Аналитическая запись функций алгебры логики

Иерархия операций алгебры логики

Принцип суперпозиции позволяет использовать простые операции для построения других, более сложных функций.

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 \vee (x_2 \rightarrow x_3) \mid x_2$$

Порядок выполнения операций определяется **иерархией**:
1) операция отрицание;
2) операция конъюнкция;
3) операции дизъюнкция и сложение по модулю два;
4) все остальные операции.

Скобки применяют для изменения порядка выполнения операций.

Свойства операций алгебры логики

Свойства операции отрицание

а) Закон двойного отрицания:

$$x \equiv \overline{\overline{x}}$$

x	$\overline{x}$	$\overline{\overline{x}}$
0	1	0
1	0	1

b) Если $x \equiv y$, то $\overline{x} \equiv \overline{y}$

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$
0	0	1	1
1	1	0	0

Следствие: знак отрицания, стоящий над всем выражением, можно переносить в другую часть равносильности

Если $x \equiv \overline{y}$, то $\overline{x} \equiv y$

Свойства операций конъюнкция и дизъюнкция

а) Законы нулевого множества:

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

$x \vee 0 \equiv x$

$x \& 0 \equiv 0$

x_1	0	$x_1 \vee 0$
0	0	0
1	0	1

x_1	0	$x_1 \& 0$
0	0	0
1	0	0

b) Законы универсального множества:

$x \vee 1 \equiv 1$

$x \& 1 \equiv x$

Свойства операций конъюнкция и дизъюнкция

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

c) Законы идемпотентности:

$$x \vee x \equiv x$$

$$x \& x \equiv x$$

$$x \vee x \vee \ldots \vee x \equiv x$$

$$x \& x \& \ldots \& x \equiv x$$

d) Закон исключенного третьего:

$$x \vee \overline{x} \equiv 1$$

e) Закон логического противоречия:

$$x \& \overline{x} \equiv 0$$

Свойства операций конъюнкция и дизъюнкция

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

f) Коммутативные законы:

$$x_1 \vee x_2 \equiv x_2 \vee x_1$$
$$x_1 \& x_2 \equiv x_2 \& x_1$$

g) Ассоциативные законы:

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) \equiv (x_1 \vee x_2) \vee x_3 \equiv x_1 \vee x_2 \vee x_3$$
$$x_1(x_2 x_3) \equiv (x_1 x_2) x_3 \equiv x_1 x_2 x_3$$

x_1	x_2	x_3	$x_2 \vee x_3$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$	$(x_1 \vee x_2) \vee x_3$	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Свойства операций конъюнкция и дизъюнкция

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

h) Дистрибутивные законы

- конъюнкции относительно дизъюнкции:

$$x_1(x_2 \vee x_3) \equiv x_1x_2 \vee x_1x_3$$

x_1	x_2	x_3	$x_2 \vee x_3$	$x_1(x_2 \vee x_3)$	x_1x_2	x_1x_3	$x_1x_2 \vee x_1x_3$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Свойства операций конъюнкция и дизъюнкция

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

h) Дистрибутивные законы

- конъюнкции относительно дизъюнкции:

$$x_1(x_2 \vee x_3) \equiv x_1 x_2 \vee x_1 x_3$$

- дизъюнкции относительно конъюнкции:

$$x_1 \vee x_2 x_3 \equiv (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)$$

$$(A \vee B)(C \vee D) \equiv AC \vee AD \vee BC \vee BD$$

Свойства операций конъюнкция и дизъюнкция

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

i) Законы де Моргана:
Связь *конъюнкции* и *дизъюнкции* :

$$\overline{x_1 \& x_2} \equiv \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$$

$$\overline{x_1 \vee x_2} \equiv \overline{x_1} \& \overline{x_2}$$

$$x_1 \& x_2 \equiv \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}}$$

$$x_1 \vee x_2 \equiv \overline{\overline{x_1} \& \overline{x_2}}$$

x_1	x_2	$x_1 x_2$	$\overline{x_1 x_2}$	$\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

$$\overline{x_1 x_2 \ldots x_n} \equiv \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee \bar{x}_n$$

$$\overline{x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n} \equiv \bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \& \ldots \& \bar{x}_n$$

