

# Задание множеств

**Пример 1.** Задать различными способами множество  $N$  всех натуральных чисел: 1, 2, 3, ...

Списком множество  $N$  задать нельзя ввиду его бесконечности.

Порождающая процедура содержит два правила:

а)  $1 \in N$ ; б) если  $n \in N$ , то  $n + 1 \in N$ .

Описание характеристического свойства элементов множества  $N$ :

$N = \{x: x - \text{целое положительное число}\}.$

**Пример 2.** Задать различными способами множество  $M$  всех четных чисел 2, 4, 6, ..., не превышающих 100.

$$M_{2n} = \{2, 4, 6, \dots, 100\}.$$

а)  $2 \in M_{2n}$ ; б) если  $n \in N$ , то  $(n+2) \in M_{2n}$ ; в)  $n \leq 98$ .

$M_{2n} = \{n: n - \text{целое положительное число, не превышающее } 100\}$

**ИЛИ**

$$M_{2n} = \{n: n \in N \text{ и } n/2 \in N, n \leq 100\}.$$

**Пример 3.** Пусть  $U = \{a, b, c\}$ . Определить в явном виде (перечислением своих элементов) булеан  $\beta(U)$  – множество всех подмножеств, состоящих из элементов множества  $U$ . Какова мощность множества  $\beta(U)$  ?

$\beta(U) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ .  
Мощность  $|\beta(U)| = 8$ .

**Пример 4.** Какие из приведенных определений множеств  $A, B, C, D$  являются корректными:

а)  $A = \{1, 2, 3\}$ ,

в)  $C = \{x: x \in A\}$ ,

б)  $B = \{5, 6, 6, 7\}$ ,

- а) Определение множества  $A = \{1, 2, 3\}$  списком своих элементов формально корректно.
- б) При перечислении элементов множества не следует указывать один и тот же элемент несколько раз. корректное определение  $B = \{5, 6, 7\}$ .
- в) Определение множества  $C = \{x: x \in A\}$  заданием характеристического свойства его элементов "принадлежать множеству  $A$ " корректно,  $A = \{1, 2, 3\}$ .

### Задача1

Задать различными способами множество  $M_{2^n}$  всех чисел, являющихся степенями двойки: 2, 4, 8, 16, ..., не превышающих 300?

### Задача2

Задать различными способами множество натуральных чисел, кратных пяти: 5, 10, 15, 20, ...

### Задача3

Задать в явном виде (списком) множество  $\beta(U)$  всех подмножеств множества  $U$ , если  $U = \{1, 2, 5, 7\}$ . Какова мощность множества  $\beta(U)$ ?

# Операции над множествами

**Пример 1.** Пусть универсальное множество  $U$  – множество всех сотрудников некоторой фирмы;  $A$  – множество всех сотрудников данной организации старше 35 лет;  $B$  – множество сотрудников, имеющих стаж работы более 10 лет;  $C$  – множество менеджеров фирмы. Каков содержательный смысл (характеристическое свойство) каждого из следующих множеств:

а)  $\bar{B}$ ; б)  $\bar{A} \cap B \cap C$ ; в)  $A \cup (B \cap \bar{C})$ ; г)  $B \setminus C$ ; д)  $C \setminus B$ ?

а)  $\bar{B}$  – множество сотрудников организации, стаж работы которых не превышает 10 лет.

б)  $\bar{A} \cap B \cap C$  – множество менеджеров фирмы не старше 35 лет, имеющих стаж работы более 10 лет.

**Пример 1.** Пусть универсальное множество  $U$  – множество всех сотрудников некоторой фирмы;  $A$  – множество всех сотрудников данной организации старше 35 лет;  $B$  – множество сотрудников, имеющих стаж работы более 10 лет;  $C$  – множество менеджеров фирмы. Каков содержательный смысл (характеристическое свойство) каждого из следующих множеств:

а)  $\bar{B}$ ; б)  $\bar{A} \cap B \cap C$ ; в)  $A \cup (B \cap \bar{C})$ ; г)  $B \setminus C$ ; д)  $C \setminus B$ ?

в)  $A \cup (B \cap \bar{C})$  – множество всех сотрудников фирмы старше 35 лет, а также сотрудников, не являющихся менеджерами, стаж работы которых более 10 лет.

г)  $B \setminus C$  – множество сотрудников организации со стажем работы более 10 лет, не работающих менеджерами.

д)  $C \setminus B$  – множество менеджеров со стажем работы не более 10 лет.

**Пример 2.** Задать множества  $\bar{M}$ ,  $\bar{N}$ , если:

$M$  – множество всех натуральных чисел, не превосходящих 100;

$N$  – множество натуральных чисел.

