

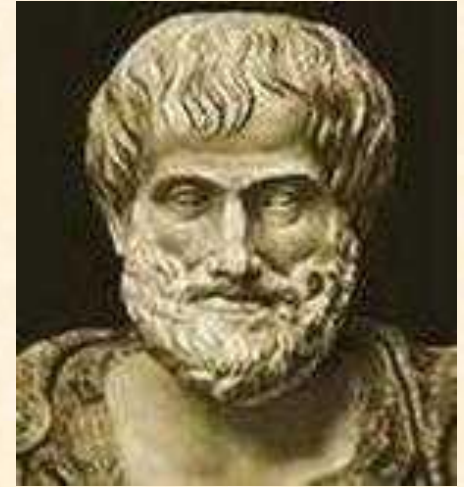
# **математическая логика**

# **Логика** - наука о формах и способах мышления.

Основы логики были заложены работами ученого и философа

**Аристотеля**

(384 -322гг. до н.э.).



Он пытался первым найти ответ на вопрос «Как мы рассуждаем?», изучал правила мышления. Аристотель впервые дал систематическое изложение логики.

Он подверг анализу человеческое мышление, его **формы - понятие, суждение, умозаключение.**

Так возникла **формальная логика.**

# Основные формы мышления:

**Понятие** – форма мышления, фиксирующая основные существенные признаки объекта.

**Высказывание** - это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о свойствах реальных предметов и отношениях между ними. Высказывание может быть **истинно** или **ложно**.

Не являются высказываниями восклицательные и вопросительные предложения:

Высказывания делятся на:

1. простые
2. составные (истинность которых вычисляется с помощью алгебры высказываний)

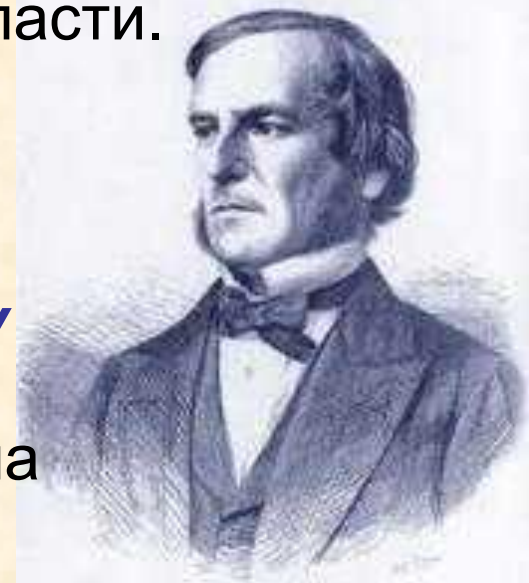
**Умозаключение** – форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких суждений (посылок) может быть получено новое суждение (заключение)

## Математическая логика



Немецкий ученый **Готфрид Лейбниц** (1646-1716) заложил основы **математической логики**. Он пытался построить первые логические исчисления (свести логику к математике), предложил использовать символы вместо слов обычного языка, поставил много задач по созданию символьной логики, его идеи оказали влияние на последующие работы ученых в этой области.

Англичанин **Джордж Буль** (1815-1864, математик-самоучка), на фундаменте, заложенном Лейбницем, создал новую область науки - **Математическую логику** (*Булеву алгебру* или *Алгебру высказываний*). В его работах логика обрела свой алфавит, свою орфографию и грамматику.



# Алгебра логики (высказываний) работает с высказываниями.

Различают:

**1. Логические константы (логические утверждения)** – конкретные частные утверждения (И/Л)

**2. Логические переменные (предикаты)** – логические высказывания, значения которых меняются в зависимости от входящих в них переменных, обозначаются заглавными латинскими буквами **A, B, C, D, F,...**

Истинному высказыванию ставится в соответствие 1, ложному — 0.

### 3. Логические функции ( логические формулы) – сложные логические выражения образованные из простых и связанные логическими операциями **И, ИЛИ, НЕ** и др.)

Высказывание “**Все мышки и кошки с хвостами**” является сложным и состоит из двух простых высказываний.

