Задание множеств

Пример 1. Задать различными способами множество N всех натуральных чисел: 1, 2, 3, ...

Списком множество N задать нельзя ввиду его бесконечности.

Порождающая процедура содержит два правила:

$$\text{а) } 1 \in N; \quad \text{б) если } n \in N \text{, то } n+1 \in N.$$

Описание характеристического свойства элементов множества N:

$$N = \{x : x - \text{целое положительное число}\}.$$

Пример 2. Задать различными способами множество M всех четных чисел 2, 4, 6, ..., не превышающих 100.

$$M_{2n} = \{2, 4, 6, ..., 100\}.$$

а) $2 \in M_{2n}$;   б) если $n \in N$, то $(n+2) \in M_{2n}$;   в) $n \leq 98$.

$M_{2n} = \{n$: n – целое положительное число, не превышающее 100$\}$

или

$$M_{2n} = \{n\text{: } n \in N \text{ и } n/2 \in N,\ n \leq 100\}.$$

Пример 3. Пусть $U = \{a, b, c\}$. Определить в явном виде (перечислением своих элементов) *булеан* $\beta(U)$ – множество всех подмножеств, состоящих из элементов множества U. Какова мощность множества $\beta(U)$?

$\beta(U) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Мощность $|\beta(U)| = 8$.

Пример 4. Какие из приведенных определений множеств A, B, C, D являются корректными:

а) $A = \{1, 2, 3\}$,

б) $B = \{5, 6, 6, 7\}$,

в) $C = \{x: x \in A\}$,

а) Определение множества $A = \{1, 2, 3\}$ **списком своих** элементов формально корректно.

б) При перечислении элементов множества не следует указывать один и тот же элемент несколько раз. Корректное определение

$$B = \{5, 6, 7\}.$$

в) Определение множества $C = \{x: x \in A\}$ заданием характеристического свойства его элементов "принадлежать множеству A" корректно,

$$A = \{1, 2, 3\}.$$

Задача1

Задать различными способами множество M_{2^n} всех чисел, являющихся степенями двойки: 2, 4, 8, 16, ..., не превышающих 300?

Задача2

Задать различными способами множество натуральных чисел, кратных пяти: 5, 10, 15, 20, ...

Задача3

Задать в явном виде (списком) множество $\beta(U)$ всех под множеств множества U, если $U = \{1, 2, 5, 7\}$. Какова мощность множества $\beta(U)$?

Операции над множествами

Пример 1. Пусть универсальное множество U – множество всех сотрудников некоторой фирмы; A – множество всех сотрудников данной организации старше 35 лет; B – множество сотрудников, имеющих стаж работы более 10 лет; C – множество менеджеров фирмы. Каков содержательный смысл (характеристическое свойство) каждого из следующих множеств:

а) $\overline{B}$; б) $\overline{A} \cap B \cap C$; в) $A \cup (B \cap \overline{C})$; г) $B \setminus C$; д) $C \setminus B$?

а) $\overline{B}$ – множество сотрудников организации, стаж работы которых не превышает 10 лет.

б) $\overline{A} \cap B \cap C$ – множество менеджеров фирмы не старше 35 лет, имеющих стаж работы более 10 лет.

Пример 1. Пусть универсальное множество U – множество всех сотрудников некоторой фирмы; A – множество всех сотрудников данной организации старше 35 лет; B – множество сотрудников, имеющих стаж работы более 10 лет; C – множество менеджеров фирмы. Каков содержательный смысл (характеристическое свойство) каждого из следующих множеств:

а) $\overline{B}$; б) $\overline{A} \cap B \cap C$; в) $A \cup (B \cap \overline{C})$; г) $B \setminus C$; д) $C \setminus B$?

в) $A \cup (B \cap \overline{C})$ – множество всех сотрудников фирмы старше 35 лет, а также сотрудников, не являющихся менеджерами, стаж работы которых более 10 лет.

г) $B \setminus C$ – множество сотрудников организации со стажем работы более 10 лет, не работающих менеджерами.

д) $C \setminus B$ – множество менеджеров со стажем работы не более 10 лет.

Пример 2. Задать множества $\overline{M}$, $\overline{N}$, если:
M – множество всех натуральных чисел, не превосходящих 100;
N – множество натуральных чисел.

