

Сложение и умножение вероятностей

События называются **независимыми**, если происхождение одного из них никак не влияет на вероятность появления другого.

Пример. Монета брошена два раза. Вероятность появления "герба" в первом испытании не зависит от результата второго, а вероятность появления "герба" во втором испытании не зависит от результата первого испытания - события **независимые**.

События наз. **зависимыми**, если наступление одного из них изменяет вероятность появления другого.

Например, две производственные установки связаны единым технологическим циклом - вероятность выхода из строя одной из них зависит от того, в каком состоянии находится другая.

Условной вероятностью события **A** при условии **B** (обозначается $p(A|B)$) называют вероятность, вычисленную при условии, что событие **B** уже произошло и известно ход эксперимента

Пример: В ящике находятся 5 шаров: 2 чёрных и 3 белых. Производится 2 последовательных извлечения. Определить условную вероятность появления чёрного шара при 2-ом извлечении при условии, что извлеченный в первый раз шар в ящик не возвращается.

Решение: A - извлечение чёрного шара в 1-ом случае, \bar{A} - извлечение белого. Тогда $p(A) = 2/5$; $p(\bar{A}) = 1 - 2/5 = 3/5$. Т. к. шары в ящик не возвращаются, то изменяется соотношение между

Обозначим В событие, означающее извлечение чёрного шара во втором случае. Вероятности этого события могут быть такими:

$$p(B|A) = \frac{1}{4}, \quad p(B|\bar{A}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Следовательно, вероятность события В зависит от того, произошло или нет событие А.

Теорема сложения несовместных событий

Вероятность суммы 2-х несовместных событий
равна сумме вероятностей этих событий:

$$p(A + B) = p(A) + p(B)$$

Если события образуют полную группу
несовместных событий, то сумма их вероятностей
равна единице!!!

Доказательство: Пусть событию A благоприятствуют m элементарных исходов, а событию B – s исходов.

Так как события A и B по условию теоремы несовместны, то событию $A + B$ благоприятствуют $m + s$ элементарных исходов из общего числа n исходов.

Следовательно,

$$p(A + B) = \frac{m+s}{n} = \frac{m}{n} + \frac{s}{n} = p(A) + p(B)$$

Пример. Для отправки груза со склада может быть выделена одна из двух машин различного вида.

Известны вероятности выделения каждой машины:

$$p(A) = 0,6; \quad p(B) = 0,4.$$

Тогда вероятность поступления к складу хотя бы одной из этих машин будет:

$$p(A + B) = p(A) + p(B) = 0,6 + 0,4 = 1$$

Теорема сложения совместных событий

Два события наз. **совместными**, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же опыте.

Пример. При бросании игральной кости события совместны: 1. Выпало чётное число 2. Выпало число больше 3 (могут произойти одновременно)

Вероятность суммы 2-х совместных событий равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(A \cdot B)$$

Пример: Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0.8, для второго – 0.6. Стрелки независимо друг от друга делают по одному выстрелу. Какова вероятность, что в мишень попадет хотя бы один из стрелков?

Решение: A – попадание в мишень 1-го стрелка,
 B – попадание 2-го, C – попадание хотя бы одного.

A и B совместны: $P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$;

учитывая их независимость

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =$$

Теорема умножения вероятностей

Произведением событий A и B наз. событие $A \cdot B$, состоящее в совместном их появлении.

Например, A - деталь годная, B - деталь окрашенная, то $A \cdot B$ - деталь годна и окрашена.

Если события A и B независимы (наступление одного никак не влияет на шансы наступления другого), то вероятность произведения этих событий равна произведению их вероятностей:

Пример:

Игральная кость бросается два раза, вероятность появления «5» в каждом испытании равна $1/6$.

Вероятность появления двух «5» подряд равна $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

Теорема умножения зависимых событий

Пусть A и B - зависимые.

Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденного в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Пример.

При подготовке к экзамену две студентки успели выучить только первые 5 билетов из 20.

Пусть событие A – «первая студентка вытянула один из счастливых для неё билетов», событие B – «вторая студентка вытянула счастливый билет».

Если событие A произошло, то среди оставшихся 19 билетов окажется только 4 счастливых, значит, вероятность события B равна

$$P(B) = \frac{4}{19}$$

Если событие A не произошло, то число счастливых билетов среди оставшихся 19 не изменится, и вероятность события B будет другой:

$$P(B) = \frac{5}{19}$$

Пример.