**A** = “**Все мышки с хвостами**” **и** **B** = “**Все кошки с хвостами**”  
Его можно записать в виде логической функции, значение которой истинно:  **$F(A,B)=A$  и  $B$**

В математической логике не рассматривается конкретное содержание высказывания, важно только, истинно оно или ложно. Поэтому высказывание можно представить некоторой переменной величиной, значением которой может быть только **ложно (0)** или **истинно (1)**.

# Логические операции

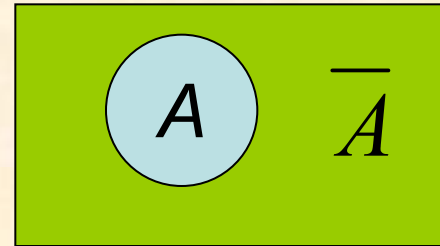
## 1. Отрицание (инверсия).

Обозначение: НЕ А,  $\neg A$ ,  $\overline{A}$

Таблица истинности:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Диаграмма Эйлера-Венна



$A = \{\text{Дети любят игрушки}\}$

$\overline{A} = \{\text{Дети НЕ любят игрушки}\}$

- **Инверсия** логической переменной истинна, если сама переменная ложна, и, наоборот, инверсия ложна, если переменная истинна.

## 2. Логическое умножение (Конъюнкция)

Обозначение: И,  $\wedge$ , &,  $\cdot$

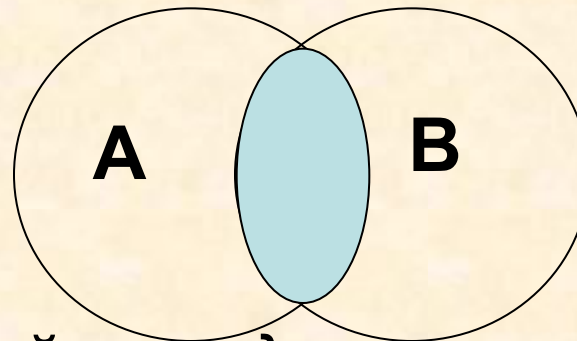
$$F = A \wedge B$$

Таблица истинности:

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Конъюнкция двух логических переменных истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны.

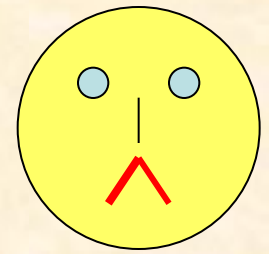
Диаграмма Эйлера-Венна



$A = \{\text{Множество обитателей моря}\}$

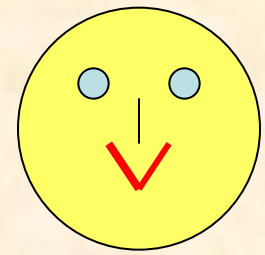
$B = \{\text{Множество млекопитающих}\}$

$F = A \wedge B = \{\text{кит, акула, дельфин}\}$





### 3. Логическое сложение (Дизъюнкция)



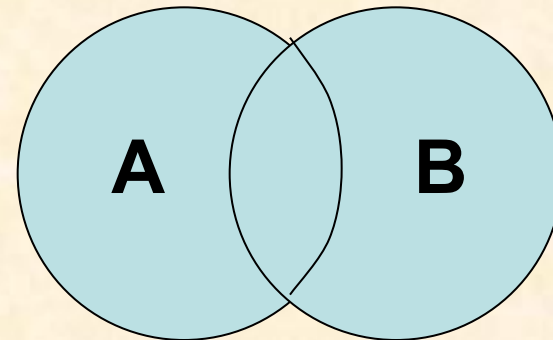
Обозначение: **ИЛИ**,  $\vee$ ,  $+$ ,  $|$

$$F = A \vee B$$

Таблица истинности:

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Диаграмма Эйлера-Венна



$A = \{\text{Множество студентов 1 группы}\}$

$B = \{\text{Множество студентов 2 группы}\}$

$F = A \vee B = \{\text{Множество студентов 1 или 2 группы}\}$

**Дизъюнкция** двух логических переменных ложна тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.

# 4. ИМПЛИКАЦИЯ (логическое следование)

Обозначение:  $A \rightarrow B$ ,  $A \Rightarrow B$

Таблица истинности:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Импликация - логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся **ложным тогда и только тогда**, когда условие (первое высказывание) истинно, а следствие (второе высказывание) ложно.

