной векторной.
- Ее действие на тело определяется:

  1) численной величиной или модулем,

  2) направлением,

  3) точкой приложения



- Прямая ***DB***, вдоль которой направлена сила, называется ***линией действия силы.***

Аксиомы механики

Теоретическая механика относится к числу аксиоматических дисциплин (отсюда название - теоретическая). В её основе лежат аксиомы:

1. ***Первая аксиома*** *- закон инерции Галилея-Ньютона: всякое тело продолжает удерживаться в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, если только приложенные к нему силы не побуждают его изменить свое состояние.*

2. ***Вторая аксиома*** *- второй закон Ньютона: ускорение,* $\vec{a}$ *сообщаемое материальной точке в инерциальной системе отсчета, пропорционально действующей на точку силе* $\vec{F}$ *и обратно пропорционально массе* m *точки:* $m\vec{a} = \vec{F}$.

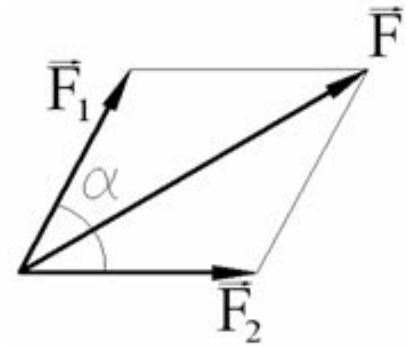
3. ***Третья аксиома*** *- третий закон Ньютона (равенство действия и противодействия): две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по величине и направленными в противоположные стороны по прямой, соединяющей эти точки.*

Четвертая аксиома

Четвертая аксиома *- принцип независимости действия сил: материальная точка, на которую действует несколько сил:* $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ *, получает ускорение* $\vec{a}$*, равное геометрической сумме всех тех ускорений* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$*, которые она получила бы при действии каждой из сил порознь:*

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n = \sum \vec{a}_i .$$

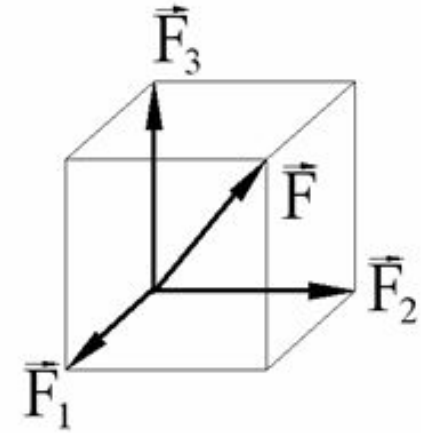
Этот принцип эквивалентен ***закону параллелограмма сил:***



две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, приложенные к материальной точке, можно заменить одной силой $\vec{F}$, равной диагонали параллелограмма: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, причем модуль силы равен

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha},$$

где α - угол между силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$.



Из аксиомы следует, что силу $\vec{F}$, приложенную к некоторой точке, можно разложить на составляющие $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, приложенные к той же точке.

Система сил:

- Уравновешенная
- Эквивалентная
- Равнодействующая

Виды сил:

- Внешние
- Внутренние
- Сосредоточенные
- Распределенные

Система сил

Система сил - совокупность сил, приложенных к одному твердому телу.

Уравновешенная система сил - система сил, под действием которой твердое тело может находиться в покое.

Эквивалентные системы сил - это такие, когда при замене одной на другую движение или покой тела не изменяются.

Равнодействующая системы сил – одна сила, эквивалентная системе сил.