$\overline{M}$ – множество всех натуральных чисел, бóльших 100.

Запись $\overline{N}$ без контекста (т.е. без указания универсального множества U) не ясна:

- то ли это множество всех отрицательных целых чисел;
- то ли это множество положительных дробных чисел;
- то ли это пустое множество натуральных чисел.

Пример 3. Осуществить операции над множествами $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{c, d, e, f, g, h\}$.

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$A \cap B = \{c, d\}$

Универсальное множество U не определено, поэтому, строго говоря, операции дополнения над множествами A и B не могут быть выполнены. Дополним условие. Пусть $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

тогда $\overline{A} = U \setminus A = \{e, f, g, h\}$, $\overline{B} = \{a, b\}$.

$A \setminus B = \{a, b\}$; $B \setminus A = \{e, f, g, h\}$.

Пример 4. Пусть $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 4\}$. Найти:

а) $\overline{A} \cup \overline{B}$; б) $\overline{A \cap B}$; в) $A \cap \overline{B}$; г) $(B \setminus A) \cup \overline{C}$.

а) $\overline{A} \cup \overline{B} = (U \setminus A) \cup (U \setminus B) =$
$= (\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{1, 3, 4\}) \cup (\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{2, 3\}) =$
$= \{2\} \cup \{1, 4\} = \{1, 2, 4\}$.

б) $\overline{A \cap B} = U \setminus (A \cap B) = \{1, 2, 3, 4\} \setminus (\{1, 3, 4\} \cap \{2, 3\}) =$
$= \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3\} = \{1, 2, 4\}$.

в) $A \cap \overline{B} = A \cap (U \setminus B) = \{1, 3, 4\} \cap (\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{2, 3\}) =$
$= \{1, 3, 4\} \cap \{1, 4\} = \{1, 4\}$.

г) $(B \setminus A) \cup \overline{C} = (\{2, 3\} \setminus \{1, 3, 4\}) \cup (\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{1, 4\}) =$
$= \{2\} \cup \{2, 3\} = \{2, 3\}$.

Задача1

Проиллюстрировать на содержательном примере некоммутативность операции разности множеств: $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Задача2

Для множеств $A, B, C \subseteq U$ из примера 1 определить содержательный смысл следующих множеств:

а) $A \cap (B \setminus C)$;
б) $(A \cap B) \setminus C$;
в) $A \setminus B$;
г) $B \setminus \overline{A}$;
д) $(A \cap B) \cup C$;
е) $A \cap (B \cup C)$.

Задача3

Осуществить операции над множествами $A, B \subseteq U$, если: $A = \{a, b, d\}$; $B = \{b, d, e, h\}$; $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

Задача4

Осуществить операции над множествами $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{3, 6, 9\}$, если $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$.

Задача5

Пусть $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3\}$.

Найти: а) $A \cup B \cup C$; б) $A \cap B \cap C$;
в) $A \setminus (B \cup C)$; г) $(A \setminus B) \cup C$;
д) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Задача6

Пусть $U = \{a, b, c, d\}$, $X = \{a, c\}$, $Y = \{a, b, d\}$, $Z = \{b, c\}$.

Найти множества:
а) $X \cap \overline{Y}$; б) $(X \cap Z) \cup \overline{Y}$; в) $X \cup (Y \cap Z)$;
г) $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$; д) $X \cup Y$; е) $\overline{X} \cap \overline{Y}$;
ж) $\overline{X \cap Y}$ з) $(X \cup Y) \cup Z$; и) $X \cup (Y \cup Z)$;
к) $X \setminus \overline{Z}$; л) $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$.

