Сложение и умножение вероятностей

События называются **независимыми**, если происхождение одного из них никак не влияет на вероятность появления другого.

Пример. Монета брошена два раза. Вероятность появления "герба" в первом испытании не зависит от результата второго, а вероятность появления "герба" во втором испытании не зависит от результата первого испытания - события независимые.

События наз. **зависимыми**, если наступление одного из них изменяет вероятность появления другого.

Например, две производственные установки связаны единым технологическим циклом - вероятность выхода из строя одной из них зависит от того, в каком состоянии находится другая.

Условной вероятностью события **А** при условии **В** (обозначается **р (А|В)**) называют вероятность, вычисленную при условии, что событие В уже произошло и изменило ход эксперимента

Пример: В ящике находятся 5 шаров: 2 чёрных и 3 белых. Производится 2 последовательных извлечения. Определить условную вероятность появления чёрного шара при 2-ом извлечении при условии, что извлеченный в первый раз шар в ящик не возвращается.

Решение: А - извлечение чёрного шара в 1-ом случае, $\bar{A}$ - извлечение белого. Тогда $p(A) = 2/5$; $p(\bar{A}) = 1 - 2/5 = 3/5$. Т. к. шары в ящик не возвращаются, то изменяется соотношение между

Обозначим B событие, означающее извлечение чёрного шара во втором случае. Вероятности этого события могут быть такими:

$$p(B|A) = \frac{1}{4}, \qquad p(B|\overline{A}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Следовательно, вероятность события B зависит от того, произошло или нет событие A.

Теорема сложения несовместных событий

Вероятность суммы 2-х несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$p\,(A + B) = p(A) + p(B)$$

Если события образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице!!!

- **Доказательство:** Пусть событию A благоприятствуют m элементарных исходов, а событию B – s исходов.

Так как события A и B по условию теоремы несовместны, то событию $A + B$ благоприятствуют $m + s$ элементарных исходов из общего числа n исходов.

Следовательно,

$$\mathbf{p(A+B)=\frac{m+s}{n}=\frac{m}{n}+\frac{s}{n}=p(A)+p(B)}$$

Пример. Для отправки груза со склада может быть выделена одна из двух машин различного вида. Известны вероятности выделения каждой машины: $p(A) = 0{,}6$; $p(B) = 0{,}4$.

Тогда вероятность поступления к складу хотя бы одной из этих машин будет:

$$\mathbf{p\ (A + B) = p(A) + p(B) = 0{,}6 + 0{,}4 = 1}$$

Теорема сложения совместных событий

Два события наз. **совместными**, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же опыте.

Пример. При бросании игральной кости события совместны: 1. Выпало чётное число 2. Выпало число больше 3 (могут произойти одновременно)

Вероятность суммы 2-х совместных событий равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления

$$p\,(A + B) = p(A) + p(B) - p(A \cdot B)$$

Пример: Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0.8, для второго – 0.6. Стрелки независимо друг от друга делают по одному выстрелу. Какова вероятность, что в мишень попадет хотя бы один из стрелков?

Решение: A – попадание в мишень 1-го стрелка, B – попадание 2-го, C – попадание хотя бы одного. A и B совместны: $P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$; учитывая их независимость

$P(C) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$ **=**

Теорема умножения вероятностей

Произведением событий A и B наз. событие $A \cdot B$, состоящее в совместном их появлении.

Например, А - деталь годная, В - деталь окрашенная, то $A \cdot B$ **-** деталь годна и окрашена.

Если события A **и** B **независимы** (наступление одного никак не влияет на шансы наступления другого), то вероятность произведения этих событий равна произведению их вероятностей:

Пример:

Игральная кость бросается два раза, вероятность появления «5» в каждом испытании равна 1/6.

Вероятность появления двух «5» подряд равна 1/6 • 1/6 = 1/36

Теорема умножения зависимых событий

Пусть A и B - зависимые.

Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденного в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P\,(A \cdot B) = P(A) \cdot P\,(B|A)$$

Пример.

При подготовке к экзамену две студентки успели выучить только первые 5 билетов из 20.

Пусть событие A – «первая студентка вытянула один из счастливых для неё билетов», событие B – «вторая студентка вытянула счастливый билет».

Если событие A произошло, то среди оставшихся 19 билетов окажется только 4 счастливых, значит, вероятность события B равна

$$P(B) = \frac{4}{19}$$

Если событие A не произошло, то число счастливых билетов среди оставшихся 19 не изменится, и вероятность события B будет другой:

$$P(B) = \frac{5}{19}$$

Пример.