условие  $\Rightarrow$  следствие

**ЕСЛИ ... ,ТО ...**

Если будет дождь, то мы не пойдём на улицу.

Если я поленюсь, то получу двойку.

Если на траве роса, то скоро настанет вечер.

## 5. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ (равнозначность) -

логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным **тогда и только тогда**, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны.

Обозначение:  $A \sim B$ ,  $A \leftrightarrow B$ ,  $A \equiv B$ ,  $A = B$

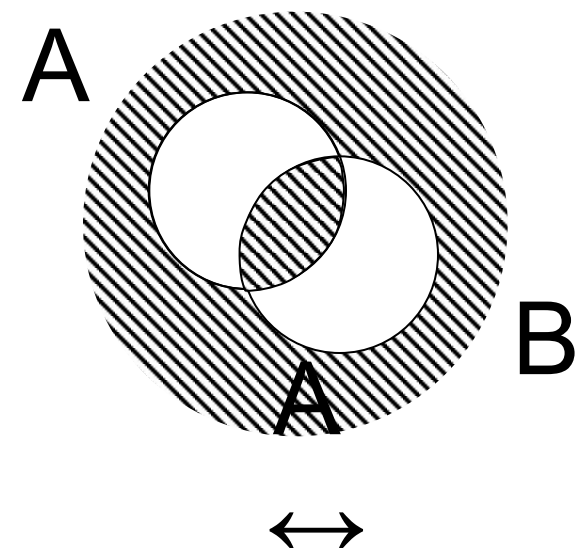
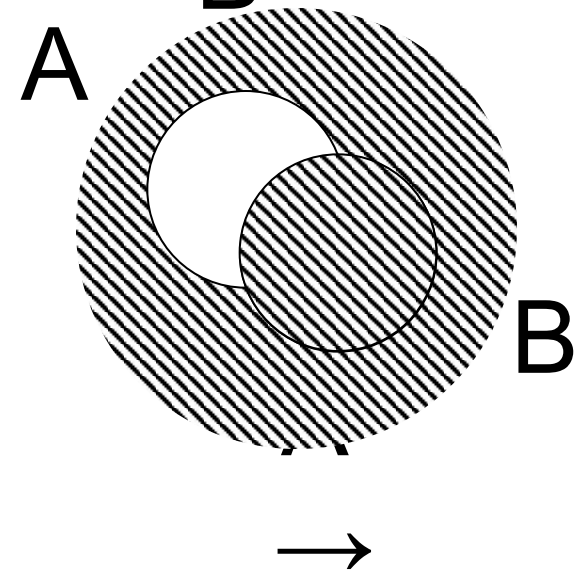
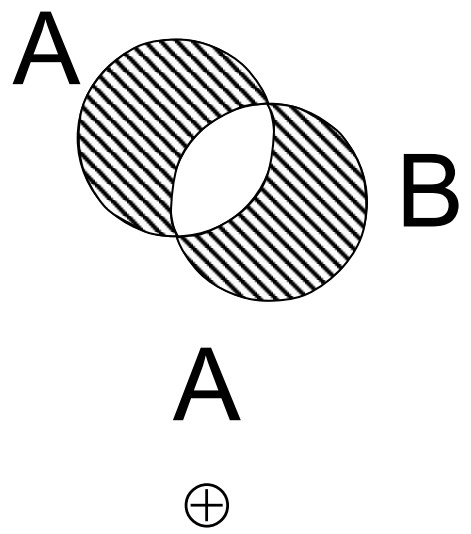
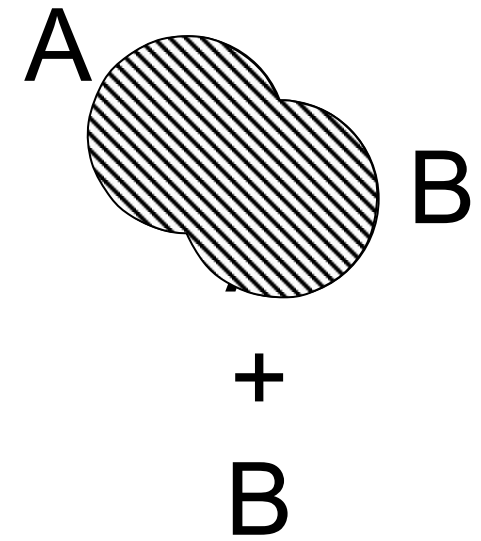
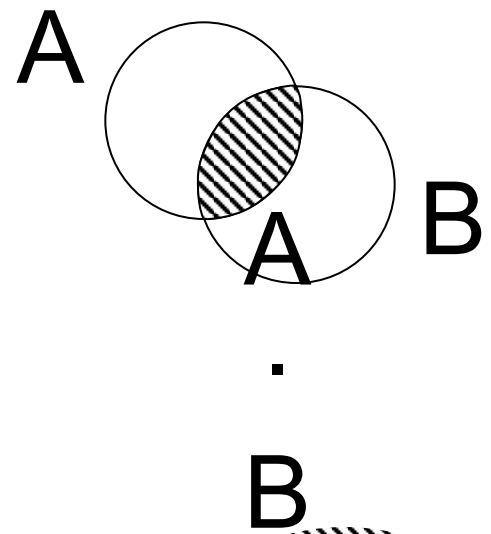
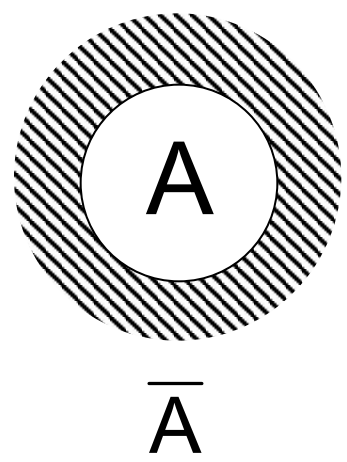
Таблица истинности:

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Чайник греет воду тогда и только тогда, когда он включен.

Мы дышим свежим воздухом тогда и только тогда, когда гуляем в парке.

# Диаграммы Венна (круги Эйлера)



**B**

**B**

**B**

## Приоритет логических операций:

1. **()** Операции в скобках
2. **НЕ** Отрицание
3. **И** логическое умножение
4. **ИЛИ** Логическое сложение
5.  $\rightarrow$  Импликация
6.  $\leftrightarrow$  Эквивалентность



# Вычисление логических выражений

## Пример1.

Вычислить значение логического выражения  
« $(2 \cdot 2 = 5$  или  $2 \cdot 2 = 4)$  и  $(2 \cdot 2 \neq 5$  или  $2 \cdot 2 \neq 4)$ »

Обозначим

$A = \langle\langle 2 \cdot 2 = 5 \rangle\rangle$  – ложно (0)

$B = \langle\langle 2 \cdot 2 = 4 \rangle\rangle$  – истинно (1)

Тогда  $(A$  или  $B)$  и  $(\bar{A}$  или  $\bar{B})$

$$F = (A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B}) = (0 \vee 1) \wedge (1 \vee 0) = 1 \wedge 1 = 1$$

**Задание 2.** Определите истинность составного высказывания

$\overline{(A \& B)} \& (C \vee D)$  состоящего из простых высказываний:

A={Принтер – устройство вывода информации}

B={Процессор – устройство хранения информации}

C={Монитор – устройство вывода информации}

D={Клавиатура – устройство обработки информации}

**Установим истинность простых высказываний:**

A=1, B=0, C=1, D=0

**Определяем истинность составного высказывания:**

$$F = (\overline{A} \& \overline{B}) \& (C \vee D) = \\ (1 \& 0) \& (1 \vee 0) = (0 \& 1) \& (1 \vee 0) = 0 \& 1 = 0$$

# ПОСТРОЕНИЕ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ ПО ЛОГИЧЕСКОМУ ВЫРАЖЕНИЮ

*Таблицу, показывающую, какие значения принимает сложное высказывание при всех сочетаниях значений входящих в него простых высказываний (переменных), называют **таблицей истинности** сложного высказывания (логической формулы).*

По формуле логической функции легко рассчитать ее *таблицу истинности*, соблюдая *приоритет логических операций* и действия в скобках



