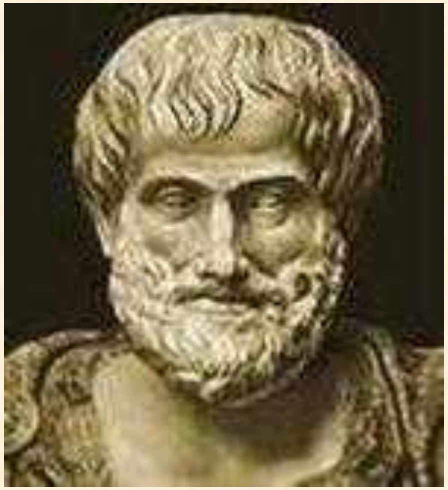
математическая логика

Логика - наука о формах и способах мышления.



Основы логики были заложены работами ученого и философа **Аристотеля** (384 -322гг. до н.э.).

Он пытался первым найти ответ на вопрос «Как мы рассуждаем?», изучал правила мышления. Аристотель впервые дал систематическое изложение логики.
Он подверг анализу человеческое мышление, его **формы - понятие, суждение, умозаключение**.
Так возникла **формальная логика.**

Основные формы мышления:

Понятие – форма мышления, фиксирующая основные существенные признаки объекта.

Высказывание - это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о свойствах реальных предметов и отношениях между ними. Высказывание может быть **истинно** или **ложно**.

Не являются высказываниями восклицательные и вопросительные предложения:

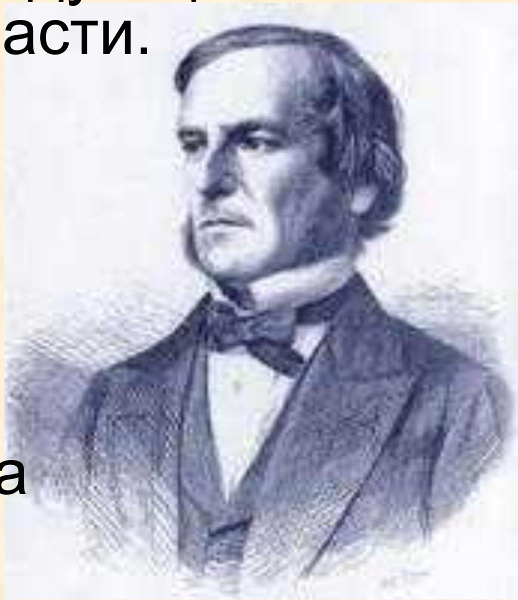
Высказывания делятся на:

1. **простые**
2. **составные** (истинность которых вычисляется с помощью алгебры высказываний)

Умозаключение – форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких суждений (посылок) может быть получено новое суждение (заключение)

Математическая логика

Немецкий ученый **Готфрид Лейбниц** (1646-1716) заложил основы **математической логики**. Он пытался построить первые логические исчисления (свести логику к математике), предложил использовать символы вместо слов обычного языка, поставил много задач по созданию символьной логики, его идеи оказали влияние на последующие работы ученых в этой области.



Англичанин **Джордж Буль** (1815-1864, математик-самоучка), на фундаменте, заложенном Лейбницем, создал новую область науки - ***Математическую логику*** (*Булеву алгебру* или *Алгебру высказываний*). В его работах логика обрела свой алфавит, свою орфографию и грамматику.

Алгебра логики (высказываний) работает с **высказываниями.**

Различают:

1. **Логические константы (логические утверждения)** – конкретные частные утверждения (**И/Л**)

2. **Логические переменные (предикаты)** – логические высказывания, значения которых меняются в зависимости от входящих в них переменных, обозначаются заглавными латинскими буквами **A, B, C, D, F,…**

   Истинному высказыванию ставится в соответствие 1, ложному — 0.

3. Логические функции (логические формулы) – сложные логические выражения образованные из простых и связанные логическими операциями **И, ИЛИ, НЕ** и др.)

Высказывание **“Все мышки и кошки с хвостами”** является сложным и состоит из двух простых высказываний.

А=“Все мышки с хвостами” и В=“Все кошки с хвостами”
Его можно записать в виде логической функции, значение которой истинно: **F(A,B)=A и B**

В математической логике не рассматривается конкретное содержание высказывания, важно только, истинно оно или ложно. Поэтому высказывание можно представить некоторой переменной величиной, значением которой может быть только ***ложно*** **(0**) или ***истинно*** **(1).**

Логические операции

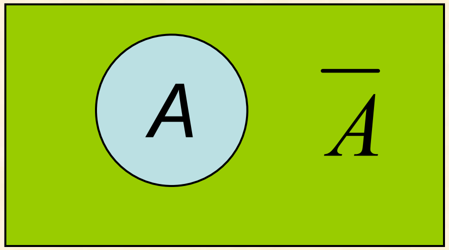
1. Отрицание (инверсия).