Ведутся поиски двух преступников. Каждый из них независимо от другого может быть обнаружен в течение суток с вероятностью 0,5.

После поимки одного из них, в связи с увеличением числа сотрудников занятых в поисках, вероятность найти второго возрастает до 0,7.

С какой вероятностью в течение суток будут обнаружены оба преступника?

Решение.

Событие A – «обнаружены оба преступника».

Разобьем его на простые:

B_1 – «обнаружен 1-ый», B_2 – «обнаружен 2-ой после того, как пойман 1-ый преступник».

По определению произведения событий

$$A = B_1 \cdot B_2.$$

Тогда по теореме умножения вероятностей для зависимых событий:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1 \cdot B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 | B_1) = \\ &= \mathbf{0,5 \cdot 0,7 = 0,35} \end{aligned}$$

Пример.

Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень.

Вероятность попадания первого стрелка – **0,9**;

второго стрелка – **0,8**.

Найти вероятность того, что

а) в мишень попадет только один стрелок.

б) мишень будет поражена.

Решение:

а) Пусть A – в мишень попадет только один стрелок. Рассмотрим события: A_1 – в мишень попадет 1-ый; A_2 – в мишень попадет 2-ой.

По условию: $p(A_1) = 0,9$; $p(A_2) = 0,8$.

Тогда вероятности промахов стрелков:

$$p(\bar{A}_1) = 1 - 0,9 = 0,1; \quad p(\bar{A}_2) = 1 - 0,8 = 0,2.$$

A означает: в мишень попадет только 1-ый (1-ый попадет и 2-ой промахнется) **или** попадет только 2-ой (1-ый промахнется и 2-ой попадет).

Тогда $P(A) = 0,9 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,8 = 0,26$.

б) Событие **В** произойдет, если в мишень попадет **хотя бы один** стрелок: **или** только 1-ый, **или** только 2-ой, **или** оба.

Тогда:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{B}) &= 0,9 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,8 + 0,9 \cdot 0,8 = \\ &= 0,18 + 0,08 + 0,72 = \underline{\underline{0,98}}. \end{aligned}$$

Найти вероятность события **В** также можно по теореме сложения совместных событий A_1 и A_2 .

$$\begin{aligned} P(\mathbf{B}) &= P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) \\ &= 0,9 + 0,8 - 0,9 \cdot 0,8 = 1,7 - 0,72 = \underline{\underline{0,98}}. \end{aligned}$$

Пример. В порт приходят корабли только из трех пунктов отправления. Вероятность появления корабля из 1-го пункта - **0,2**, из 2-го пункта – **0,6**. Найти вероятность прибытия корабля из 3-его пункта.

Решение. Обозначим $p(A_i)$ – вероятность прибытия корабля из пункта i . Из свойств вероятности следует, что:

$$p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) = 1$$

Тогда вероятность прибытия корабля из 3-го пункта отправления равна

Дидактическая единица. Теория вероятностей.

Задание. Игральный кубик бросают один раз.

Вероятность того, что на верхней грани выпадет число очков, больше чем три, равна ...

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{3}$

3) 0 4) 1

Ответ: пункт № 1, т.е. выпадет или 4, или 5, или 6.

Задание №8. Для посева берут семена из двух пакетов. Вероятность прорастания семян в первом и втором пакетах соответственно равна 0,9 и 0,7. Если взять по одному семени из каждого пакета, то вероятность того, что оба они прорастут, равна ...

Варианты ответов:

- | | |
|---------|--------|
| 1) 0,63 | 2) 0,9 |
| 3) 1,6 | 4) 0,8 |

Ответ: пункт № 1, т.к. согласно теоремы умножения вероятностей независимых событий $0,9 \cdot 0,7 = 0,63$.

Задание №11. В урне находятся шесть шаров: три белых и три черных. Событие A – «вынули белый шар». Событие B – «вынули черный шар». Если опыт состоит в выборе только одного шара, то для этих событий **неверным** будет утверждение...

Варианты ответов:

- 1) «События A и B несовместны»
- 2) «События A и B равновероятны»
- 3) «Событие A невозможно»
- 4) «Вероятность события B равна $0,5$ »

Ответ: пункт № 3, другие пункты – верные утверждения.

Задание №12.

Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна ...

Варианты ответов:

1) 0

2) $\frac{1}{2}$

3) 1

4) 2

Ответ: пункт № 4, по свойствам вероятности.

Пример.

Преступник имеет 3 ключа. В темноте он открывает дверь выбирая ключ случайным образом. На открытие каждой двери он тратит 5 секунд. Найти вероятность что он откроет все двери за 15 секунд.

