

*Аналитическая запись
функций алгебры логики*

Иерархия операций алгебры логики

Принцип суперпозиции позволяет использовать простые операции для построения других, более сложных функций.

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 \vee (x_2 \rightarrow x_3) \wedge x_2$$

Порядок выполнения операций определяется **иерархией**:

- 1) операция отрицание;
- 2) операция конъюнкция;
- 3) операции дизъюнкция и сложение по модулю два;
- 4) все остальные операции.

Скобки применяют для изменения порядка выполнения операций.

Свойства операций алгебры логики

Свойства операции отрицание

а) Закон двойного отрицания:

$$x \equiv \overline{\overline{x}}$$

x	\overline{x}	$\overline{\overline{x}}$
0	1	0
1	0	1

б) Если $x \equiv y$, то $\overline{x} \equiv \overline{y}$

x	y	\overline{x}	\overline{y}
0	0	1	1
1	1	0	0

Следствие: знак отрицания, стоящий над всем выражением, можно переносить в другую часть равносильности

$$\text{Если } x \equiv \overline{y}, \text{ то } \overline{x} \equiv y$$


Свойства операций конъюнкция и дизъюнкция

а) Законы нулевого множества:


x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

$$x \vee 0 \equiv x$$

$$x \& 0 \equiv 0$$



x_1	0	$x_1 \vee 0$
0	0	0
1	0	1



x_1	0	$x_1 \& 0$
0	0	0
1	0	0

б) Законы универсального множества:

$$x \vee 1 \equiv 1$$

$$x \& 1 \equiv x$$

Свойства операций конъюнкция и дизъюнкция

с) Законы идемпотентности:

$$x \vee x \equiv x$$

$$x \& x \equiv x$$

$$x \vee x \vee \dots \vee x \equiv x$$

$$x \& x \& \dots \& x \equiv x$$

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

d) Закон исключенного третьего:

$$x \vee \overline{x} \equiv 1$$

e) Закон логического противоречия:

$$x \& \overline{x} \equiv 0$$

Свойства операций конъюнкция и дизъюнкция

f) Коммутативные законы:

$$x_1 \vee x_2 \equiv x_2 \vee x_1$$

$$x_1 \& x_2 \equiv x_2 \& x_1$$

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

g) Ассоциативные законы:

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) \equiv (x_1 \vee x_2) \vee x_3 \equiv x_1 \vee x_2 \vee x_3$$

$$x_1 \& (x_2 \& x_3) \equiv (x_1 \& x_2) \& x_3 \equiv x_1 \& x_2 \& x_3$$

x_1	x_2	x_3	$x_2 \vee x_3$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$	$(x_1 \vee x_2) \vee x_3$	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Свойства операций конъюнкция и дизъюнкция

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

h) Дистрибутивные законы

- конъюнкции относительно дизъюнкции:

$$x_1(x_2 \vee x_3) \equiv x_1x_2 \vee x_1x_3$$

x_1	x_2	x_3	$x_2 \vee x_3$	$x_1(x_2 \vee x_3)$	x_1x_2	x_1x_3	$x_1x_2 \vee x_1x_3$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Свойства операций конъюнкция и дизъюнкция

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

h) Дистрибутивные законы

- конъюнкции относительно дизъюнкции:

$$x_1(x_2 \vee x_3) \equiv x_1 x_2 \vee x_1 x_3$$

- дизъюнкции относительно конъюнкции:

$$x_1 \vee x_2 x_3 \equiv (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)$$

$$(A \vee B)(C \vee D) \equiv AC \vee AD \vee BC \vee BD$$

Свойства операций конъюнкция и дизъюнкция

i) Законы де Моргана:

Связь конъюнкции и дизъюнкции :

