

# Теоретическая механика

**Ирина Николаевна Харыбина**

**Кафедра «Теоретическая механика и сопротивление  
материалов» (СМиТМ)**

**Аудитория: 450 а**

**2 семестр: 10 лекций, 10 семинаров**

# Литература

- 1. Еленев С.А., Новиков В.Г., Шевелева Г.И. Статика: Учебное пособие. М.: Изд-во МГТУ “Станкин”, 2006.
- 2. Еленев С.А., Новиков В.Г., Шевелева Г.И. Кинематика: 2009.
- 3. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике. Учебное пособие для вузов. М.: "Лань", 2006.
- 4. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Учебник для вузов. - М.: "Интеграл-Пресс", 2006.
- 5. Еленев С.А., Новиков В.Г. Методические указания по выполнению домашнего индивидуального задания по статике. - М.: ИЦ ГОУ ВПО МГТУ "Станкин", 2006. - 16 с. (№450) .
- 6. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под ред. А.А.Яблонского. Учебное пособие для технических вузов. М.: "Интеграл-пресс", 2006.
- 7. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учебник для вузов. - М.: "Высшая школа", 2007.

# Лекция 1.

## Основные понятия, определения и аксиомы механики

- Теоретическая механика представляет собою часть механики, в которой изучаются общие законы движения и взаимодействия материальных тел.
- Под движением в механике понимают механическое движение, т.е. происходящее с течением времени изменение взаимного положения материальных тел в пространстве.
- *Механическим взаимодействием* между телами называется тот вид взаимодействия, в результате которого происходит изменение движения этих тел или изменение их формы (деформация).
- Основной задачей теоретической механики является изучение общих законов движения и равновесия материальных тел под действием приложенных к ним сил.

# *Разделы теоретической механики*

- *Статика*
- *Кинематика*
- *Динамика*

# Модели в теоретической механике

## 1. Модели материальных тел:

■ *материальная точка (точечная масса)* – простейшая схематизация материального тела, представляющая собой тело определенной массы, положение которого можно определить как положение геометрической точки. В теоретической механике абсолютно все тела рассматриваются как совокупность взаимодействующих материальных точек.

■ *механическая система* – совокупность материальных точек (тел), движения которых взаимосвязаны между собой.

■ *абсолютно твердое тело* – совокупность материальных точек, расстояния между которыми сохраняются в процессе любых движений, совершаемых этим телом.

## 2. Модель пространства:

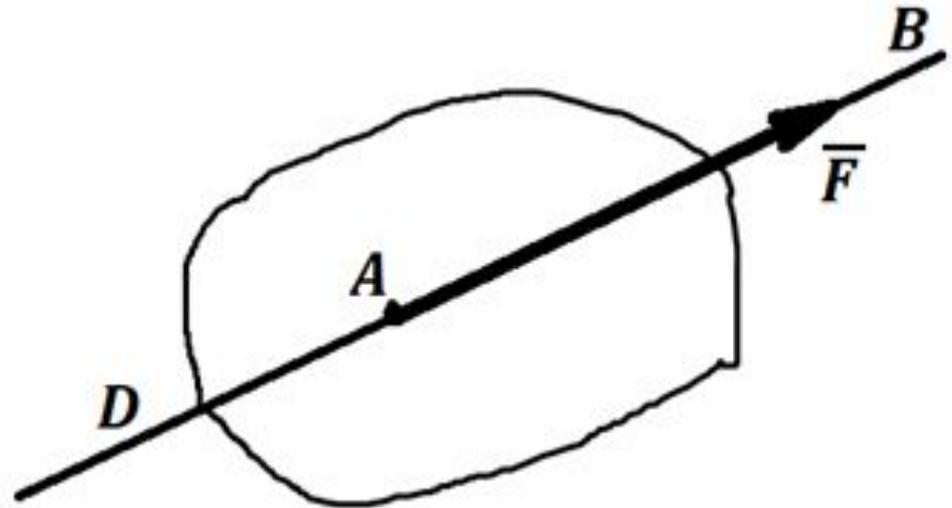
*абсолютное пространство* - трёхмерное евклидово пространство, в котором выполняется принцип относительности при преобразованиях Галилея.