Свойства операций конъюнкция и дизъюнкция

j) Правила склеивания:

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

$$A\,x \vee A\,\bar{x} \equiv A$$

$$(A \vee x)(A \vee \bar{x}) \equiv A$$

Доказательство:

$$A\,x \vee A\,\bar{x} \equiv A\,(x \vee \bar{x}) \equiv A \,\&\, 1 \equiv A$$

Пример: $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 \equiv \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$

$$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 \equiv \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3(\bar{x}_4 \vee x_4) \equiv \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \cdot 1 \equiv \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

$$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 x_4 \not\equiv \bar{x}_1\bar{x}_2$$

$$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 x_4 \equiv \bar{x}_1\bar{x}_2(\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_3 x_4) \not\equiv \bar{x}_1\bar{x}_2 \cdot 1$$

Свойства операций конъюнкция и дизъюнкция

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

k) Правила поглощения:

$$A\,B \vee A \equiv A$$

$$(A \vee B)A \equiv A$$

Доказательство:

$$A\,B \vee A \equiv A\,(B \vee 1) \equiv A\,\&\,1 \equiv A$$

Пример: $\overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4\,\overline{x}_5\,x_6 \vee \overline{x_1}\,x_4 \equiv \overline{x_1}\,x_4$

Правила склеивания и поглощения могут быть применены и в обратном направлении:

$$A \equiv A \vee A\,B$$

$$A \equiv A\,x \vee A\,\overline{x}$$

Свойства операций штрих Шеффера и стрелка Пирса

a) Коммутативный закон:

$$x_1 \mid x_2 \equiv x_2 \mid x_1$$

$$x_1 \downarrow x_2 \equiv x_2 \downarrow x_1$$

b) Несправедлив ассоциативный закон:

$$x_1 \mid (x_2 \mid x_3) \not\equiv (x_1 \mid x_2) \mid x_3 \not\equiv x_1 \mid x_2 \mid x_3$$

$$x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_3) \not\equiv (x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3 \not\equiv x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3$$

x_1	x_2	$x_1 \mid x_2$	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

c) Выражение операций штрих Шеффера и стрелка Пирса через операции *конъюнкция*, *дизъюнкция* и *отрицание:*

$$x_1 \mid x_2 \equiv \overline{x_1 x_2} \equiv \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$$

$$x_1 \downarrow x_2 \equiv \overline{x_1 \vee x_2} \equiv \overline{x}_1 \overline{x}_2$$

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Свойства операций штрих Шеффера и стрелка Пирса

x_1	x_2	$x_1 \mid x_2$	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

d) Выражение операций *отрицание*, *конъюнкция* и *дизъюнкция* через операцию *штрих Шеффера*

$$\bar{x} \equiv x \mid x$$

x	$x \mid x$	$\bar{x}$
0	1	1
1	0	0

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

$$x_1 x_2 \equiv \overline{\overline{x_1 x_2}} \equiv \overline{x_1 \mid x_2} \equiv (x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2)$$

$$x_1 \vee x_2 \equiv \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \equiv \bar{x}_1 \mid \bar{x}_2 \equiv (x_1 \mid x_1) \mid (x_2 \mid x_2)$$

Одна операция *штрих Шеффера* образует базис.

$$x_1 x_2 \equiv (x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2)$$

$$x_1 \vee x_2 \equiv (x_1 \mid x_1) \mid (x_2 \mid x_2)$$

$$\bar{x} \equiv x \mid x$$

Аналогично эти операции можно выразить и через операцию стрелка Пирса. Одна операция стрелка Пирса образует базис.