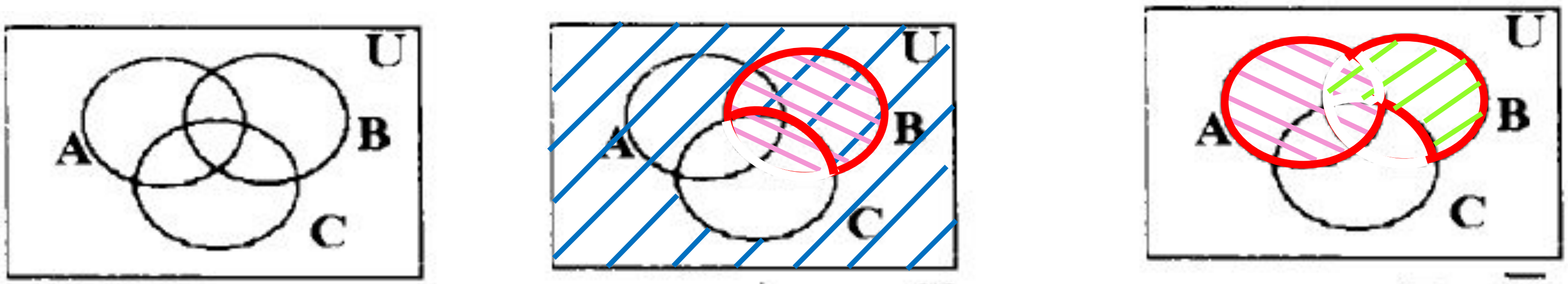
Пусть $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{1, 3, 5, 6\}$; $C = \{4, 5, 6\}$.

Найти множества: а) $A \setminus C$; б) $B \setminus C$; в) $C \setminus B$; г) $A \setminus B$; д) $\overline{A} \cup B$;
е) $B \cap \overline{A}$; ж) $A \cap C$; з) $(C \cup A) \setminus (C \cap A)$.

Диаграммы Венна круги Эйлера

Пример 1. Представить множество $A \cup (B \cap \overline{C})$ диаграммой Венна.

Начнем с общей диаграммы, показанной на рис. 1а.



а) б) $B \cap \overline{C}$ в) $A \cup (B \cap \overline{C})$

Заштрихуем B диагональными линиями в одном направлении, а $\overline{C}$ – в другом (рис. 1, б). Площадь с двойной штриховкой представляет собой их пересечение, т.е. множество $B \cap \overline{C}$ Выделим это множество жирной линией. На новой копии диаграммы заштрихуем эту область $B \cap \overline{C}$ линиями одного направления, а A – другого. Вся заштрихованная на рис. 1,в область представляет объединение множеств A и $B \cap \overline{C}$, т.е. множество $A \cup (B \cap \overline{C})$. Обведем искомую область также жирной линией.

Пример 2. Проиллюстрировать на конкретных множествах и с помощью диаграммы Венна справедливость соотношения

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(свойство дистрибутивности слева операции пересечения $\cap$ относительно объединения $\cup$).

Пусть $U = \{a, b, c, d, e\}$. $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, d\}$, $C = \{b, c, d, e\}$.

Тогда: левая часть равенства

$A \cap (B \cup C) = \{a, b\} \cap (\{a, c, d\} \cup \{b, c, d, e\}) =$
$= \{a, b\} \cap \{a, b, c, d, e\} = \{a, b\}$;

правая часть равенства

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = (\{a, b\} \cap \{a, c, d\}) \cup (\{a, b\} \cap \{b, c, d, e\}) =$
$= \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$.

Таким образом, левая и правая части соотношения совпадают, т.е. равенство подтверждено.

Построим теперь диаграммы Венна. Левая часть равенства представлена на рис. 2,а, правая – на рис. 2,б.

Из диаграмм очевидно равенство левой и правой частей соотношения.