## 3. Модель времени:

*абсолютное время* – время, существующее независимо от наблюдателя и движущееся с постоянной скоростью.

# Сила

- Величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия материальных тел, называется в механике *силой*.
- В Международной системе единиц (СИ) силу измеряют в ньютонах (Н).
- Сила является величиной векторной.
- Ее действие на тело определяется:
  - 1) численной величиной или модулем,
  - 2) направлением,
  - 3) точкой приложения
- Прямая  $DB$ , вдоль которой направлена сила, называется *линией действия силы*.



# АКСИОМЫ МЕХАНИКИ

Теоретическая механика относится к числу аксиоматических дисциплин (отсюда название - теоретическая). В её основе лежат аксиомы:

1. **Первая аксиома** - закон инерции Галилея-Ньютона: *всякое тело продолжает удерживаться в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, если только приложенные к нему силы не побуждают его изменить свое состояние.*

2. **Вторая аксиома** - второй закон Ньютона: *ускорение,  $\vec{a}$  сообщаемое материальной точке в инерциальной системе отсчета, пропорционально действующей на точку силе  $\vec{F}$  и обратно пропорционально массе  $m$  точки:* 
$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

3. **Третья аксиома** - третий закон Ньютона (равенство действия и противодействия): *две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по величине и направленными в противоположные стороны по прямой, соединяющей эти точки.*

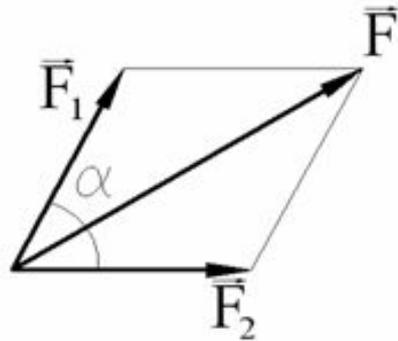
# Четвертая аксиома

*Четвертая аксиома - принцип независимости действия сил: материальная точка, на которую действует несколько сил:  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , получает ускорение  $\vec{a}$ , равное геометрической сумме всех тех ускорений  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ , которые она получила бы при действии каждой из сил порознь:*

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \sum \vec{a}_i .$$

Этот принцип эквивалентен *закону параллелограмма сил*:

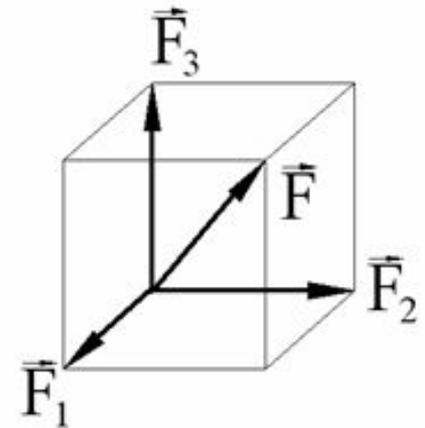
две силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , приложенные к материальной точке, можно заменить одной силой  $\vec{F}$ , равной диагонали параллелограмма:  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , причем модуль силы равен



$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos\alpha},$$

где  $\alpha$  - угол между силами  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ .

Из аксиомы следует, что силу  $\vec{F}$ , приложенную к некоторой точке, можно разложить на составляющие  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ , приложенные к той же точке.



## *Система сил:*

- Уравновешенная
- Эквивалентная
- Равнодействующая

## *Виды сил:*

- Внешние
- Внутренние
- Сосредоточенные
- Распределенные

# *Система сил*

*Система сил* - совокупность сил, приложенных к одному твердому телу.

*Уравновешенная система сил* - система сил, под действием которой твердое тело может находиться в покое.

*Эквивалентные системы сил* - это такие, когда при замене одной на другую движение или покой тела не изменяются.

*Равнодействующая системы сил* – одна сила, эквивалентная системе сил.