Свойства операций штрих Шеффера и стрелка Пирса

Пример: Записать формулу

$$x_2 x_3 x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_4}$$

с помощью одной операции штрих Шеффера

$$x_1 \mid x_2 \equiv \overline{x_1 x_2} \equiv \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$$

$$x_1 \downarrow x_2 \equiv \overline{x_1 \vee x_2} \equiv \overline{x_1}\,\overline{x_2}$$

$$\overline{x} \equiv x \mid x$$

$$x_1 x_2 \equiv (x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2)$$

$$x_1 \vee x_2 \equiv (x_1 \mid x_1) \mid (x_2 \mid x_2)$$

$$a \vee b \vee c = \overline{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}}$$

$$x_2 x_3 x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_4} \equiv \overline{\overline{x_2 x_3 x_4} \cdot \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_3}} \cdot \overline{x_1 \overline{x_4}}} \equiv$$

$$\equiv (x_2 \mid x_3 \mid x_4) \mid (\overline{x_1} \mid \overline{x_3}) \mid (x_1 \mid \overline{x_4}) \equiv$$

$$\equiv (x_2 \mid x_3 \mid x_4) \mid ((x_1 \mid x_1) \mid (x_3 \mid x_3)) \mid (x_1 \mid (x_4 \mid x_4))$$

Свойства операций импликация и запрет

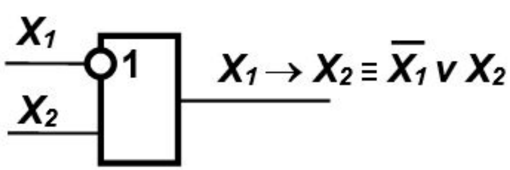
a) Несправедлив коммутативный закон

b) Несправедлив ассоциативный закон

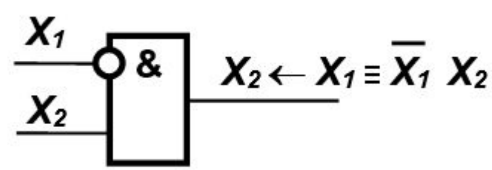
c) Выражение операций импликация и запрет через операции *конъюнкция*, *дизъюнкция* и *отрицание:*

$$x_1 \rightarrow x_2 \equiv \bar{x}_1 \vee x_2 \equiv \overline{x_1 \bar{x}_2}$$

$$x_2 \leftarrow x_1 \equiv \bar{x}_1 x_2 \equiv \overline{x_1 \vee \bar{x}_2}$$



Логический элемент
Импликатор



Логический элемент
Запрет

Свойства операций импликация и запрет

d) Выражение операций *отрицание*, *конъюнкция* и *дизъюнкция* через операцию импликация

$\bar{x} \equiv x \to 0$ доказательство: $x \to 0 \equiv \bar{x} \vee 0 \equiv \overline{x \cdot 1} \equiv \bar{x}$

Операция импликация и константа 0 образуют базис:

$$\bar{x} \equiv x \to 0$$

$$x_1 x_2 \equiv \overline{x_1 \to \bar{x}_2} \equiv (x_1 \to \bar{x}_2) \to 0 \equiv (x_1 \to (x_2 \to 0)) \to 0$$

$$x_1 \vee x_2 \equiv \bar{x}_1 \to x_2 \equiv (x_1 \to 0) \to x_2$$

Аналогично эти операции можно выразить и через операцию запрет. Операция запрет и константа 1 образуют базис.

Свойства операций эквивалентность, сложение по модулю два и исключающее ИЛИ

a) Справедлив коммутативный закон
b) Справедлив ассоциативный закон (?)

c) Выражение операций эквивалентность, сложение по модулю два и исключающее ИЛИ через операции *конъюнкция*, *дизъюнкция* и *отрицание:*

$$x_1 \sim x_2 \equiv x_1 x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}$$

$$x_1 \wedge x_2 \equiv x_1 \oplus x_2 \equiv x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_2$$

Полностью заданные функции

Если функция алгебры логики определена *на всех возможных наборах* значений ее аргументов, то она называется ***полностью заданной***.