**Пример.** Построим таблицу истинности следующей функции:

**Порядок действий:**  $F(A, B, C) = A \vee (C \wedge B)$

- 1. Количество строк в таблице  $Q=2^n$** , где  $n$  - количество переменных (аргументов), здесь  $n = 3$  (A, B, C) и тогда  **$Q=2^3=8$**
- 2. Количество столбцов = число переменных + число операций** (здесь  $3+3=6$  столбцов)
- 3. Выписать наборы входных переменных.** Это удобнее сделать так:
  - разделить колонку значений первой переменной пополам и заполнить верхнюю половину 0, нижнюю половину 1.
  - разделить колонку значений второй переменной на 4 части и заполнить каждую четверть чередующимися группами 0 и 1, начиная опять с группы 0.
  - продолжить деление колонок значений последующих переменных на 8, 16 и т.д. частей и заполнение их группами из 0 или 1 до тех пор, пока группы 0 и 1 не будут состоять из одного символа. (Можно заполнять все колонки, начиная с группы единиц.)
- 4. Провести заполнение таблицы истинности** по столбикам, выполняя логические операции.

Построим таблицу истинности для следующей функции:  $F(A, B, C) = A \vee (\bar{C} \wedge B)$

$A$	$B$	$C$	$\bar{C}$	$\bar{C} \wedge B$	$A \vee (\bar{C} \wedge B)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

# Равносильные логические выражения

Логические выражения, у которых последние столбцы в таблице истинности совпадают, называются **равносильными**.

Знак «**=**» - равносильность.

**Пример 1.** Доказать равносильность логических выражений:

$$\text{и } \overline{A \wedge B} \quad \overline{A \vee B}$$

Таблица истинности  $\overline{A \wedge B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \wedge B$
0	0	1	1	<b>1</b>
0	1	1	0	<b>0</b>
1	0	0	1	<b>0</b>
1	1	0	0	<b>0</b>

Таблица истинности  $\overline{A \vee B}$

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$
0	0	0	<b>1</b>
0	1	1	<b>0</b>
1	0	1	<b>0</b>
1	1	1	<b>0</b>

Следовательно,  $\overline{A \wedge B} = \overline{A \vee B}$

В алгебре высказываний все логические операции могут быть сведены к трем базовым: **логическому умножению, логическому сложению, логическому отрицанию.**

**Пример.** Доказать методом сравнения ТИ, что  $A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$
0	0	1	<b>1</b>
0	1	1	<b>1</b>
1	0	0	<b>0</b>
1	1	0	<b>1</b>

# Законы алгебры логики и свойства логических операций

используются для упрощения логических выражений  
(минимизации логических функций)

$$A \wedge \bar{A} = 0$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \wedge 1 = A$$

$$A \wedge 0 = 0$$

$$A \vee \bar{A} = 1$$

$$A \vee A = A$$

$$A \vee 1 = 1$$

$$A \vee 0 = A$$

Формулы склеивания:

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B}) = A$$

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}) = A$$

Законы инверсии  
(де Моргана):

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$$

$$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

Формулы

поглощения:

$$A \vee (A \wedge B) = A$$

$$A \wedge (A \vee B) = A$$

$$A \vee (\bar{A} \wedge B) = A \vee B$$

$$A \wedge (\bar{A} \vee B) = A \wedge B$$

$$\bar{0} = 1$$

$$\bar{1} = 0$$

Закон двойного  
отрицания:

$$\overline{\bar{A}} = A$$

Переместительный закон:

$$A \vee B = B \vee A$$

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$\overline{(A \rightarrow B)} = \bar{A} \wedge \bar{B}$$

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$$

Сочетательный закон:

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B}) \\ = (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})$$

$$\bar{A} \wedge (A \vee B) = \bar{A} \wedge B$$

$$A \vee (\bar{A} \wedge B) = A \vee B$$

**Правило дистрибутивности.** В отличие от обычной алгебры, где за скобки можно выносить только общие множители, в алгебре высказываний можно выносить за скобки, как общие множители, так и общие слагаемые:  
Дистрибутивность умножения относительно сложения:

$$(A \& B) \vee (A \& C) = A \& (B \vee C)$$

Дистрибутивность сложения относительно умножения:

$$(A \vee B) \& (A \vee C) = A \vee (B \& C)$$