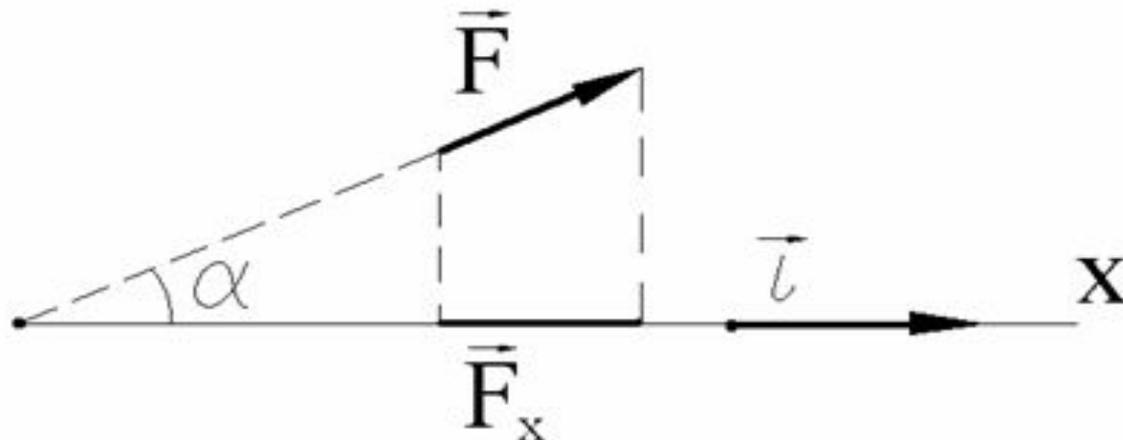
# Проекция силы на ось

*Проекция силы на ось* - скалярная величина, равная

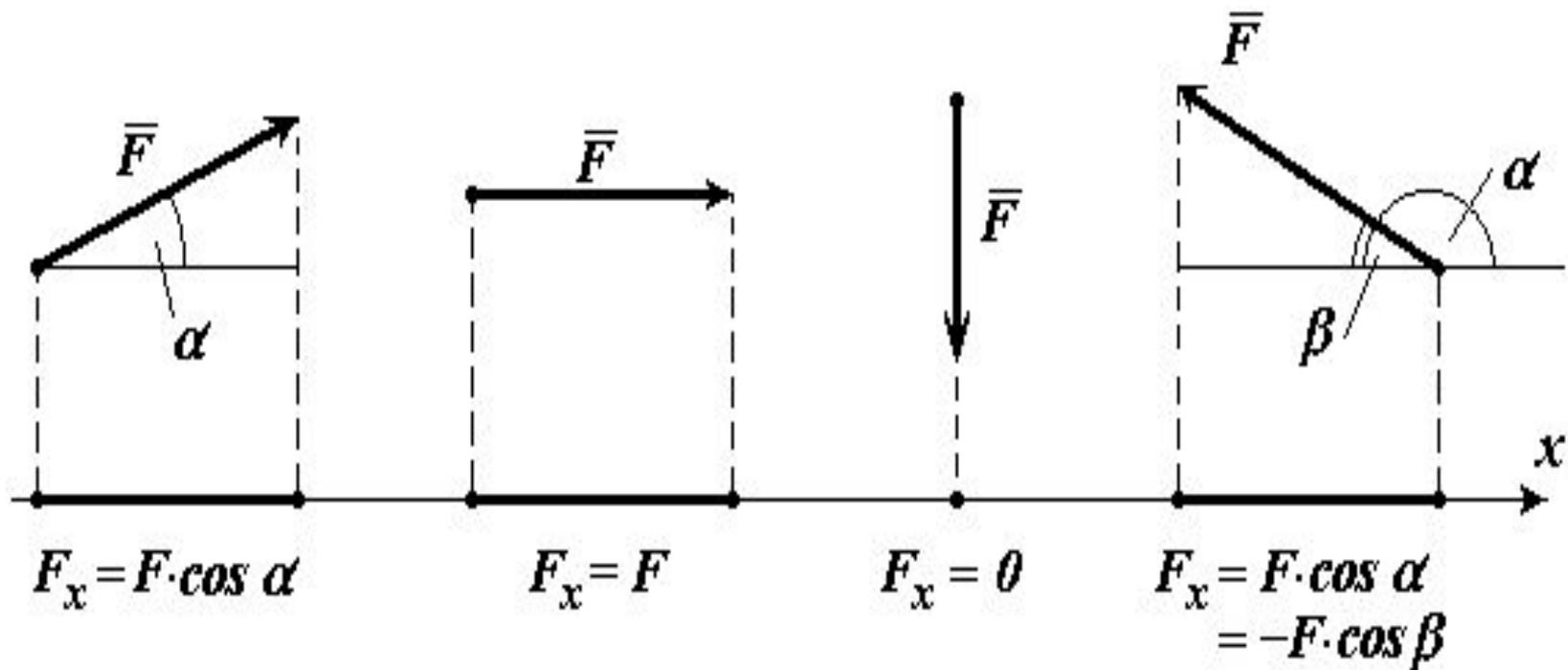
$$F_x = \vec{F} \cdot \vec{i} = F \cos \alpha,$$