$\bar{M}$  – множество всех натуральных чисел, больших 100.

Запись  $\bar{N}$  без контекста (т.е. без указания универсального множества  $U$ ) не ясна:

- то ли это множество всех отрицательных целых чисел;
- то ли это множество положительных дробных чисел;
- то ли это пустое множество натуральных чисел.

**Пример 3.** Осуществить операции над множествами  $A = \{a, b, c, d\}$  и  $B = \{c, d, e, f, g, h\}$ .

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$$A \cap B = \{c, d\}$$

Универсальное множество  $U$  не определено, поэтому, строго говоря, операции дополнения над множествами  $A$  и  $B$  не могут быть выполнены. Дополним условие.

Пусть  $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ .

тогда  $\bar{A} = U \setminus A = \{e, f, g, h\}$ ,  $\bar{B} = \{a, b\}$ .

$A \setminus B = \{a, b\}$ ;  $B \setminus A = \{e, f, g, h\}$ .

**Пример 4.** Пусть  $U = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $A = \{1, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 3\}$ ,  $C = \{1, 4\}$ . Найти:

а)  $\bar{A} \cup \bar{B}$ ; б)  $\overline{A \cap B}$ ; в)  $A \cap \bar{B}$ ; г)  $(B \setminus A) \cup \bar{C}$ .

$$\begin{aligned} \text{а) } \bar{A} \cup \bar{B} &= (U \setminus A) \cup (U \setminus B) = \\ &= (\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{1, 3, 4\}) \cup (\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{2, 3\}) = \\ &= \{2\} \cup \{1, 4\} = \{1, 2, 4\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \overline{A \cap B} &= U \setminus (A \cap B) = \{1, 2, 3, 4\} \setminus (\{1, 3, 4\} \cap \{2, 3\}) = \\ &= \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3\} = \{1, 2, 4\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } A \cap \bar{B} &= A \cap (U \setminus B) = \{1, 3, 4\} \cap (\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{2, 3\}) = \\ &= \{1, 3, 4\} \cap \{1, 4\} = \{1, 4\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } (B \setminus A) \cup \bar{C} &= (\{2, 3\} \setminus \{1, 3, 4\}) \cup (\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{1, 4\}) = \\ &= \{2\} \cup \{2, 3\} = \{2, 3\}. \end{aligned}$$

### Задача1

Проиллюстрировать на содержательном примере некоммутативность операции разности множеств:  $A \setminus B \neq B \setminus A$ .

### Задача2

Для множеств  $A, B, C \subseteq U$  из примера 1 определить содержательный смысл следующих множеств:

а)  $A \cap (B \setminus C)$ ;

б)  $(A \cap B) \setminus C$ ;

в)  $A \setminus B$ ;

г)  $B \setminus \bar{A}$ ;

д)  $(A \cap B) \cup C$ ;

е)  $A \cap (B \cup C)$ .

### Задача3

Осуществить операции над множествами  $A, B \subseteq U$ , если:  
 $A = \{a, b, d\}$ ;  $B = \{b, d, e, h\}$ ;  $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ .

#### Задача4

Осуществить операции над множествами  $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  
 $B = \{3, 6, 9\}$ , если  $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ .

#### Задача5

Пусть  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3\}$ ,  $C = \{1, 3\}$ .

Найти: а)  $A \cup B \cup C$ ; б)  $A \cap B \cap C$ ;  
в)  $A \setminus (B \cup C)$ ; г)  $(A \setminus B) \cup C$ ;  
д)  $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

#### Задача6

Пусть  $U = \{a, b, c, d\}$ ,  $X = \{a, c\}$ ,  $Y = \{a, b, d\}$ ,  $Z = \{b, c\}$ .

Найти множества:

- |                                   |   |                             |
|-----------------------------------|---|-----------------------------|
| а) $X \cap \bar{Y}$ ;             | б) $(X \cap Z) \cup \bar{Y}$ ;              | в) $X \cup (Y \cap Z)$ ;    |
| г) $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ ; | д) $X \cup Y$ ;                             | е) $\bar{X} \cap \bar{Y}$ ; |
| ж) $\overline{X \cap Y}$          | з) $(X \cup Y) \cup Z$ ;                    | и) $X \cup (Y \cup Z)$ ;    |
| к) $X \setminus \bar{Z}$ ;        | л) $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$ . |                             |

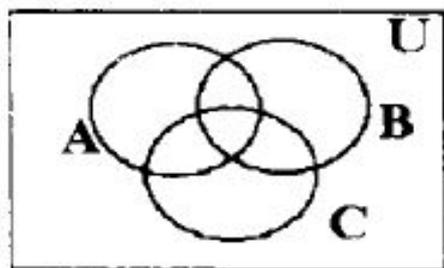
Пусть  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ;  $A = \{1, 2, 3\}$ ;  $B = \{1, 3, 5, 6\}$ ;  $C = \{4, 5, 6\}$ .