Ведутся поиски двух преступников. Каждый из них независимо от другого может быть обнаружен в течение суток с вероятностью 0,5.

После поимки одного из них, в связи с увеличением числа сотрудников занятых в поисках, вероятность найти второго возрастает до 0,7.

С какой вероятностью в течение суток будут обнаружены оба преступника?

Решение.

Событие A – «обнаружены оба преступника».

Разобьем его на простые:

B_1 – «обнаружен 1-ый», B_2 - «обнаружен 2-ой после того, как пойман 1-ый преступник».

По определению произведения событий

$A = B_1 \cdot B_2$.

Тогда по теореме умножения вероятностей для зависимых событий:

$P(A) = P(B_1 \cdot B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 | B_1) =$

$= \mathbf{0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}35}$

Пример.

Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания первого стрелка – **0,9**; второго стрелка – **0,8**.

Найти вероятность того, что

а) в мишень попадет только один стрелок.

б) мишень будет поражена.

Решение:

а) Пусть **A** – в мишень попадет только один стрелок. Рассмотрим события: $\mathbf{A_1}$ – в мишень попадет 1-ый; $\mathbf{A_2}$– в мишень попадет 2-ой.

По условию: $\mathbf{p(A_1) = 0,9;\ p(A_2) = 0,8.}$

Тогда вероятности промахов стрелков:

$$\mathbf{p\,(\bar{A}_1) = 1 - 0,9 = 0,1; \qquad p\,(\bar{A}_2) = 1 - 0,8 = 0,2.}$$

A означает: в мишень попадет только 1-ый (1-ый попадет **и** 2-ой промахнётся) **или** попадет только 2-ой (1-ый промахнётся **и** 2-ой попадет).

Тогда $\mathbf{P(A) = 0,9 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,8 = 0,26.}$

б) Событие **В** произойдет, если в мишень попадет **хотя бы один** стрелок: **или** только 1-ый, **или** только 2-ой, **или** оба.

Тогда:

Р (В) = 0,9 · 0,2 + 0,1 · 0,8 + 0,9 · 0,8 =

= 0,18 + 0,08 + 0,72 = <u>0,98.</u>

Найти вероятность события **В** также можно по теореме сложения совместных событий $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$.

$$P(B) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)$$

$$\mathbf{= 0{,}9 + 0{,}8 - 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 1{,}7 - 0{,}72 = \underline{0{,}98.}}$$

Пример. В порт приходят корабли только из трех пунктов отправления. Вероятность появления корабля из 1-го пункта - **0,2**, из 2-го пункта – **0,6**. Найти вероятность прибытия корабля из 3-его пункта.

Решение. Обозначим **p (A_i)** – вероятность прибытия корабля из пункта **i.** Из свойств вероятности следует, что:

$$p(A_1) + p\left(A_2\right) + p(A_3) = 1$$

Тогда вероятность прибытия корабля из 3-го пункта отправления равна

Дидактическая единица. Теория вероятностей.

Задание. Игральный кубик бросают один раз. Вероятность того, что на верхней грани выпадет число очков, больше чем три, равна …

Варианты ответов:

) $\frac{1}{2}$ **2)** $\frac{1}{3}$

) 0 **4)** 1

Ответ: пункт № 1, т.е. выпадет или 4, или 5, или 6.

Задание №8. Для посева берут семена из двух пакетов. Вероятность прорастания семян в первом и втором пакетах соответственно равна 0,9 и 0,7. Если взять по одному семени из каждого пакета, то вероятность того, что оба они прорастут, равна …

Варианты ответов:

1) 0,63 **2) 0,9**

3) 1,6 **4) 0,8**

Ответ: пункт № 1, т.к. согласно теоремы умножения вероятностей независимых событий

$\mathbf{0{,}9 \cdot 0{,}7 = 0{,}63.}$

Задание №11. В урне находятся шесть шаров: три белых и три черных. Событие А – «вынули белый шар». Событие В – « вынули черный шар». Если опыт состоит в выборе только одного шара, то для этих событий **неверным** будет утверждение…

Варианты ответов:

1) «События А и В несовместны»

2) «События А и В равновероятны»

3) «Событие А невозможно»

4) «Вероятность события В равна 0,5»

Ответ: пункт № 3, другие пункты – верные утверждения.

Задание №12.

Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна …

Варианты ответов:

1) **0** **2)** $\frac{1}{2}$

3) **1** **4)** **2**

Ответ: пункт № 4, по свойствам вероятности.