Обозначение: **НЕ А, ¬А,** $\overline{A}$

Таблица истинности:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Диаграмма Эйлера-Венна

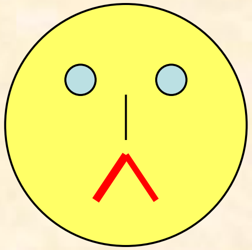


A={Дети любят игрушки} $\overline{A}$ = {Дети **НЕ** любят игрушки}

- **Инверсия логической переменной истинна, если сама переменная ложна, и, наоборот, инверсия ложна, если переменная истинна.**

2. Логическое умножение (Конъюнкция)

Обозначение: И, $\wedge$, &, •



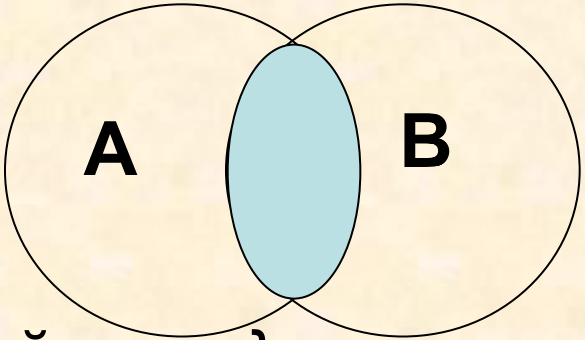
F= A $\wedge$ B

Таблица истинности:

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Конъюнкция двух логических переменных истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны.

Диаграмма Эйлера-Венна

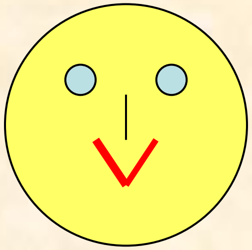


A={Множество обитателей моря}

B={Множество млекопитающих}

F=A ^ B= {кит, акула, дельфин}

3. Логическое сложение (Дизъюнкция)



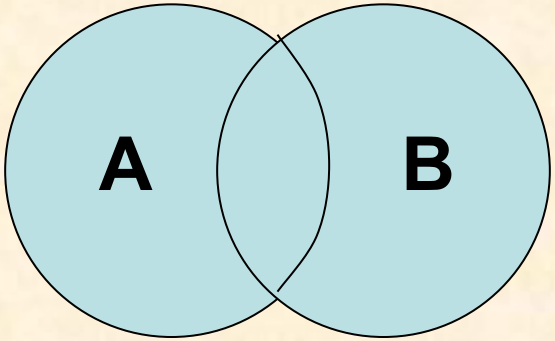
Обозначение: ИЛИ, $\vee$, +, |

F= A $\vee$ B

Таблица истинности:

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Диаграмма Эйлера-Венна



A={Множество студентов 1 группы}

B={Множество студентов 2 группы}

F=A V B= {Множество студентов 1 или 2 группы}

Дизъюнкция двух логических переменных ложна тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.

4. ИМПЛИКАЦИЯ (логическое следование)

Обозначение: **A→B, A⇒B**

Таблица истинности:

A	B	A => B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Импликация - логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум простым высказываниям составное высказывание, **являющееся ложным тогда и только тогда, когда условие (первое высказывание) истинно, а следствие (второе высказывание) ложно.**

условие => следствие

ЕСЛИ … ,ТО …

Если будет дождь, то мы не пойдем на улицу.

Если я поленюсь, то получу двойку.

Если на траве роса, то скоро настанет вечер.

5. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ (равнозначность) - **логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны.**

Обозначение: $A \sim B$, $A \leftrightarrow B$, $A \equiv B$, $A = B$

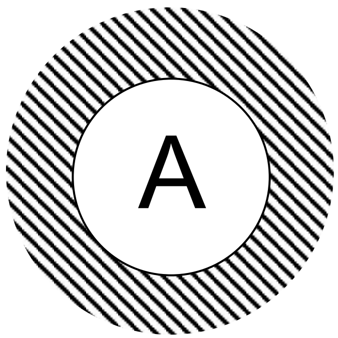
Таблица истинности:

A	B	A <=> B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

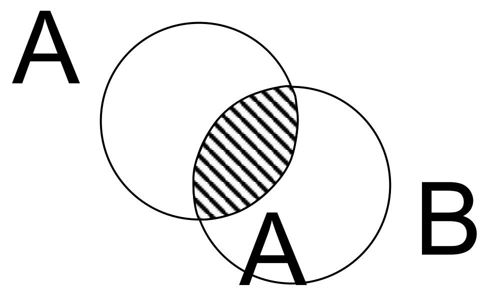
Чайник греет воду тогда и только тогда, когда он включен.