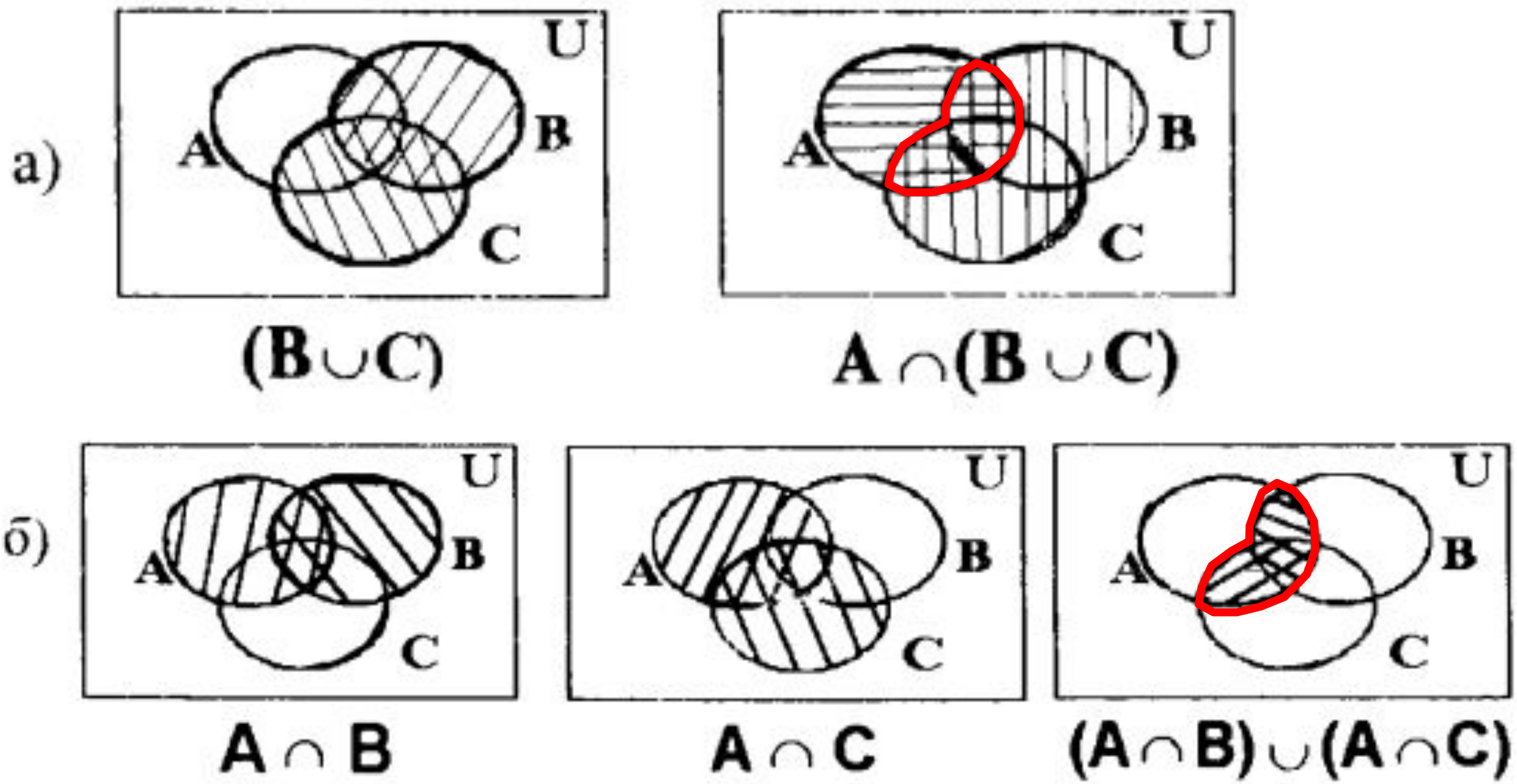


Рис. 2

1. В примере 2 проиллюстрировано свойство дистрибутивности слева операции пересечения $\cap$ относительно операции объединения $\cup$. Подтвердить справедливость свойства дистрибутивности справа пересечения $\cap$ относительно объединения $\cup$, а также слева и справа $\cup$ относительно $\cap$, т.е.:

а) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ – справа $\cap$ относительно $\cup$;

б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$ – слева $\cup$ относительно $\cap$;

в) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ – справа $\cup$ относительно $\cap$.

<u>Задача1</u>

Построить диаграммы Венна

а) $X \cap \overline{Y}$;
б) $(X \cap Z) \cup \overline{Y}$;
в) $X \cup (Y \cap Z)$;
г) $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$;
д) $X \cup Y$;
е) $\overline{X} \cap \overline{Y}$;
ж) $\overline{X \cap Y}$
з) $(X \cup Y) \cup Z$;
и) $X \cup (Y \cup Z)$;
к) $X \setminus \overline{Z}$;
л) $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$.

Задача2

Пусть $A, B, C \subseteq U$. Проиллюстрировать на примере конкретных множеств и с помощью диаграмм Венна справедливость следующих соотношений:

а) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; *д*) $A \cup (A \cap B) = A$;

б) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; *е*) $A \cap (A \cup B) = A$;

в) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; *ж*) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$;

г) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; *з*) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$.