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

$$\overline{x_1 \& x_2} \equiv \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$$

$$\overline{x_1 \vee x_2} \equiv \overline{x_1} \& \overline{x_2}$$

$$x_1 \& x_2 \equiv \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}}$$

$$x_1 \vee x_2 \equiv \overline{\overline{x_1} \& \overline{x_2}}$$

x_1	x_2	$x_1 x_2$	$\overline{x_1 x_2}$	$\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

$$\overline{x_1 x_2 \dots x_n} \equiv \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \dots \vee \overline{x_n}$$

$$\overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \dots \vee \overline{x_n}} \equiv \overline{\overline{x_1}} \& \overline{\overline{x_2}} \& \dots \& \overline{\overline{x_n}}$$

Свойства операций конъюнкция и дизъюнкция

ж) Правила склеивания:

$$A \vee A \bar{x} \equiv A$$

$$(A \vee x)(A \vee \bar{x}) \equiv A$$

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Доказательство:

$$A \vee A \bar{x} \equiv A (x \vee \bar{x}) \equiv A \& 1 \equiv A$$

Пример: $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \equiv \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \equiv \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 (\bar{x}_4 \vee x_4) \equiv \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \cdot 1 \equiv \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \not\equiv \bar{x}_1 \bar{x}_2$$

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \equiv \bar{x}_1 \bar{x}_2 (\bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4) \not\equiv \bar{x}_1 \bar{x}_2 \cdot 1$$

Свойства операций конъюнкция и дизъюнкция

к) Правила поглощения:

$$A B \vee A \equiv A$$

$$(A \vee B) A \equiv A$$

Доказательство:

$$A B \vee A \equiv A (B \vee 1) \equiv A \& 1 \equiv A$$

Пример: $\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 x_6 \vee \bar{x}_1 x_4 \equiv \bar{x}_1 x_4$

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Правила склеивания и поглощения могут быть применены и в обратном направлении:

$$A \equiv A \vee A B$$

$$A \equiv A x \vee A \bar{x}$$

Свойства операций штрих Шеффера и стрелка Пирса

а) Коммутативный закон:

$$x_1 \mid x_2 \equiv x_2 \mid x_1$$

$$x_1 \downarrow x_2 \equiv x_2 \downarrow x_1$$

б) Несправедлив ассоциативный закон:

$$x_1 \mid (x_2 \mid x_3) \neq (x_1 \mid x_2) \mid x_3 \neq x_1 \mid x_2 \mid x_3$$

$$x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_3) \neq (x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3 \neq x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3$$

x_1	x_2	$x_1 \mid x_2$	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

с) Выражение операций штрих Шеффера и стрелка Пирса через операции конъюнкция, дизъюнкция и отрицание:

$$x_1 \mid x_2 \equiv \overline{x_1 x_2} \equiv \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$$

$$x_1 \downarrow x_2 \equiv \overline{x_1 \vee x_2} \equiv \overline{x_1} \overline{x_2}$$

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Свойства операций штрих Шеффера и стрелка Пирса

d) Выражение операций отрицание, конъюнкция и дизъюнкция через операцию штрих Шеффера

x_1	x_2	$x_1 \mid x_2$	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

$$\bar{x} \equiv x \mid x$$

x	$x \mid x$	\bar{x}
0	1	1
1	0	0

$$x_1 x_2 \equiv \overline{x_1 \mid x_2} \equiv \overline{x_1 \mid x_2} \equiv (x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2)$$

$$x_1 \vee x_2 \equiv \overline{\overline{x_1} \mid \overline{x_2}} \equiv \overline{\overline{x_1} \mid \overline{x_2}} \equiv (x_1 \mid x_1) \mid (x_2 \mid x_2)$$

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Одна операция штрих Шеффера образует базис.

$$x_1 x_2 \equiv (x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2)$$

$$x_1 \vee x_2 \equiv (x_1 \mid x_1) \mid (x_2 \mid x_2)$$

$$\bar{x} \equiv x \mid x$$

Аналогично эти операции можно выразить и через операцию стрелка Пирса. Одна операция стрелка Пирса образует базис.