Решение:

Пусть A – «открыты все двери». Разобьём событие на более простые: B – «открыта 1-я дверь», C – «открыта 2-я дверь», D – «открыта 3-я дверь»,

Следовательно $P(A) = P(B \cdot C \cdot D)$, по теореме умножения вероятностей независимых событий $P(B \cdot C \cdot D) = P(B) \cdot P(C) \cdot P(D)$.

Вычислим вероятность событий B , C и D .

Имеется три равновозможных (каждый ключ выбираем из 3-х) исходов опыта. Каждому из событий B , C и D благоприятствует одно из них, поэтому

$$P(B) = P(C) = P(D) = \frac{1}{3} ;$$

$$P(A) = P(B) \cdot P(C) \cdot P(D) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

Пример

В урне 5 белых, 20 красных и 10 чёрных шаров, не отличающихся по размеру. Шары перемешивают и наугад вынимают 1 шар. Какова вероятность, что он окажется белым или чёрным?

Решение:

Пусть A – появление белого или чёрного шара, разобьём событие на более простые. B – появление белого, C – появление чёрного, тогда $A = B + C$, следовательно $P(A) = P(B + C)$. Так как B и C события несовместные, то по теореме сложения

Вычислим вероятность событий В и С.

Имеется 35 равновозможных исходов опыта, событию В благоприятствует 5, событию С – 10.

Следовательно:

$$P(B) = \frac{5}{35} \quad P(C) = \frac{10}{35}$$

$$P(A) = P(B) + P(C) = \frac{5}{35} + \frac{10}{35} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$

Домашнее задание

1. Найти вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число а) делится без остатка на 8 и на 3;
б) не содержит цифру 5.

2. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания первого стрелка - 0,6; второго стрелка - 0,3. Найти вероятность того, что:

- а) в мишень попадет только один стрелок;
б) оба промахнутся.

Задание: За успешное участие в соревнованиях спортсмена могут наградить ценным призом (событие A), медалью (событие B), грамотой (событие C). Тогда событие, заключающееся в том, что случайно отобранный спортсмен был награжден только грамотой, будет представлять собой выражение ...

Варианты ответов:

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $\bar{A} \cdot B \cdot C$ | 3. $A \cdot B \cdot \bar{C}$ |
| 2. $\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$ | 4. $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$ |

Ответ: п. 4.

Задание: В урне лежат 12 шаров, среди которых 7 шаров белые. Наудачу по одному извлекают два шара без возвращения. Тогда вероятность того, что оба шара будут белыми, равна ...

Варианты ответов:

1. $\frac{7}{24}$

3. $\frac{49}{144}$

2. $\frac{7}{22}$

4. $\frac{1}{6}$

Решение:

Введем обозначения событий: A_i – i -ый вынутый шар будет белым, A – оба шара будут белыми.

$$\text{Тогда } A = A_1 \cdot A_2$$

По условию задачи A_1 и A_2 зависимы, то

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1)$$

По классическому определению вероятности:

$$P(A_1) = \frac{7}{12}$$

$$\text{и условная вероятность } P(A_2 | A_1) = \frac{7-1}{12-1} = \frac{6}{11}$$

$$\text{Тогда } P(A) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$$

Задание: Игральная кость бросается два раза.

Тогда вероятность того, что сумма выпавших очков будет больше десяти, равна ...

Варианты ответов:

1. $\frac{1}{5}$

3. $\frac{1}{12}$

2. 0

4. $\frac{1}{4}$

Задание. Операции сложения и умножения событий **не обладают** свойством ...

Варианты ответов:

1. $A(B + C) = AB + AC$ 3. $A(BC) = A + B + C$

2. $AB = BA$

4. $A + B = B + A$

Решение:

Операции сложения и умножения событий обладают свойствами:

а) коммутативности сложения $A + B = B + A$

б) коммутативности умножения $AB = BA$

в) дистрибутивности $A(B + C) = AB + AC$

Следовательно, операции сложения и умножения событий не обладают свойством $A(BC) = A + B + C$

Задание. Устройство состоит из двух элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы этих элементов (в течение рабочего дня) равны соответственно 0,8 и 0,9. Тогда вероятность того, что в течение рабочего дня будут работать безотказно оба элемента, равна ...

Варианты ответов:

- | | |
|---------|---------|
| 1. 0,08 | 3. 0,85 |
| 2. 0,18 | 4. 0,72 |