Найти множества: а)  $A \setminus C$ ; б)  $B \setminus C$ ; в)  $C \setminus B$ ; г)  $A \setminus B$ ; д)  $\bar{A} \cup B$ ;  
е)  $B \cap \bar{A}$ ; ж)  $A \cap C$ ; з)  $(C \cup A) \setminus (C \cap A)$ .

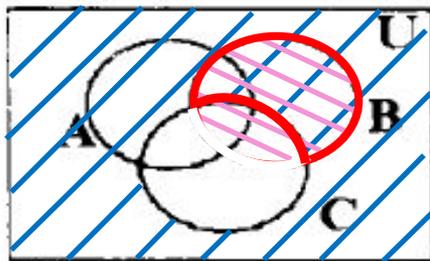
# Диаграммы Венна круги Эйлера

**Пример 1.** Представить множество  $A \cup (B \cap \bar{C})$  диаграммой Венна.

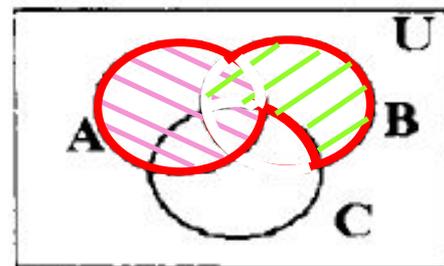
Начнем с общей диаграммы, показанной на рис. 1а.



а)



б)  $B \cap \bar{C}$



в)  $A \cup (B \cap \bar{C})$

Заштрихуем  $B$  диагональными линиями в одном направлении, а  $\bar{C}$  – в другом (рис. 1, б). Площадь с двойной штриховкой представляет собой их пересечение, т.е. множество  $B \cap \bar{C}$ . Выделим это множество жирной линией. На новой копии диаграммы заштрихуем эту область  $B \cap \bar{C}$  линиями одного направления, а  $A$  – другого. Вся заштрихованная на рис. 1, в область представляет объединение множеств  $A$  и  $B \cap \bar{C}$ , т.е. множество  $A \cup (B \cap \bar{C})$ . Обведем искомую область также жирной линией.

**Пример 2.** Проиллюстрировать на конкретных множествах и с помощью диаграммы Венна справедливость соотношения

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(свойство дистрибутивности слева операции пересечения  $\cap$  относительно объединения  $\cup$ ).

Пусть  $U = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{a, c, d\}$ ,  $C = \{b, c, d, e\}$ .

Тогда: левая часть равенства

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{a, b\} \cap (\{a, c, d\} \cup \{b, c, d, e\}) = \\ &= \{a, b\} \cap \{a, b, c, d, e\} = \{a, b\}; \end{aligned}$$

правая часть равенства

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (A \cap C) &= (\{a, b\} \cap \{a, c, d\}) \cup (\{a, b\} \cap \{b, c, d, e\}) = \\ &= \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}. \end{aligned}$$

Таким образом, левая и правая части соотношения совпадают, т.е. равенство подтверждено.

Построим теперь диаграммы Венна. Левая часть равенства представлена на рис. 2,а, правая – на рис. 2,б.

Из диаграмм очевидно равенство левой и правой частей соотношения.