N	x_1	x_2	x_3	f_2
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

При синтезе цифровых устройств достаточно часто возникает ситуация, когда на каких-то наборах *значение функции не важно*, т.е. можно с равным успехом поставить 0 или 1 .

Частично заданные функции

Такие функции называются ***не полностью определенные*** или ***частично заданные*** функции.

N	x_1	x_2	x_3	*f*
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	*
7	1	1	1	*

Наборы, на которых функция не определена, называются ***запрещенными*** наборами, а в таблице истинности на данных наборах ставится *символ* *****.

Это не какое-то третье состояние, это значит, что значение функции на данном наборе *неважно*, поэтому вместо * можно поставить и *0*, и *1*.

Частично заданные функции

- В числовом задании для частично заданных функций отдельно указывают номера наборов, на которых функция не определена:

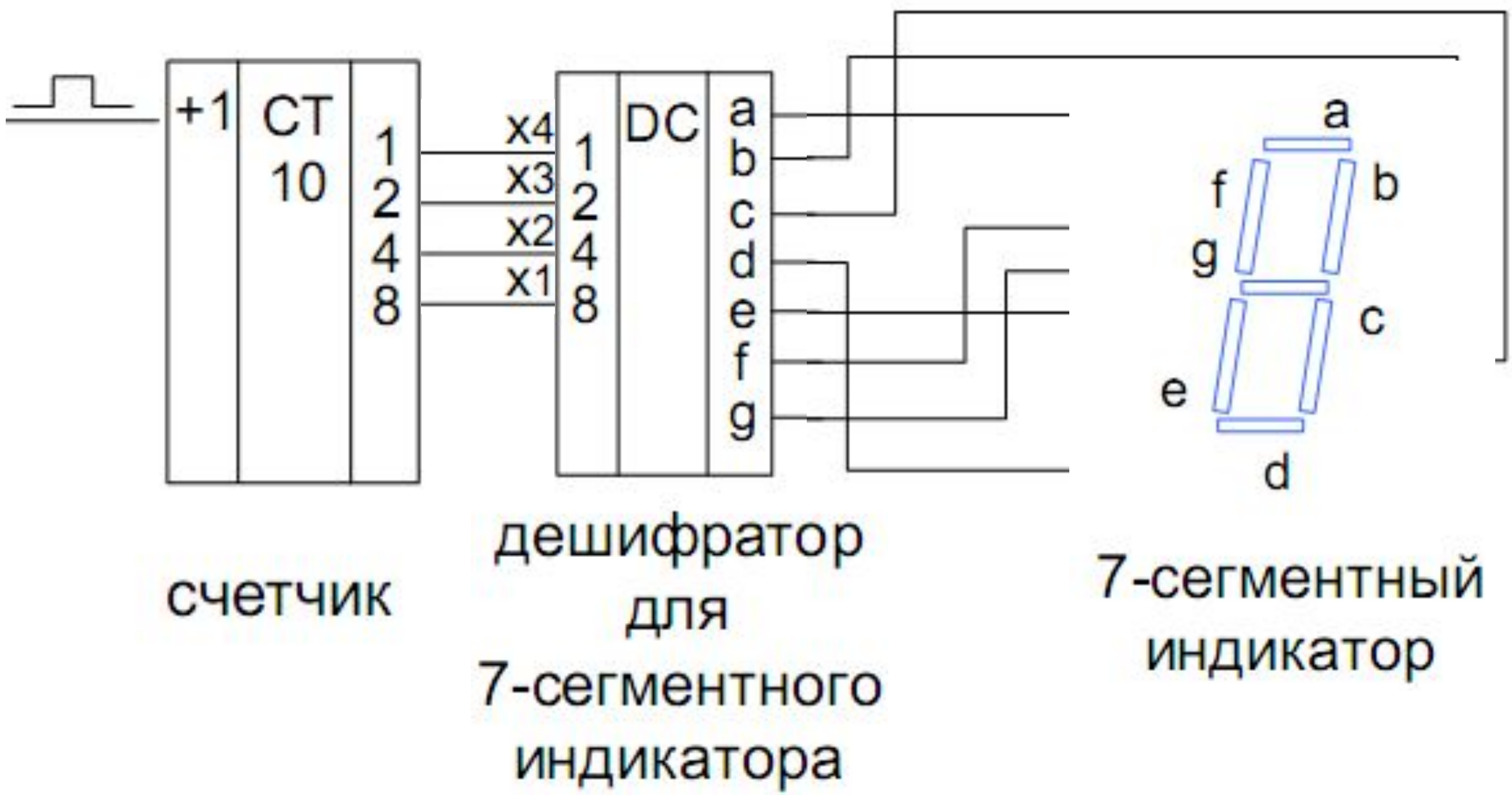
$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv \underset{1}{\vee}(1,4,5)\underset{*}{\vee}(6,7)$$