где  $\vec{i}$  - орт, идущий по оси x,

$\alpha$  - угол между осью x и силой  $\vec{F}$ .



# Проекция силы на ось

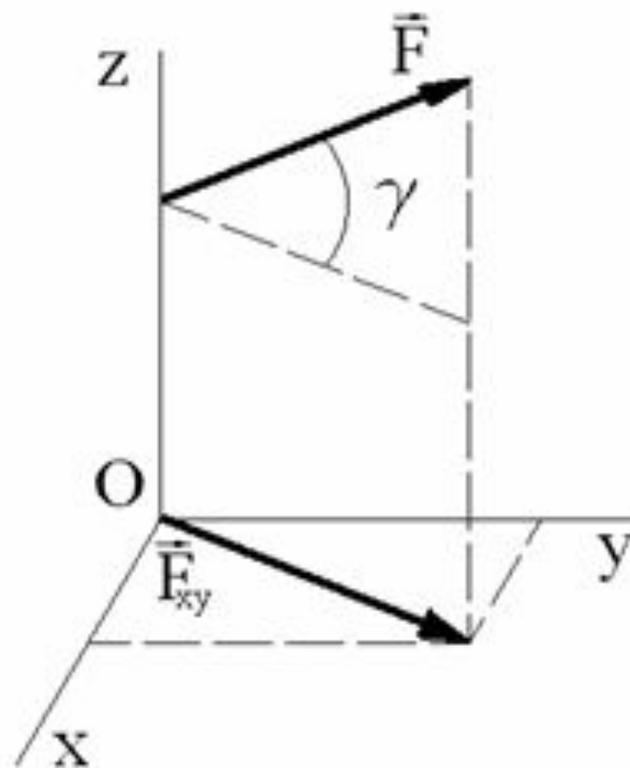


# Проекция силы на плоскость

*Проекция силы на плоскость*  
- вектор, модуль которого равен

$$F_{xy} = F \cos \gamma,$$

где  $\gamma$  - угол между силой  $\vec{F}$  и плоскостью  $xOy$ .