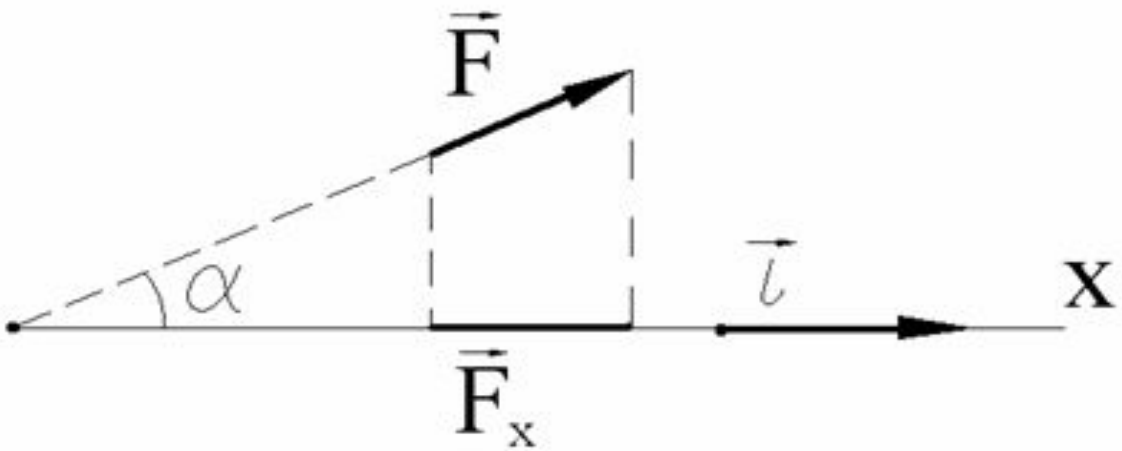
Проекция силы на ось

Проекция силы на ось - скалярная величина, равная

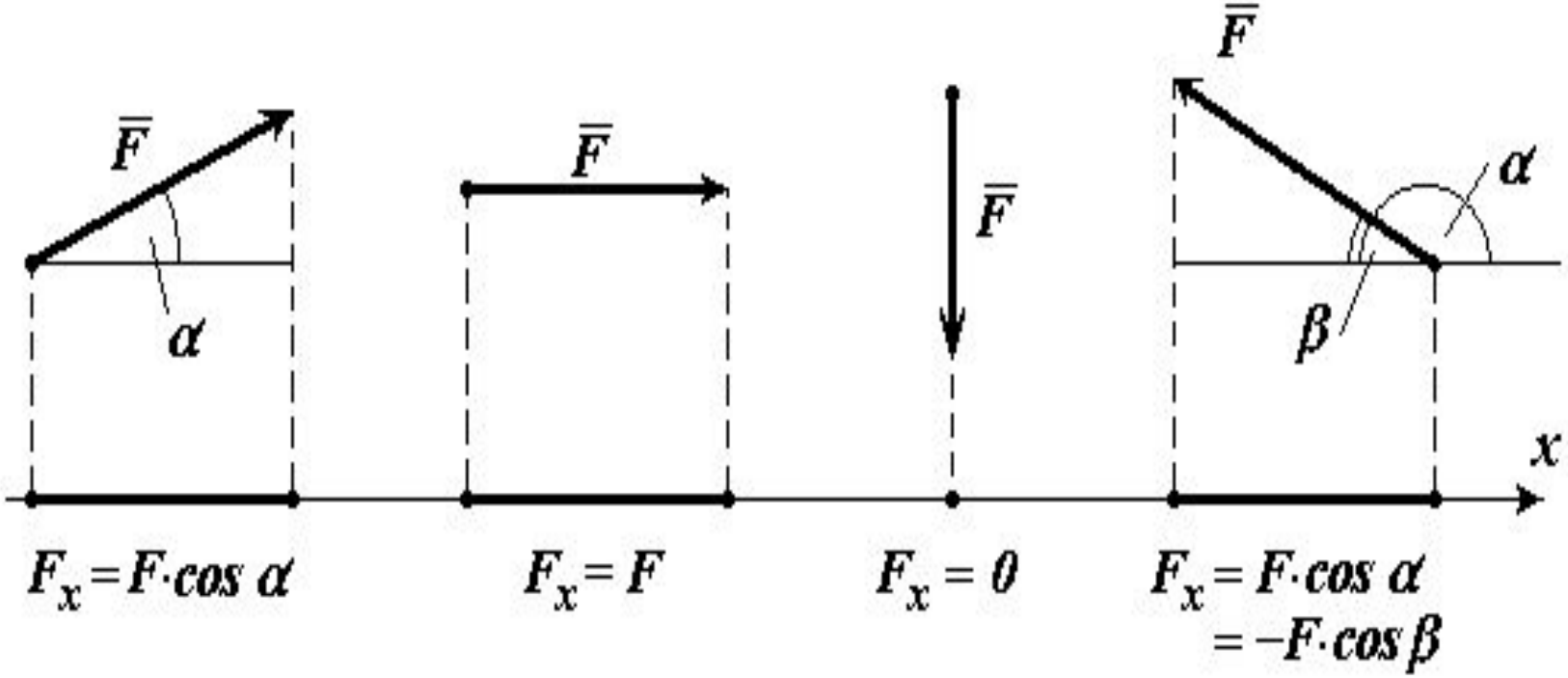
$$F_x = \vec{F} \cdot \vec{i} = F \cos \alpha ,$$