Свойства операций штрих Шеффера и стрелка Пирса

Пример: Записать формулу

$$X_2 X_3 X_4 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_3 \vee X_1 \bar{X}_4$$

с помощью одной операции штрих Шеффера

$$x_1 \downarrow x_2 \equiv \overline{x_1 x_2} \equiv \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$$

$$x_1 \downarrow x_2 \equiv \overline{x_1 \vee x_2} \equiv \bar{x}_1 \bar{x}_2$$

$$\bar{x} \equiv x \downarrow x$$

$$x_1 x_2 \equiv (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$$

$$x_1 \vee x_2 \equiv (x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2)$$

$$a \vee b \vee c = \overline{\overline{a} \bar{b} \bar{c}}$$

$$X_2 X_3 X_4 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_3 \vee X_1 \bar{X}_4 \equiv \overline{\overline{X_2 X_3 X_4} \cdot \overline{\bar{X}_1 \bar{X}_3} \cdot \overline{X_1 \bar{X}_4}} \equiv$$

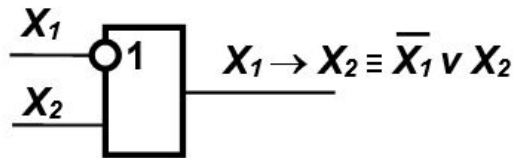
$$\equiv (X_2 \downarrow X_3 \downarrow X_4) \downarrow ((\bar{X}_1 \downarrow \bar{X}_3) \downarrow (X_1 \downarrow \bar{X}_4)) \equiv$$

$$\equiv (X_2 \downarrow X_3 \downarrow X_4) \downarrow (((X_1 \downarrow X_1) \downarrow (X_3 \downarrow X_3)) \downarrow (X_1 \downarrow (X_4 \downarrow X_4)))$$

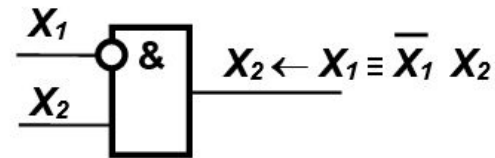
Свойства операций импликация и запрет

- a) Несправедлив коммутативный закон
- b) Несправедлив ассоциативный закон
- c) Выражение **операций импликация и запрет** через операции *конъюнкция, дизъюнкция и отрицание*:

$$\begin{aligned}x_1 \rightarrow x_2 &\equiv \bar{x}_1 \vee x_2 \equiv \overline{x_1 \bar{x}_2} \\x_2 \leftarrow x_1 &\equiv \bar{x}_1 x_2 \equiv \overline{x_1 \vee \bar{x}_2}\end{aligned}$$



Логический элемент
Импликатор



Логический элемент
Запрет

Свойства операций импликация и запрет

d) Выражение операций отрицание, конъюнкция и дизъюнкция через операцию импликация

$$\bar{x} \equiv x \rightarrow 0 \quad \text{доказательство: } x \rightarrow 0 \equiv \bar{x} \vee 0 \equiv \overline{x \cdot 1} \equiv \bar{x}$$

Операция импликация и константа 0 образуют базис:

$$\bar{x} \equiv x \rightarrow 0$$

$$x_1 x_2 \equiv \overline{x_1 \rightarrow \bar{x}_2} \equiv (x_1 \rightarrow \bar{x}_2) \rightarrow 0 \equiv (x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow 0)) \rightarrow 0$$

$$x_1 \vee x_2 \equiv \bar{x}_1 \rightarrow x_2 \equiv (x_1 \rightarrow 0) \rightarrow x_2$$

Аналогично эти операции можно выразить и через операцию запрет. Операция запрет и константа 1 образуют базис.