# Момент силы относительно точки

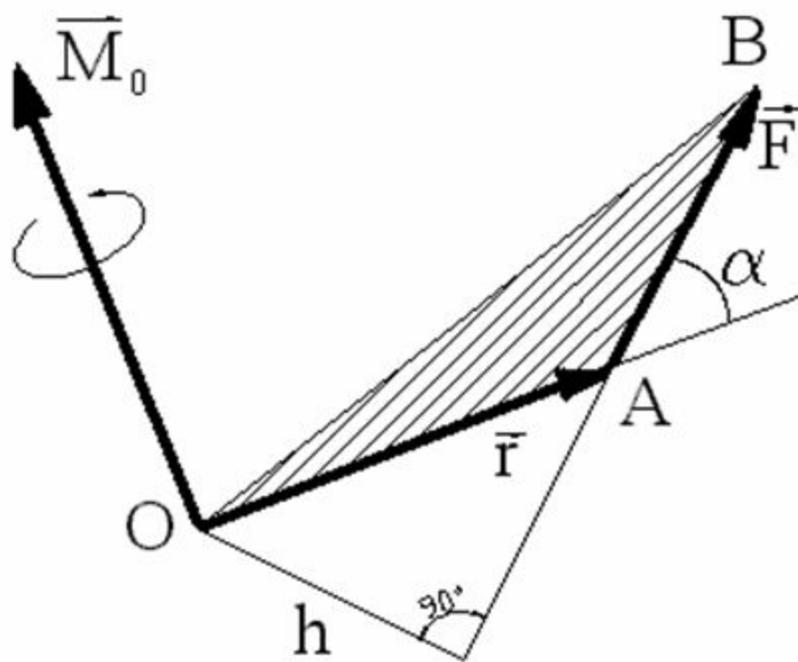
Алгебраическим моментом силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  называют взятое со знаком «+» или «-» произведение модуля этой силы на ее плечо  $h$ :  $M_0(\vec{F}) = Fh$ . Плечо  $h$  силы  $\vec{F}$  - это кратчайшее расстояние от моментной точки  $O$  до линии действия силы.

Вектор-момент силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  - вектор, равный векторному произведению радиуса-вектора  $\vec{r}$ , идущего из точки  $O$  в точку приложения силы, на силу  $\vec{F}$ :  $\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$ .

Модуль вектора-момента равен алгебраическому моменту силы:

$$M_0(\vec{F}) = rF \sin \alpha = Fh.$$

## Момент силы относительно точки



Вектор-момент силы:

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

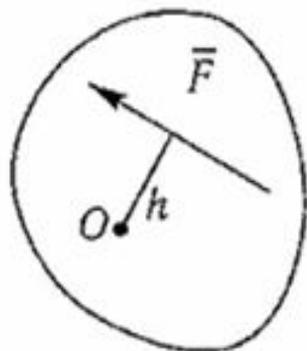
Модуль вектор-момента:

$$M_0(\vec{F}) = rF \sin \alpha = Fh$$

Алгебраический момент:

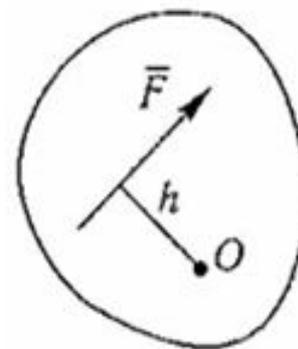
$$M_0(\vec{F}) = \pm Fh.$$

# Правило знаков



**Плюс**, если сила стремится поворачивать тело относительно моментной точки *против* хода часовой стрелки:

$$M_0(\vec{F}) = Fh.$$



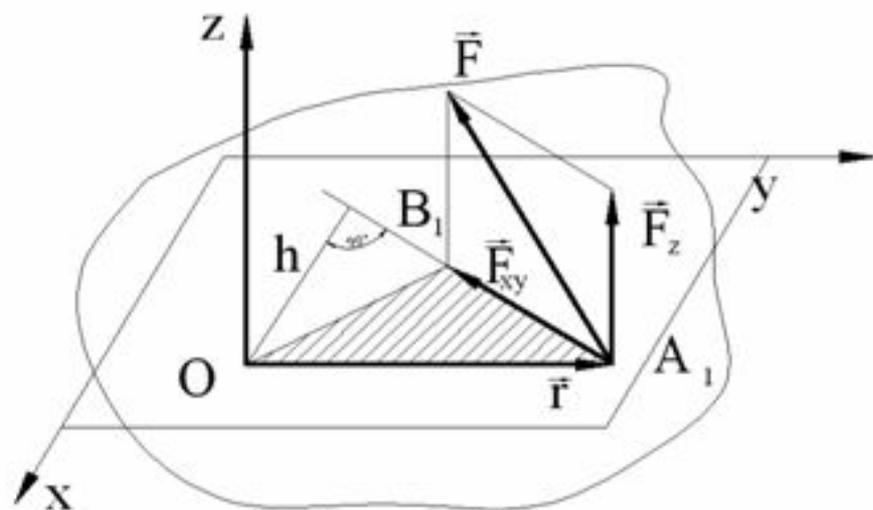
**Минус**, если сила стремится поворачивать тело относительно моментной точки *по* ходу часовой стрелки:

$$M_0(\vec{F}) = -Fh.$$

# Момент силы относительно оси

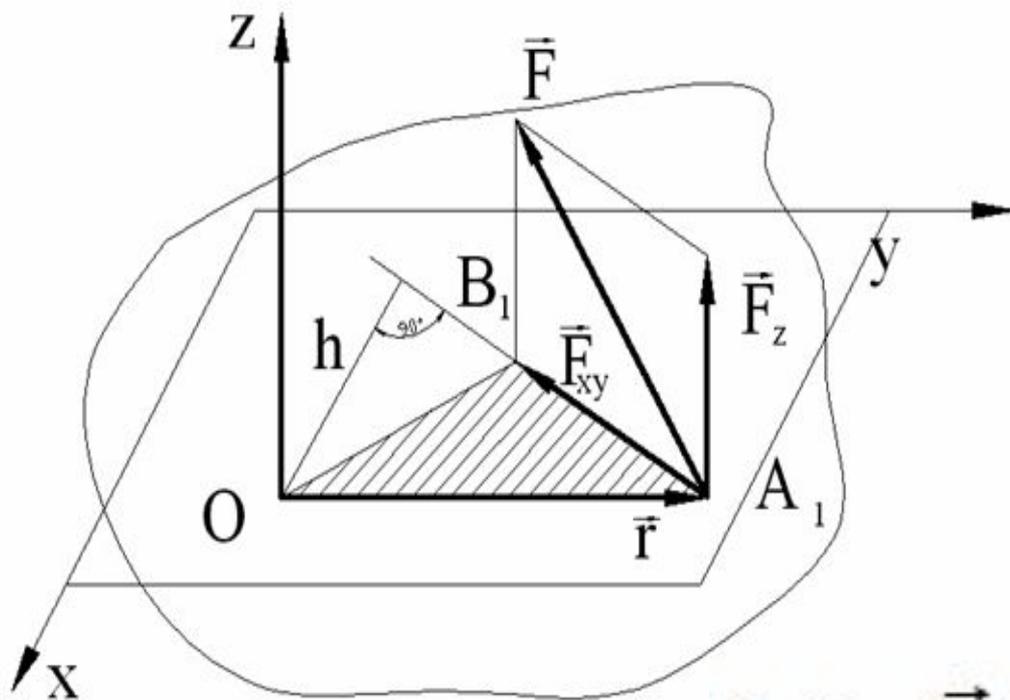
*Момент силы относительно оси* – скалярная величина,

характеризующая вращательный эффект, создаваемый силой, стремящейся повернуть тело вокруг данной оси. Если на тело, которое может вращаться вокруг оси  $z$ , действует сила  $\vec{F}$ , то момент этой силы относительно оси  $z$  равен  $M_z(\vec{F}) = \pm |\vec{F}_{xy}| h$ , где  $\vec{F}_{xy}$  – проекция силы  $\vec{F}$  на плоскость, перпендикулярную



оси  $z$ , а  $h$  – плечо силы  $\vec{F}_{xy}$ . Знак "+" выбирается в случае, когда стремление силы вращать тело видится с конца оси  $z$  против часовой стрелки. Сила  $\vec{F}$ , показанная на рисунке, создает положительный момент  $M_z(\vec{F})$ .