где $\vec{i}$ - орт, идущий по оси x,

α - угол между осью x и силой $\vec{F}$.



Проекция силы на ось

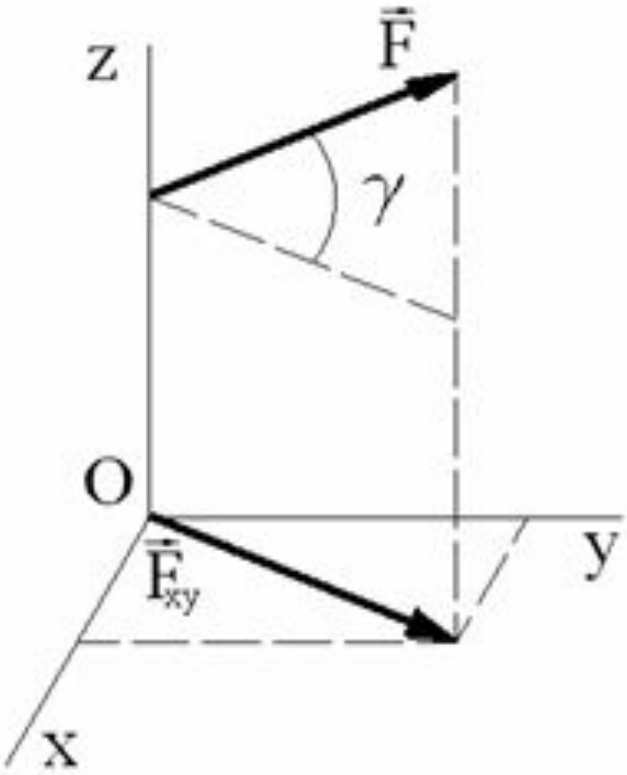


Проекция силы на плоскость

Проекция силы на плоскость - вектор, модуль которого равен

$$F_{xy} = F\cos\gamma,$$

где γ - угол между силой $\vec{F}$ и плоскостью xOy.



Момент силы относительно точки

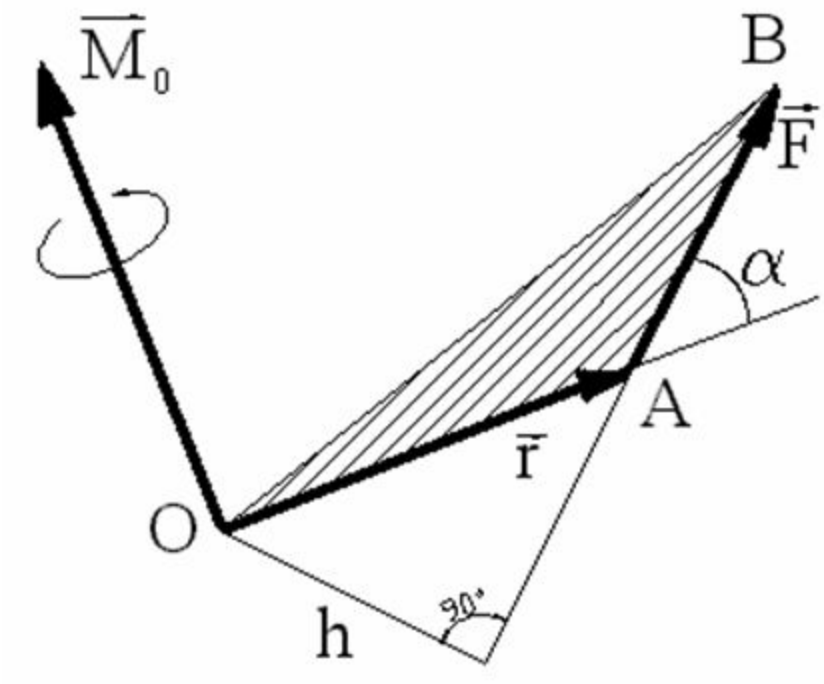
Алгебраическим моментом силы $\vec{F}$ ***относительно точки O*** называют взятое со знаком «+» или «-» произведение модуля этой силы на ее плечо h: $M_0(\vec{F}) = Fh.$ Плечо h силы $\vec{F}$ - это кратчайшее расстояние от моментной точки ***O*** до линии действия силы.