Пример.

Преступник имеет 3 ключа. В темноте он открывает дверь выбирая ключ случайным образом. На открытие каждой двери он тратит 5 секунд. Найти вероятность что он откроет все двери за 15 секунд.

Решение:

Пусть A – «открыты все двери». Разобьём событие на более простые: B – «открыта 1-я дверь», C – «открыта 2-я дверь», D – «открыта 3-я дверь», Следовательно $P(A)=P(B \cdot C \cdot D)$, по теореме умножения вероятностей независимых событий $P(B \cdot C \cdot D) = P(B) \cdot P(C) \cdot P(D)$.

Вычислим вероятность событий B, C и D.

Имеется три равновозможных (каждый ключ выбираем из 3-х) исходов опыта. Каждому из событий B, C и D благоприятствует одно из них, поэтому

$$P(B) = P(C) = P(D) = \frac{1}{3};$$

$$P(A) = P(B) \cdot P(C) \cdot P(D) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

Пример

В урне 5 белых, 20 красных и 10 чёрных шаров, не отличающихся по размеру. Шары перемешивают и наугад вынимают 1 шар. Какова вероятность, что он окажется белым или чёрным?

Решение:

Пусть A – появление белого или чёрного шара, разобьём событие на более простые. B – появление белого, C – появление чёрного, тогда $A = B + C$, следовательно $P(A) = P(B + C)$. Так как B и C события несовместные, то по теореме сложения

Вычислим вероятность событий В и С.

Имеется 35 равновозможных исходов опыта, событию В благоприятствует 5, событию С – 10.

Следовательно:

$P(B) = \dfrac{5}{35}$ $\quad$ $P(C) = \dfrac{10}{35}$

$$P(A) = P(B) + P(C) = \frac{5}{35} + \frac{10}{35} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$

Домашнее задание

1. Найти вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число а) делится без остатка на 8 и на 3;

б) не содержит цифру 5.

2. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания первого стрелка - 0,6; второго стрелка - 0,3. Найти вероятность того, что:

а) в мишень попадет только один стрелок;

б) оба промахнутся.

Задание: За успешное участие в соревнованиях спортсмена могут наградить ценным призом (событие А), медалью (событие В), грамотой (событие С). Тогда событие, заключающееся в том, что случайно отобранный спортсмен был награжден только грамотой, будет представлять собой выражение …

Варианты ответов:

1. $\overline{A} \cdot B \cdot C$
2. $\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$
3. $A \cdot B \cdot \overline{C}$
4. $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$

Ответ: п. 4.

Задание: В урне лежат 12 шаров, среди которых 7 шаров белые. Наудачу по одному извлекают два шара без возвращения. Тогда вероятность того, что оба шара будут белыми, равна …

Варианты ответов:

1. $\frac{7}{24}$
2. $\frac{7}{22}$
3. $\frac{49}{144}$
4. $\frac{1}{6}$

Решение:

Введем обозначения событий: A_i – i -ый вынутый шар будет белым, A – оба шара будут белыми.

Тогда $A = A_1 \cdot A_2$

По условию задачи A_1 и A_2 зависимы, то

$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1)$

По классическому определению вероятности:

$P(A_1) = \frac{7}{12}$

и условная вероятность $P(A_2|A_1) = \frac{7-1}{12-1} = \frac{6}{11}$

Тогда $P(A) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$

Задание: Игральная кость бросается два раза. Тогда вероятность того, что сумма выпавших очков будет больше десяти, равна …

Варианты ответов:

1. $\frac{1}{5}$

2. 0

3. $\frac{1}{12}$

4. $\frac{1}{4}$

Задание. Операции сложения и умножения событий **не обладают** свойством …

Варианты ответов:

1. $A(B + C) = AB + AC$
3. $A(BC) = A + B + C$
2. $AB = BA$
4. $A + B = B + A$

Решение:

Операции сложения и умножения событий обладают свойствами:

а) коммутативности сложения $A + B = B + A$

б) коммутативности умножения $AB = BA$

в) дистрибутивности $A(B + C) = AB + AC$

Следовательно, операции сложения и умножения событий не обладают свойством $A(BC) = A + B + C$

Задание. Устройство состоит из двух элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы этих элементов (в течение рабочего дня) равны соответственно 0,8 и 0,9. Тогда вероятность того, что в течение рабочего дня будут работать безотказно оба элемента, равна …

Варианты ответов:

1. 0,08	3. 0,85
2. 0,18	4. 0,72