Доказательства

приемы доказательств наиболее часто используемые в теории множеств

- доказательство равенства – соотношений типа $X = Y$;
- доказательство единственности существования;
- доказательство от противного.

Пример 1. Доказать справедливость соотношения

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(свойство дистрибутивности слева объединения $\cup$ относительно пересечения $\cap$).

Такое доказательство может быть выполнено с помощью диаграмм Венна

Здесь для этих целей используем один из приемов доказательства равенства двух множеств.

В соответствии с определением I равенства множеств множества равны, т.е. $X = Y$, если их элементы совпадают. Это означает, что $X = Y$, если из того, что $a \in X$, следует $a \in Y$, и из того, что $a \notin X$, следует $a \notin Y$.

Покажем сначала, что если произвольный элемент a принадлежит левой части соотношения, т.е. $a \in A \cup (B \cap C)$, то он принадлежит и правой части данного соотношения, т.е. $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Пусть

1. $a \in A \cup (B \cap C)$.

Из определения операции объединения следует, что элемент a принадлежит объединению множеств A и $(B \cap C)$, если он принадлежит хотя бы одному из них (или, что очевидно, тому и другому). Таким образом, $a \in A$ или $a \in (B \cap C)$, при этом возможны следующие случаи:

1.1. a принадлежит множеству A и a не принадлежит пересечению множеств $B \cap C$:

$a \in A$ и $a \notin (B \cap C)$.

Последнее условие выполняется, если a не принадлежит B, или C, или им обоим, т.е.

1.1.1. $a \in A, a \notin B, a \in C$;

1.1.2. $a \in A, a \in B, a \notin C$;

1.1.3. $a \in A, a \notin B, a \notin C$;

1.2. $a \notin A$ и $a \in (B \cap C)$, т.е. $a \notin A, a \in B, a \in C$;

1.3. $a \in A$ и $a \in (B \cap C)$, т.е. $a \in A, a \in B, a \in C$.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

1.1. Так как $a \in A$, то a принадлежит объединению множества A с любым множеством, в том числе $a \in (A \cup B)$ и $a \in (A \cup C)$; следовательно, a принадлежит и их пересечению:

$a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1.2. Так как $a \in B$, $a \in C$, то $a \in (A \cup B)$ и $a \in (A \cup C)$, следовательно,

$a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1.3. Так как $a \in A$, то этого достаточно, чтобы $a \in (A \cup B)$ и $a \in (A \cup C)$, следовательно,

$a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Таким образом, в любом из рассмотренных случаев из того, что $a \in A \cup (B \cap C)$, следует, что $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. $a \notin A \cup (B \cap C)$.

Элемент a не принадлежит объединению двух множеств, если он не принадлежит ни одному их них. Тогда $a \notin A$ и $a \notin (B \cap C)$, т.е. возможны следующие случаи (см. п. 1.1):

2.1. $a \notin A$, $a \notin B$, $a \in C$;

2.2. $a \notin A$, a $\in B$, $a \notin C$;

2.3. $a \notin A$, a $\notin B$, $a \notin C$.

$$2.1.\ a \notin A, a \notin B, a \in C;$$
$$2.2.\ a \notin A, \mathrm{a} \in B, a \notin C;$$
$$2.3.\ a \notin A, \mathrm{a} \notin B, a \notin C.$$

Рассмотрим каждый из этих случаев:

2.1. Так как $a \notin A$, $a \notin B$, то $a \notin (A \cup B)$, следовательно, $a \notin (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2.2. Так как $a \notin A$, $a \notin C$, то $a \notin (A \cup C)$, следовательно, $a \notin (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2.3. Так как $a \notin A$, $a \notin B$, то этого достаточно, чтобы $a \notin (A \cup B)$ и, следовательно,

$a \notin (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Как видим, в любом из этих случаев из того, что $a \notin A \cup (B \cap C)$, следует, что $a \notin (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Таким образом, множества $A \cup (B \cap C)$ и $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ совпадают и по определению I равенства множеств

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

что и требовалось доказать.