Вектор-момент силы $\vec{F}$ ***относительно точки O*** - вектор, равный векторному произведению радиуса-вектора $\vec{r}$, идущего из точки O в точку приложения силы, на силу $\vec{F}$: $\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$.

Модуль вектора-момента равен алгебраическому моменту силы:

$$M_0(\vec{F}) = rF\sin\alpha = Fh.$$

Момент силы относительно точки



Вектор-момент силы:

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

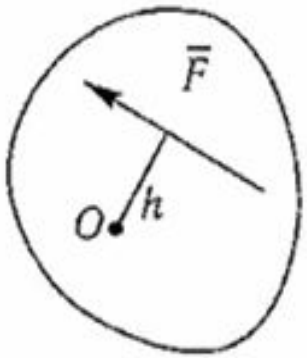
Модуль вектор-момента:

$$M_0(\vec{F}) = rF\sin\alpha = Fh$$

Алгебраический момент:

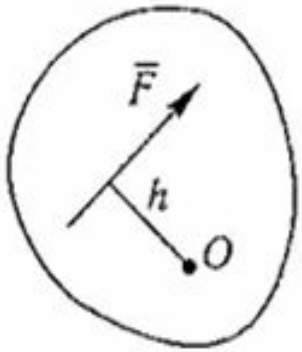
$$M_0(\vec{F}) = \pm Fh.$$

Правило знаков



Плюс, если сила стремится поворачивать тело относительно моментной точки ***против*** хода часовой стрелки:

$$M_0(\vec{F}) = Fh.$$

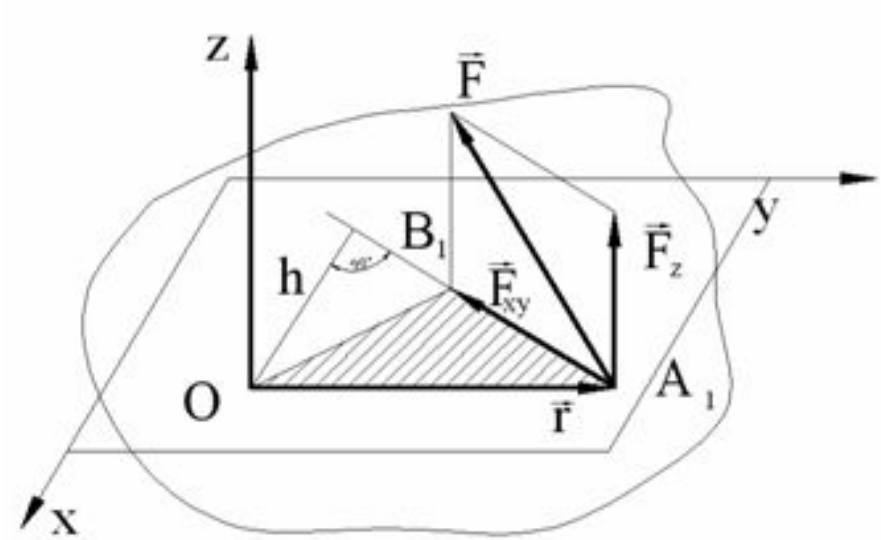


Минус, если сила стремится поворачивать тело относительно моментной точки ***по*** ходу часовой стрелки:

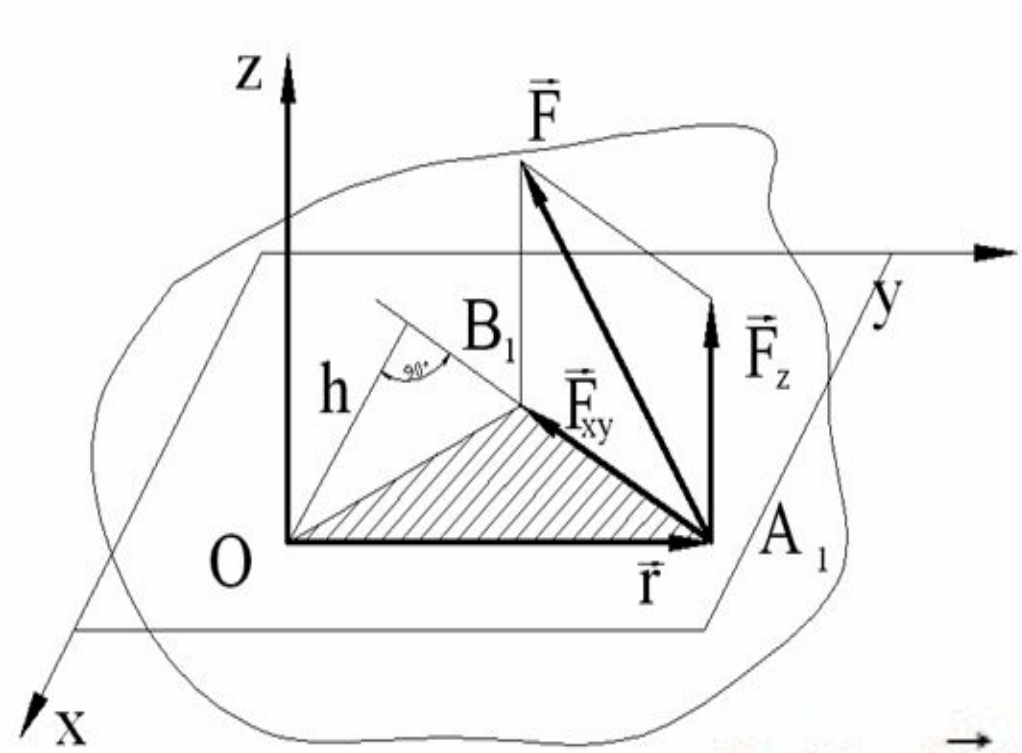
$$M_0(\vec{F}) = -Fh.$$

Момент силы относительно оси

Момент силы относительно оси – скалярная величина, характеризующая вращательный эффект, создаваемый силой, стремящейся повернуть тело вокруг данной оси. Если на тело, которое может вращаться вокруг оси z, действует сила $\vec{F}$, то момент этой силы относительно оси z равен $M_z(\vec{F}) = \pm |\vec{F}_{xy}| h$, где $\vec{F}_{xy}$ - проекция силы $\vec{F}$ на плоскость, перпендикулярную оси z, а h - плечо силы $\vec{F}_{xy}$. Знак "+" выбирается в случае, когда стремление силы вращать тело видится с конца оси z против часовой стрелки. Сила $\vec{F}$, показанная на рисунке, создает положительный момент $M_z(\vec{F})$.



Момент силы относительно оси



$$M_z(\vec{F}) = \pm \left| \vec{F}_{xy} \right| h$$

Главный вектор системы сил

Главный вектор системы сил - это геометрическая сумма сил:

$$\vec{F}^{гл} = \sum \vec{F}_i .$$

Проекции главного вектора на декартовы оси координат:

$$F_x^{гл} = \sum F_{ix} = \sum X_i ,$$

$$F_y^{гл} = \sum F_{iy} = \sum Y_i ,$$

$$F_z^{гл} = \sum F_{iz} = \sum Z_i .$$

Модуль главного вектора и его направляющие косинусы:

$$F^{гл} = \sqrt{\left(\sum X_i\right)^2 + \left(\sum Y_i\right)^2 + \left(\sum Z_i\right)^2} ,$$

$$\cos\left(\vec{F}^{гл}, \vec{i}\right) = \frac{\sum X_i}{F^{гл}} ; \quad \cos\left(\vec{F}^{гл}, \vec{j}\right) = \frac{\sum Y_i}{F^{гл}} ; \quad \cos\left(\vec{F}^{гл}, \vec{k}\right) = \frac{\sum Z_i}{F^{гл}} .$$