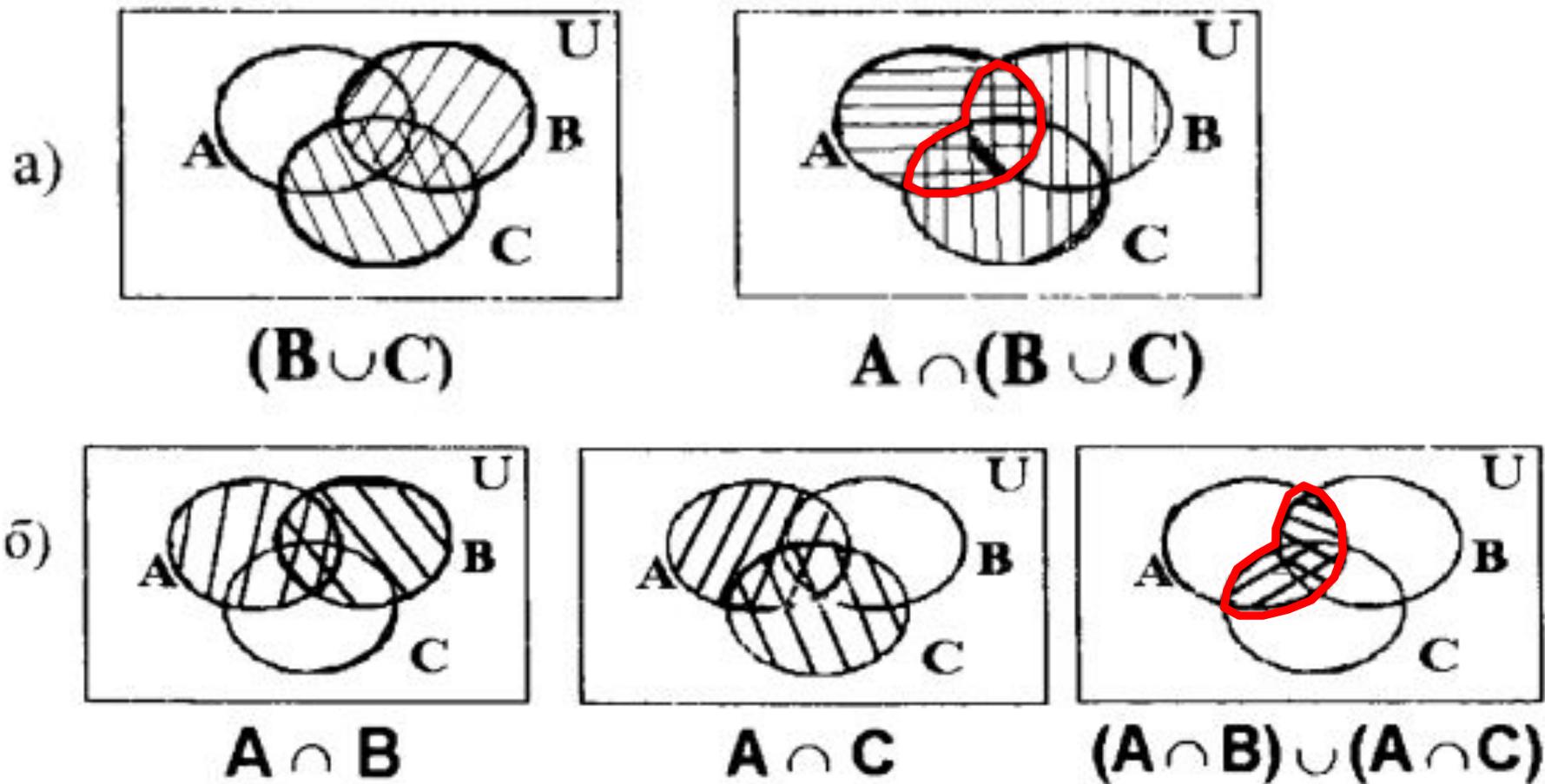


Рис. 2.

1. В примере 2 проиллюстрировано свойство дистрибутивности слева операции пересечения  $\cap$  относительно операции объединения  $\cup$ . Подтвердить справедливость свойства дистрибутивности справа пересечения  $\cap$  относительно объединения  $\cup$ , а также слева и справа  $\cup$  относительно  $\cap$ , т.е.:

а)  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$  – справа  $\cap$  относительно  $\cup$ ;

б)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  – слева  $\cup$  относительно  $\cap$ ;

в)  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$  – справа  $\cup$  относительно  $\cap$ .

## Задача1

Построить диаграммы Венна

а)  $X \cap \bar{Y}$ ;

б)  $(X \cap Z) \cup \bar{Y}$ ;

в)  $X \cup (Y \cap Z)$ ;

г)  $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ ;

д)  $X \cup Y$ ;

е)  $\bar{X} \cap \bar{Y}$ ;

ж)  $\overline{X \cap Y}$

з)  $(X \cup Y) \cup Z$ ;

и)  $X \cup (Y \cup Z)$ ;

к)  $X \setminus \bar{Z}$ ;

л)  $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$ .

## Задача 2

Пусть  $A, B, C \subseteq U$ . Проиллюстрировать на примере конкретных множеств и с помощью диаграмм Венна справедливость следующих соотношений:

$$a) A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C; \quad \delta) A \cup (A \cap B) = A;$$

$$б) A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; \quad e) A \cap (A \cup B) = A;$$

$$в) \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B};$$

$$ж) (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A;$$

$$г) \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};$$

$$з) A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B.$$

# Доказательства

приемы доказательств наиболее часто используемые в теории множеств

- доказательство равенства – соотношений типа  $X = Y$ ;
- доказательство единственности существования;
- доказательство от противного.