## *Момент силы относительно оси*



$$M_z(\vec{F}) = \pm |\vec{F}_{xy}| h$$

# Главный вектор системы сил

*Главный вектор системы сил* - это геометрическая сумма сил:

$$\vec{F}^{\Gamma\Pi} = \sum \vec{F}_i .$$

Проекции главного вектора на декартовы оси координат:

$$F_x^{\Gamma\Pi} = \sum F_{ix} = \sum X_i ,$$

$$F_y^{\Gamma\Pi} = \sum F_{iy} = \sum Y_i ,$$

$$F_z^{\Gamma\Pi} = \sum F_{iz} = \sum Z_i .$$

Модуль главного вектора и его направляющие косинусы:

$$F^{\Gamma\Pi} = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2} ,$$

$$\cos(\vec{F}^{\Gamma\Pi}, \vec{i}) = \frac{\sum X_i}{F^{\Gamma\Pi}} ; \quad \cos(\vec{F}^{\Gamma\Pi}, \vec{j}) = \frac{\sum Y_i}{F^{\Gamma\Pi}} ; \quad \cos(\vec{F}^{\Gamma\Pi}, \vec{k}) = \frac{\sum Z_i}{F^{\Gamma\Pi}} .$$

# Главный момент системы сил

*Главный момент системы сил относительно точки  $O$*  – это геометрическая сумма векторов-моментов всех сил системы относительно точки  $O$ :

$$\vec{M}_O^{\text{гл}} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i) \equiv \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i .$$

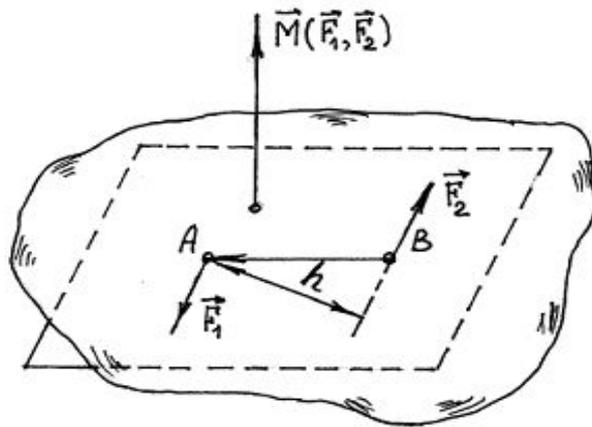
Главный момент относительно точки  $O$  можно выразить через его проекции на оси координат:

$$\vec{M}_O^{\text{гл}} = (\sum M_x) \vec{i} + (\sum M_y) \vec{j} + (\sum M_z) \vec{k} .$$

Модуль главного момента и его направляющие косинусы подсчитывают по формулам, аналогичным для главного вектора.

# Пара сил

*Пара сил* - это совокупность двух параллельных сил, равных по величине, противоположных по направлению, приложенных к одному твердому телу:  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ .



Пара сил стремится вращать тело. Вектор-момент пары -  $\vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  равен вектору-моменту одной из сил пары относительно точки, лежащей на линии действия другой силы:

$$\vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{BA} \times \vec{F}_1.$$

Модуль вектора-момента пары равен:

$$|\vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2)| = F_1 h = F_2 h,$$

где  $h$  - плечо пары, т.е. кратчайшее расстояние между линиями действия.

Произведение одной из сил пары на ее плечо, взятое со знаком «+» или «-», называют алгебраическим моментом пары сил:

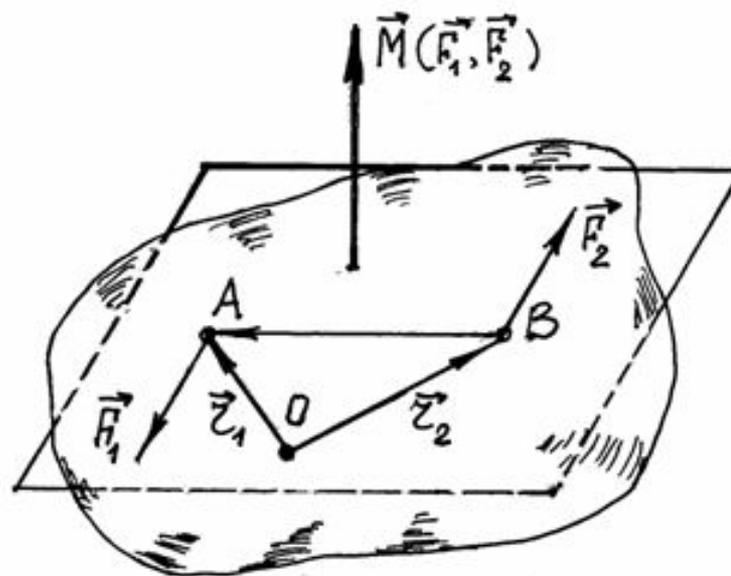
$$M(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \pm F_1 h = \pm F_2 h.$$