Мы дышим свежим воздухом тогда и только тогда, когда гуляем в парке.

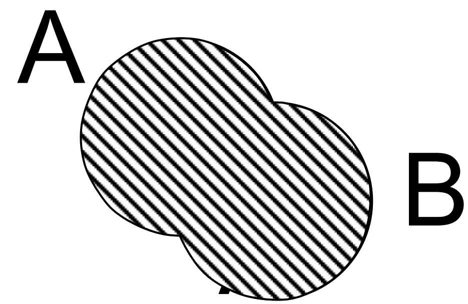
Диаграммы Венна (круги Эйлера)



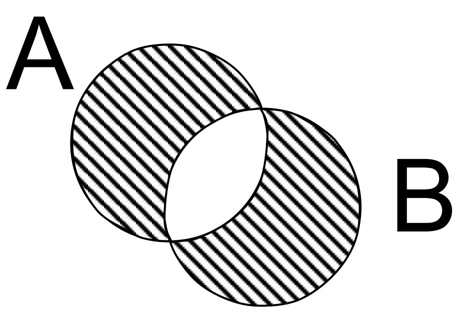
$\overline{A}$



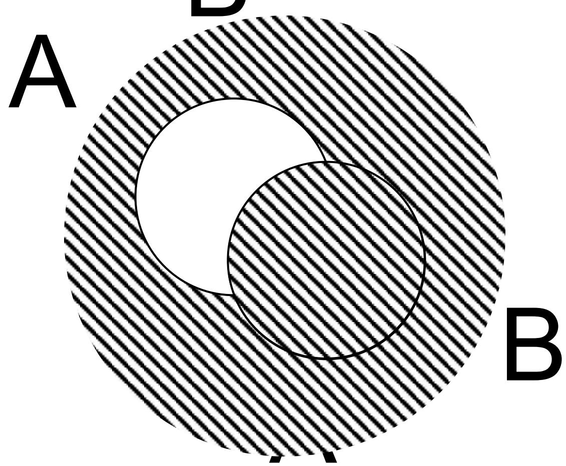
$A \cdot B$



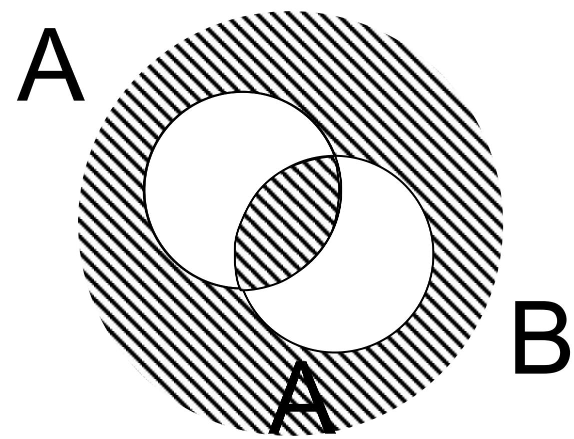
$A + B$



$A \oplus B$



$A \to B$



$A \leftrightarrow B$

Приоритет логических операций:

1. **()** Операции в скобках
2. НЕ Отрицание
3. **И** логическое умножение
4. **ИЛИ** Логическое сложение
5. → Импликация
6. ↔ Эквивалентность

Вычисление логических выражений

Пример1.

Вычислить значение логического выражения

«(2·2=5 или 2·2=4) и (2·2 ≠ 5 или 2·2 ≠ 4)»

Обозначим

A=«2·2=5» – ложно (0)

B=«2·2=4» – истинно (1)

Тогда **(A или B) и ($\overline{A}$ или $\overline{B}$)**

$$F = (A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B}) = (0 \vee 1) \wedge (1 \vee 0) = 1 \wedge 1 = 1$$

Задание 2. Определите истинность составного высказывания

$\overline{(\overline{A} \& \overline{B})} \& (C \vee D)$ состоящего из простых высказываний:

A={Принтер – устройство вывода информации}

B={Процессор – устройство хранения информации}

C={Монитор – устройство вывода информации}

D={Клавиатура – устройство обработки информации}

Установим истинность простых высказываний:

A=1, B=0, C=1, D=0

Определяем истинность составного высказывания:

$F = \overline{(\overline{A} \& \overline{B})} \& (C \vee D) =$

$$\overline{(\overline{1} \& \overline{0})} \& (1 \vee 0) = \overline{(0 \& 1)} \& (1 \vee 0) = \overline{0} \& 1 = 0$$

ПОСТРОЕНИЕ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ ПО ЛОГИЧЕСКОМУ ВЫРАЖЕНИЮ

Таблицу, показывающую, какие значения принимает сложное высказывание при всех сочетаниях значений входящих в него простых высказываний (переменных), называют таблицей истинности сложного высказывания (логической формулы).