**Пример 1.** Доказать справедливость соотношения

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(свойство дистрибутивности слева объединения  $\cup$  относительно пересечения  $\cap$ ).

Такое доказательство может быть выполнено с помощью диаграмм Венна

Здесь для этих целей используем один из приемов доказательства равенства двух множеств.

В соответствии с определением I равенства множеств множества равны, т.е.  $X = Y$ , если их элементы совпадают. Это означает, что  $X = Y$ , если из того, что  $a \in X$ , следует  $a \in Y$ , и из того, что  $a \notin X$ , следует  $a \notin Y$ .

Покажем сначала, что если произвольный элемент  $a$  принадлежит левой части соотношения, т.е.  $a \in A \cup (B \cap C)$ , то он принадлежит и правой части данного соотношения, т.е.  $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

Пусть

$$1. a \in A \cup (B \cap C).$$

Из определения операции объединения следует, что элемент  $a$  принадлежит объединению множеств  $A$  и  $(B \cap C)$ , если он принадлежит хотя бы одному из них (или, что очевидно, тому и другому). Таким образом,  $a \in A$  или  $a \in (B \cap C)$ , при этом возможны следующие случаи:

1.1.  $a$  принадлежит множеству  $A$  и  $a$  не принадлежит пересечению множеств  $B \cap C$ :

$$a \in A \text{ и } a \notin (B \cap C).$$

Последнее условие выполняется, если  $a$  не принадлежит  $B$ , или  $C$ , или им обоим, т.е.

$$1.1.1. a \in A, a \notin B, a \in C;$$

$$1.1.2. a \in A, a \in B, a \notin C;$$

$$1.1.3. a \in A, a \notin B, a \notin C;$$

$$1.2. a \notin A \text{ и } a \in (B \cap C), \text{ т.е. } a \notin A, a \in B, a \in C;$$

$$1.3. a \in A \text{ и } a \in (B \cap C), \text{ т.е. } a \in A, a \in B, a \in C.$$

Рассмотрим каждый из этих случаев.

1.1. Так как  $a \in A$ , то  $a$  принадлежит объединению множества  $A$  с любым множеством, в том числе  $a \in (A \cup B)$  и  $a \in (A \cup C)$ ; следовательно,  $a$  принадлежит и их пересечению:  
$$a \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

1.2. Так как  $a \in B$ ,  $a \in C$ , то  $a \in (A \cup B)$  и  $a \in (A \cup C)$ , следовательно,  
$$a \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

1.3. Так как  $a \in A$ , то этого достаточно, чтобы  $a \in \overline{(A \cup B)}$  и  $a \in (A \cup C)$ , следовательно,  
$$a \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Таким образом, в любом из рассмотренных случаев из того, что  $a \in A \cup (B \cap C)$ , следует, что  $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

$$2. \ a \notin A \cup (B \cap C).$$

Элемент  $a$  не принадлежит объединению двух множеств, если он не принадлежит ни одному из них. Тогда  $a \notin A$  и  $a \notin (B \cap C)$ , т.е. возможны следующие случаи (см. п. 1.1):

$$2.1. \ a \notin A, \ a \notin B, \ a \in C;$$

$$2.2. \ a \notin A, \ a \in B, \ a \notin C;$$

$$2.3. \ a \notin A, \ a \notin B, \ a \notin C.$$

2.1.  $a \notin A, a \notin B, a \in C;$

2.2.  $a \notin A, a \in B, a \notin C;$

2.3.  $a \notin A, a \notin B, a \notin C.$

Рассмотрим каждый из этих случаев:

2.1. Так как  $a \notin A, a \notin B$ , то  $a \notin (A \cup B)$ , следовательно,  
 $a \notin (A \cup B) \cap (A \cup C).$

2.2. Так как  $a \notin A, a \notin C$ , то  $a \notin (A \cup C)$ , следовательно,  
 $a \notin (A \cup B) \cap (A \cup C).$

2.3. Так как  $a \notin A, a \notin B$ , то этого достаточно, чтобы  
 $a \notin (A \cup B)$  и, следовательно,  
 $a \notin (A \cup B) \cap (A \cup C).$

Как видим, в любом из этих случаев из того, что  
 $a \notin A \cup (B \cap C)$ , следует, что  $a \notin (A \cup B) \cap (A \cup C).$

Таким образом, множества  $A \cup (B \cap C)$  и  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$   
совпадают и по определению I равенства множеств

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

что и требовалось доказать.