# Теорема о вектор-моменте пары сил

*Сумма векторов-моментов сил пары не зависит от выбора моментной точки и равна вектору-моменту пары.*

Доказательство:

$$\begin{aligned}\vec{M}_0(\vec{F}_1) + \vec{M}_0(\vec{F}_2) &= \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 = \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \\ &= \overline{BA} \times \vec{F}_1 = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2).\end{aligned}$$



**Следствие:** вектор-момент пары - вектор свободный.

Его можно переносить параллельно самому себе в любую точку тела.

# Силы внешние и внутренние

*Внешними* называют силы, с которыми точки или тела, не входящие в рассматриваемую механическую систему, действуют на точку или тело рассматриваемой системы.

Обозначают верхним индексом "e":

$$\vec{F}^e, \vec{R}^e.$$

*Внутренними* называют силы, с которыми точки или тела одной и системы действуют на выделенную точку или тело этой же системы.

Обозначают верхним индексом "i":

$$\vec{F}^i, \vec{R}^i.$$

*Главный вектор системы внутренних сил и главный момент относительно произвольного центра  $O$  равны нулю:*

$$\vec{F}^{i\text{гл}} = 0; \quad \vec{M}_O^{i\text{гл}}(\vec{F}^i) = 0.$$

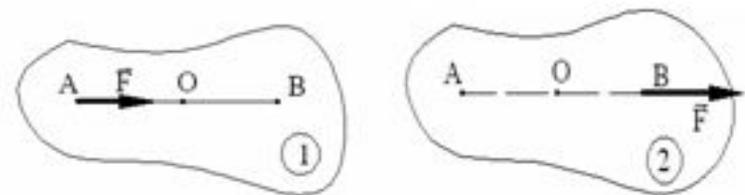
# Эквивалентные системы сил

Системы сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  и  $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_m$  являются эквивалентными, если они имеют равные главные векторы и равные главные моменты относительно некоторого центра:  $\vec{F}^{гл}(\vec{F}) = \vec{F}^{гл}(\vec{Q})$ ,  $\vec{M}_O^{гл}(\vec{F}) = \vec{M}_O^{гл}(\vec{Q})$ .

Эти системы сил, будучи приложенные к одному телу, приводят тело в одинаковое движение.

Из условия эквивалентности двух систем сил следует, что силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно переносить вдоль линии её действия.

Различие в схемах 1 и 2 заключается в том, что сила  $\vec{F}$  перенесена вдоль линии её действия из точки А в точку В. Системы 1 и 2 являются эквивалентными, поскольку



$$(\vec{F}^{гл})_1 = (\vec{F}^{гл})_2 = \vec{F}, \quad (\vec{M}_O^{гл})_1 = (\vec{M}_O^{гл})_2 = 0.$$

Следовательно, сила, приложенная к твердому телу - вектор скользящий.

# Системы единиц

Для измерения всех механических величин достаточно трех основных единиц. В международной системе измерения физических величин (СИ) основными единицами являются метр (м), килограмм массы (кг) и секунда (с). Единицей измерения силы является производная величина - 1 Ньютон - сила, сообщающая массе в 1 кг ускорение  $1 \text{ м/с}^2$ .

Существуют и другие системы единиц. Во многих старых учебниках используется техническая система, основными единицами которой являются метр (м), килограмм силы (кГ) и секунда (с). Единицей измерения массы является производная величина –  $1 \text{ кГс}^2 / \text{м}$ , т.е. масса, которой сила в 1 кГ сообщает ускорение  $1 \text{ м/с}^2$ .

Соотношение между единицами силы в этих системах:

$$1 \text{ кГ} \approx 9,81 \text{ Н} , \quad 1 \text{ Н} \approx 0,102 \text{ кГ} .$$