Свойства операций эквивалентность, сложение по модулю два и исключающее ИЛИ

a) Справедлив коммутативный закон

b) Справедлив ассоциативный закон (?)

c) Выражение операций эквивалентность, сложение по модулю два и исключающее ИЛИ через операции конъюнкция, дизъюнкция и отрицание:

$$x_1 \sim x_2 \equiv x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$$

$$x_1 \wedge x_2 \equiv x_1 \oplus x_2 \equiv x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$$

Полностью заданные функции

Если функция алгебры логики определена *на всех возможных наборах* значений ее аргументов, то она называется **полностью заданной**.

N	x_1	x_2	x_3	f_2
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

При синтезе цифровых устройств достаточно часто возникает ситуация, когда на каких-то наборах *значение функции не важно*, т.е. можно с равным успехом поставить 0 или 1 .

Частично заданные функции

Такие функции называются **не полностью определенными** или **частично заданными** функциями.

N	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	*
7	1	1	1	*

Наборы, на которых функция не определена, называются **запрещенными** наборами, а в таблице истинности на данных наборах ставится *символ* *.

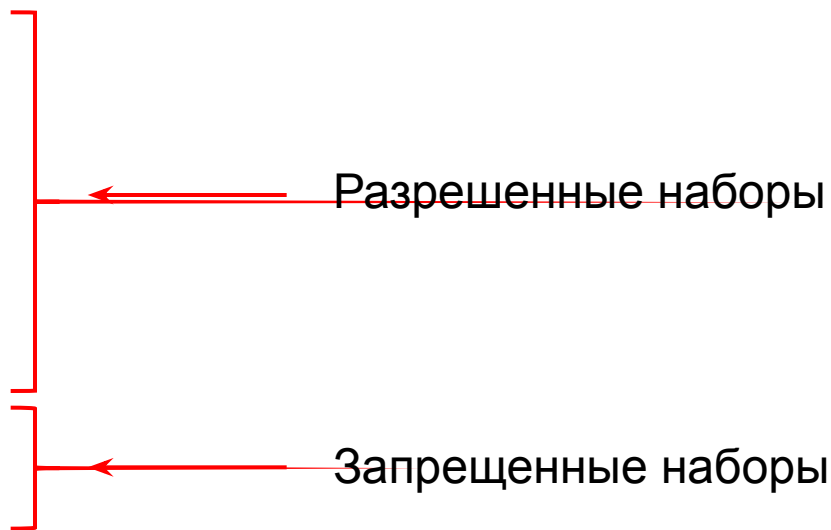
Это не какое-то третье состояние, это значит, что значение функции на данном наборе *неважно*, поэтому вместо * можно поставить и 0, и 1.

Частично заданные функции

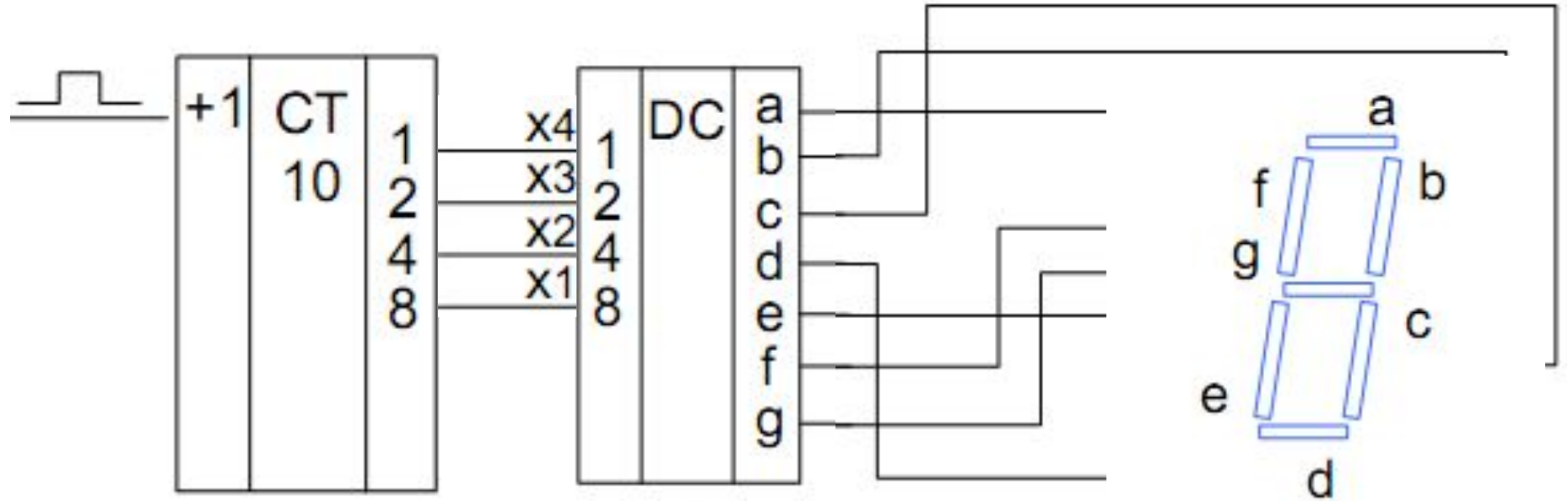
- В числовом задании для частично заданных функций отдельно указывают номера наборов, на которых функция не определена:

N	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	*
7	1	1	1	*

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv \bigvee_1 (1, 4, 5) \bigvee_* (6, 7)$$



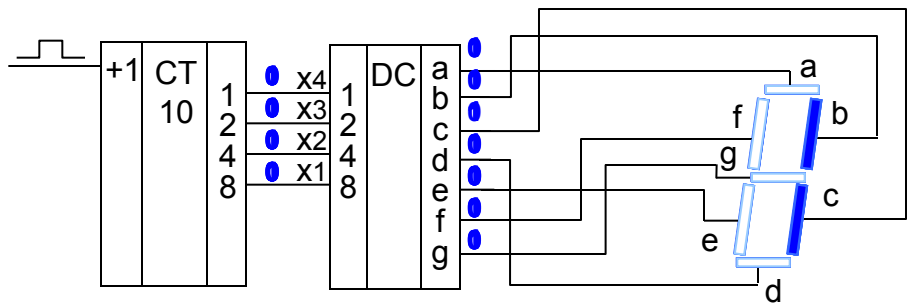
Пример



счетчик

дешифратор
для
7-сегментного
индикатора

7-сегментный
индикатор



счетчик

дешифратор
для
7-сегментного
индикатора

7-сегментный
индикатор

Таблица истинности для дешифратора

N	x1	x2	x3	x4	a	b	c	d	e	f	g
0	0	0	0	0	1		1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0		1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1		0	0	1	1	1
3	0	0	1	1	0		0	1	0	0	0
4	0	1	0	0	1		0	1	1	1	0
5	0	1	0	1	1		0	1	1	1	1
6	0	1	1	0	1		0	0	0	1	1
7	0	1	1	1	1		1	1	1	1	1
8	1	0	0	0	*		*	*	*	*	*
9	1	0	0	1	*		*	*	*	*	*
10	1	0	1	0	*		*	*	*	*	*
11	1	0	1	1	*		*	*	*	*	*
12	1	1	0	0	*		*	*	*	*	*
13	1	1	0	1	*		*	*	*	*	*

Наборы 10, 11, 12, 13, 14, 15
не должны появляться
на входах дешифратора

Частично заданные функции

Чтобы записать частично заданную функцию аналитически, ее нужно доопределить, т.е. вместо всех * поставить нули или единицы.

N	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	*
7	1	1	1	*

Если функция не определена на q наборах, ее можно доопределить 2^q способами.

Следовательно, из одной частично заданной функции можно получить 2^q полностью заданных функций.

*Аналитическая запись
функций алгебры логики
в базисе И, ИЛИ, НЕ*

Функционально полная система

Функционально полная система (базис) – набор некоторых операций (или даже всего одной), который позволяет записывать любую, сколь угодно сложную функцию алгебры логики.