По формуле логической функции легко рассчитать ее *таблицу истинности*, соблюдая *приоритет логических операций* и действия в скобках

Пример. Построим таблицу истинности следующей функции:

Порядок действий: $F(A,B,C) = A \vee (C \wedge B)$

1. **Количество строк в таблице $Q=2^n$**, где n - количество переменных (аргументов), здесь n = 3 (A, B, C) и тогда **$Q=2^3=8$**
2. **Количество столбцов = число переменных + число операций** (здесь 3+3=6 столбцов)
3. **Выписать наборы входных переменных**. Это удобнее сделать так:

a) разделить колонку значений первой переменной пополам и заполнить верхнюю половину 0, нижнюю половину 1.

b) разделить колонку значений второй переменной на 4 части и заполнить каждую четверть чередующимися группами 0 и 1 , начиная опять с группы 0.

c) продолжить деление колонок значений последующих переменных на 8, 16 и т.д. частей и заполнение их группами из 0 или 1 до тех пор, пока группы 0 и 1 не будут состоять из одного символа. (Можно заполнять все колонки, начиная с группы единиц.)

4. **Провести заполнение таблицы истинности** по столбикам, выполняя логические операции.

Построим таблицу истинности для следующей функции: $F(A,B,C) = A \vee (\overline{C} \wedge B)$

A	B	C	$\overline{C}$	$\overline{C} \wedge B$	$A \vee (\overline{C} \wedge B)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

Равносильные логические выражения

Логические выражения, у которых последние столбцы в таблице истинности совпадают, называются *равносильными*.

Знак «=» - равносильность.

Пример 1. Доказать равносильность логических выражений:

и $\overline{A} \wedge \overline{B}$ $\overline{A \vee B}$

Таблица истинности $\overline{A} \wedge \overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$
0	0	1	1	**1**
0	1	1	0	**0**
1	0	0	1	**0**
1	1	0	0	**0**

Таблица истинности $\overline{A \vee B}$

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$
0	0	0	**1**
0	1	1	**0**
1	0	1	**0**
1	1	1	**0**

Следовательно, $\overline{A} \wedge \overline{B} = \overline{A \vee B}$

В алгебре высказываний все логические операции могут быт сведены к трем базовым: **логическому умножению, логическому сложению, логическому отрицанию.**

Пример. Доказать методом сравнения ТИ, что $A \to B = \overline{A} \vee B$

A	B	A => B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$
0	0	1	**1**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	1	0	**1**

Законы алгебры логики и свойства логических операций используются для упрощения логических выражений (***минимизации логических функций***)

$$A \wedge \overline{A} = 0$$
$$A \wedge A = A$$
$$A \wedge 1 = A$$
$$A \wedge 0 = 0$$

$$A \vee \overline{A} = 1$$
$$A \vee A = A$$
$$A \vee 1 = 1$$
$$A \vee 0 = A$$

Формулы склеивания:

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) = A$$
$$(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) = A$$

Законы инверсии (де Моргана):

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$
$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

Формулы поглощения:

$$A \vee (A \wedge B) = A$$
$$A \wedge (A \vee B) = A$$
$$A \vee (\overline{A} \wedge B) = A \vee B$$
$$A \wedge (\overline{A} \vee B) = A \wedge B$$

$$\overline{0} = 1$$
$$\overline{1} = 0$$

Закон двойного отрицания:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Переместительный закон:

$$A \vee B = B \vee A$$
$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$\overline{(A \to B)} = \overline{A} \,\&\, \overline{B}$$
$$A \to B = \overline{A} \vee B$$

Сочетательный закон:

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$
$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$A \leftrightarrow B = (A \,\&\, B) \vee (\overline{A} \,\&\, \overline{B})$$
$$= (\overline{A} \vee B) \,\&\, (A \vee \overline{B})$$

$$\overline{A} \,\&\, (A \vee B) = \overline{A} \,\&\, B$$

$$A \vee (\overline{A} \,\&\, B) = A \vee B$$

Правило дистрибутивности. В отличие от обычной алгебры, где за скобки можно выносить только общие множители, в алгебре высказываний можно выносить за скобки, как общие множители, так и общие слагаемые:

Дистрибутивность умножения относительно сложения:

$$(A \& B) \vee (A \& C) = A \& (B \vee C)$$

Дистрибутивность сложения относительно умножения:

$$(A \vee B) \& (A \vee C) = A \vee (B \& C)$$