Главный момент системы сил

Главный момент системы сил *относительно точки* ***O*** – это геометрическая сумма векторов-моментов всех сил системы относительно точки ***O***:

$$\vec{M}_0^{гл} = \sum \vec{M}_0(\vec{F}_i) \equiv \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i .$$

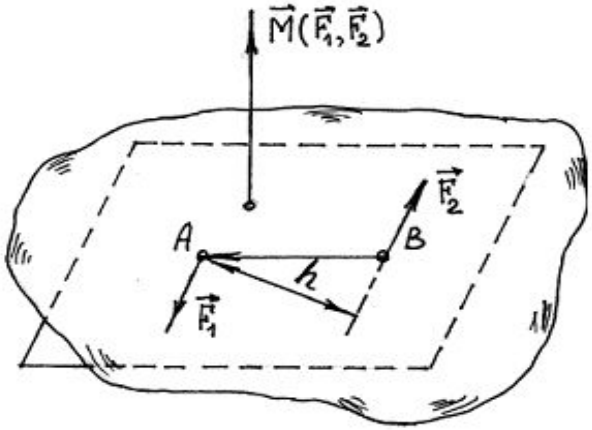
Главный момент относительно точки ***O*** можно выразить через его проекции на оси координат:

$$\vec{M}_o^{гл} = (\Sigma M_x)\vec{i} + (\Sigma M_y)\vec{j} + (\Sigma M_z)\vec{k} .$$

Модуль главного момента и его направляющие косинусы подсчитывают по формулам, аналогичным для главного вектора.

Пара сил

Пара сил *- это совокупность двух параллельных сил, равных по величине, противоположных по направлению, приложенных к одному твердому телу:* $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.



Пара сил стремится вращать тело.

Вектор-момент пары - $\vec{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_2)$ равен вектору-моменту одной из сил пары относительно точки, лежащей на линии действия другой силы:

$$\vec{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_2) = \overline{BA} \times \vec{F}_1.$$

Модуль вектора-момента пары равен:

$$\left|\vec{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_2)\right| = F_1 h = F_2 h,$$

где h - плечо пары, т.е. кратчайшее расстояние между линиями действия.

Произведение одной из сил пары на ее плечо, взятое со знаком «+» или «-», *называют алгебраическим моментом пары сил:*

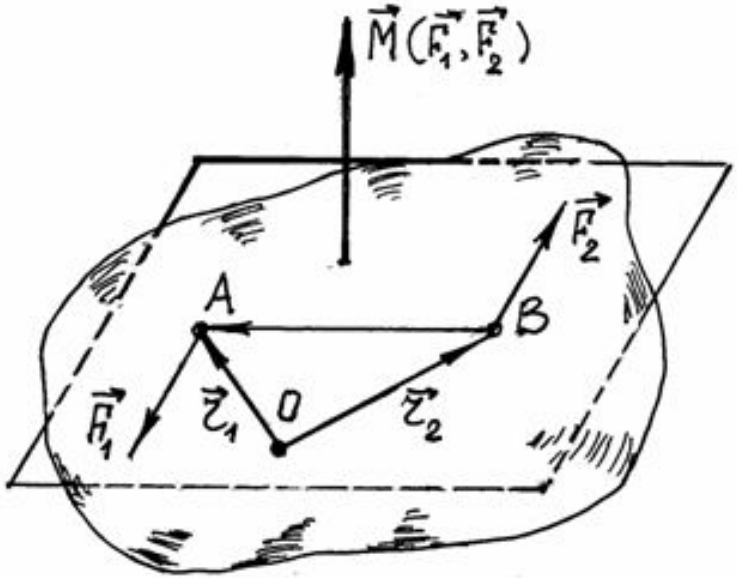
$$M(\vec{F}_1,\vec{F}_2) = \pm F_1 h = \pm F_2 h.$$

Теорема о вектор-моменте пары сил

Сумма векторов-моментов сил пары не зависит от выбора моментной точки и равна вектору-моменту пары.