Примеры базисов:

- дизъюнкция, конъюнкция и отрицание; (*основной базис*)
- импликация и константа 0;
- запрет и константа 1;
- штрих Шеффера;
- стрелка Пирса.

Минимальным базисом называется такой базис, для которого исключение хотя бы одной из составляющих его функций превращает данную систему функций в неполную.

Минимальный базис:

- дизъюнкция и отрицание;
- конъюнкция и отрицание;

Минимизация ФАЛ

Нахождение кратчайшей аналитической записи функции алгебры логики в некотором базисе называется **минимизацией**.

Лучше всего подходит основной базис:

дизъюнкция, конъюнкция и отрицание

Для записи произвольной функции, заданной с помощью таблицы истинности, используют так называемые *дизъюнктивные* и *конъюнктивные нормальные формы*.

Элементарная конъюнкция

Элементарной конъюнкцией, или **импликантой**, называется конъюнкция, состоящая из нескольких аргументов, причем каждый аргумент входит в нее не более одного раза.

$$\bar{X}_1 X_2 X_3, \quad X_1 \bar{X}_2 X_3, \quad X_1 X_2, \quad X_2 \bar{X}_3, \quad X_3$$

Рангом элементарной конъюнкции называется количество аргументов, входящих в эту конъюнкцию.

Минтерм

Элементарная конъюнкция, в которую входят все аргументы данной функции, называется элементарной конъюнкцией высшего ранга, или **минтермом**.

N	x_1	x_2	x_3	F_0	F_7
0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	1	1	0	0
4	1	0	0	0	0
5	1	0	1	0	0
6	1	1	0	0	0
7	1	1	1	0	1

Минтерм – это функция, которая равна 1 на одном наборе и 0 – на всех остальных.

Чтобы записать минтерм для i -того набора, нужно записать конъюнкцию всех аргументов функции, причем если аргумент входит в данный набор как 0, то он пишется с отрицанием, а если как 1 – без отрицания.

$$F_0 \equiv \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

$$F_7 \equiv x_1 x_2 x_3$$

Дизъюнктивные нормальные формы

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv x_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_4$$

ДНФ для функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, состоящая только из минтермов, называется **совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)**.

Минимальной ДНФ (МДНФ) называется ДНФ, содержащая наименьшее количество операций *дизъюнкция* и *конъюнкция* по сравнению с другими ДНФ данной функции.

Аналитическая запись ФАЛ

Чтобы записать функцию в СДНФ нужно выписать минтермы тех наборов, на которых функция равна 1, и объединить их знаками дизъюнкции.

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv \bigvee_1 (1, 4, 5, 7)$$

N	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

Аналитическая запись ФАЛ

Упрощение ДНФ может быть достигнуто за счет уменьшения числа входящих в ДНФ элементарных конъюнкций и за счет уменьшения ранга самих конъюнкций.

Ранг элементарных конъюнкций может быть уменьшен путем их попарного сравнения и склеивания.

$$A \times V A \bar{x} \equiv A$$

Самые короткие элементарные конъюнкции, возможные для данной функции, называются ***простыми импликантами***.

МДНФ должна состоять из *простых импликант*. У функции может быть несколько ДНФ, состоящих только из простых импликант.

ДНФ, в которую входят **все возможные** простые импликанты данной функции, называется ***сокращенной дизъюнктивной нормальной формой (СокрДНФ)***.

Аналитическая запись ФАЛ

Чтобы найти СокрДНФ, нужно в СДНФ провести **все возможные** склеивания.

Если из СокрДНФ выбрасывать лишние простые импликанты, можно получить новые ДНФ, состоящие тоже из простых импликант, но более короткие.

Тупиковой ДНФ (ТДНФ) называется ДНФ, состоящая из простых импликант, у которой при удалении из неё любой импликанты получаемая в результате ДНФ не является эквивалентной исходной.

Очевидно, что МДНФ функции является одной из её ТДНФ.

Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция, нескольких аргументов, причем каждый аргумент входит в нее не более одного раза.

$$\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4$$

$$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4$$

$$x_1 \vee x_3$$

$$\bar{x}_3$$

Рангом элементарной дизъюнкции называется количество аргументов, входящих в эту дизъюнкцию.

Макстерм

Элементарная дизъюнкция, куда входят все аргументы функции, называется **элементарной дизъюнкцией высшего ранга**, или **макстермом**.

N	x_1	x_2	x_3	Φ_0	Φ_7
0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1
2	0	1	0	1	1
3	0	1	1	1	1
4	1	0	0	1	1
5	1	0	1	1	1
6	1	1	0	1	1
7	1	1	1	1	0

Макстерм – это функция, которая равна 0 на одном наборе и 1 – на всех остальных.

Чтобы записать макстерм для i -того набора, нужно записать дизъюнкцию всех аргументов функции, причем если аргумент входит в данный набор как 1, то он пишется с отрицанием, а если как 0 – без отрицания.

$$\Phi_0 \equiv x_1 \vee x_2 \vee x_3$$

$$\Phi_7 \equiv \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$$

Конъюнктивные нормальные формы

КНФ

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций. У функции может быть несколько КНФ.

$$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee x_3)$$

КНФ для функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, состоящая только из макстермов, называется **совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)**.

Минимальной КНФ (МКНФ) называется КНФ, содержащая наименьшее количество операций *дизъюнкция* и *конъюнкция* по сравнению с другими КНФ данной функции. У функции может быть несколько МКНФ.

Аналитическая запись ФАЛ

Чтобы записать функцию в СКНФ нужно выписать макстермы тех наборов, на которых функция равна 0, и объединить их знаками конъюнкции.

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv \&(0, 2, 6)$$

N	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \& (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \& (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$$

Стратегия минимизации ФАЛ

МДНФ содержит наименьшее количество операций *дизъюнкция* и *конъюнкция* по сравнению с другими ДНФ данной функции. МДНФ должна состоять из *простых импликант*.

Чтобы найти все простые импликанты (т.е. сокращенную дизъюнктивную нормальную форму), нужно в СДНФ провести **все возможные** склеивания.

СДНФ \square СокрДНФ

Выбрасывая из СокрДНФ лишние простые импликанты, можно получить новые ДНФ, состоящие тоже из простых импликант, но более короткие (ТДНФ).

СокрДНФ \square ТДНФ

Выбирая из ТДНФ те, у которых наименьшее число операций, находим МДНФ.

ТДНФ \square МДНФ

Алгоритм метода Квайна

Алгоритм метода Квайна включает два этапа:

1. Нахождение всех простых импликант функции.
2. Составление таблицы Квайна и нахождение МДНФ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \bigvee_1 (0, 1, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15)$$

N	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$	$x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$	$x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\bar{x}_1 x_2 x_4$					✓			✓		
$x_2 x_3 x_4$								✓		✓
$x_1 x_2 x_3$									✓	✓
$\bar{x}_1 \bar{x}_3$	✓	✓	✓		✓					
$\bar{x}_3 \bar{x}_4$	✓		✓	✓			✓			
$x_1 \bar{x}_4$				✓		✓	✓		✓	

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv x_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_4$$

Синтез комбинационной схемы

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \bigvee_1 (0, 1, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15)$$

N	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$	$\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$
$\bar{x}_1 x_2 x_4$				√			√	
$x_2 x_3 x_4$							√	√
$x_1 x_2 x_3$							√	√
$\bar{x}_1 \bar{x}_3$	√	√	√		√			
$\bar{x}_3 \bar{x}_4$	√		√	√		√		
$x_1 \bar{x}_4$				√	√	√		√

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv x_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_4 \equiv \overline{\overline{x_2 x_3 x_4} \cdot \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_3} \cdot \overline{x_1 \bar{x}_4}}$$