Доказательство:

$$\vec{M}_0(\vec{F}_1) + \vec{M}_0(\vec{F}_2) =$$
$$= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 =$$
$$= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 =$$
$$= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 =$$
$$= \overline{BA} \times \vec{F}_1 = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2).$$



Следствие: *вектор-момент пары - вектор свободный.*
Его можно переносить параллельно самому себе в любую точку тела.

Силы внешние и внутренние

Внешними называют силы, с которыми точки или тела, не входящие в рассматриваемую механическую систему, действуют на точку или тело рассматриваемой системы.

Обозначают верхним индексом "e":

$$\vec{F}^{e}, \vec{R}^{e}.$$

Внутренними называют силы, с которыми точки или тела одной и системы действуют на выделенную точку или тело этой же системы.

Обозначают верхним индексом "i":

$$\vec{F}^{i}, \vec{R}^{i}.$$

*Главный вектор системы внутренних сил и главный момент относительно произвольного центра **0** равны нулю:*

$$\vec{F}^{iгл} = 0; \quad \vec{M}_0^{iгл}(\vec{F}^{i}) = 0.$$

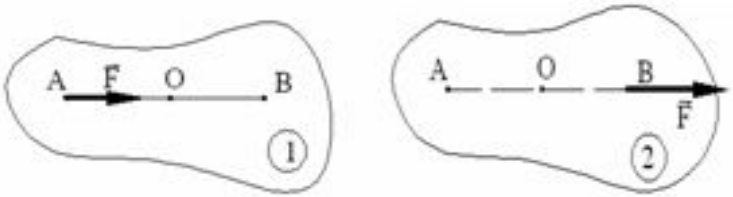
Эквивалентные системы сил

Системы сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ и $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \ldots, \vec{Q}_m$ *являются эквивалентными, если они имеют равные главные векторы и равные главные моменты относительно некоторого центра*: $\vec{F}^{гл}(\vec{F}) = \vec{F}^{гл}(\vec{Q})$, $\vec{M}_o^{гл}(\vec{F}) = \vec{M}_o^{гл}(\vec{Q})$.

Эти системы сил, будучи приложенные к одному телу, приводят тело в одинаковое движение.

Из условия эквивалентности двух систем сил следует, что *силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно переносить вдоль линии её действия*.

Различие в схемах 1 и 2 заключается в том, что сила $\vec{F}$ перенесена вдоль линии её действия из точки А в точку В. Системы 1 и 2 являются эквивалентными, поскольку



$$(\vec{F}^{гл})_1 = (\vec{F}^{гл})_2 = \vec{F}, \quad (\vec{M}_o^{гл})_1 = (\vec{M}_o^{гл})_2 = 0 .$$

Следовательно, *сила, приложенная к твердому телу - вектор скользящий.*

Системы единиц

Для измерения всех механических величин достаточно трех основных единиц. В международной системе измерения физических величин (СИ) основными единицами являются метр (м), килограмм массы (кг) и секунда (с). Единицей измерения силы является производная величина - 1 Ньютон - сила, сообщающая массе в 1 кг ускорение 1 м/с^2.

Существуют и другие системы единиц. Во многих старых учебниках используется техническая система, основными единицами которой являются метр (м), килограмм силы (кГ) и секунда (с). Единицей измерения массы является производная величина – 1 кГс^2 / м, т.е. масса, которой сила в 1 кГ сообщает ускорение 1 м/с^2.

Соотношение между единицами силы в этих системах:

$$1\ \text{кГ} \approx 9{,}81\ \text{Н}, \qquad 1\ \text{Н} \approx 0{,}102\ \text{кГ}.$$