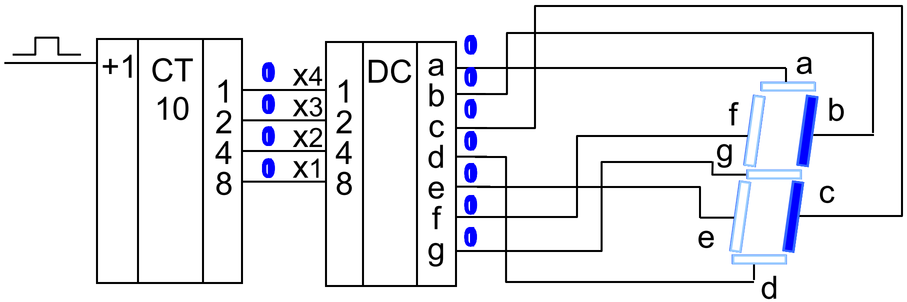
N	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	*
7	1	1	1	*

Разрешенные наборы

Запрещенные наборы

Пример


+1
CT
10
1
2
4
8
x4
x3
x2
x1
1
2
4
8
DC
a
b
c
d
e
f
g
a
b
f
g
c
e
d
счетчик
дешифратор для 7-сегментного индикатора
7-сегментный индикатор



счетчик

дешифратор
для
7-сегментного
индикатора

7-сегментный
индикатор

Таблица истинности для дешифратора

N	x1	x2	x3	x4	a	b	c	d	e	f	g
0	0	0	0	0	1		1	1		1	1
1	0	0	0	1	0		1	0 1		0	0
2	0	0	1	0	1		0 1	0		1	1
3	0	0	1	1	1		0 1	1		1	0
4	0	1	0	0	0		0 1	1		0	0
5	0	1	0	1	1		0 1	1		1	0
6	0	1	1	0	1		0 1	1		1	1
7	0	1	1	1	1		1	1		0	0
8	1	0	0	0	1		0 1	0 1		1	1
9	1	0	0	1	1		1	1		1	0
10	1	0	1	0	*		1 *	1 *		*	*
11	1	0	1	1	*		*	*		*	*
12	1	1	0	0	*		*	*		*	*
13	1	1	0	1	*		*	*		*	*
					*		*	*		*	*
					*		*	*		*	*
							*	*			

Наборы 10, 11, 12, 13, 14, 15
не должны появляться
на входах дешифратора

Частично заданные функции

Чтобы записать частично заданную функцию аналитически, ее нужно доопределить, т.е. вместо всех * поставить нули или единицы.

N	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	*
7	1	1	1	*

Если функция не определена на q наборах, ее можно доопределить 2^q способами.

Следовательно, из одной частично заданной функции можно получить 2^q полностью заданных функций.

Аналитическая запись функций алгебры логики в базисе И, ИЛИ, НЕ

Функционально полная система

Функционально полная система (базис) – набор некоторых операций (или даже всего одной), который позволяет записывать любую, сколь угодно сложную функцию алгебры логики.

Примеры базисов:

– дизъюнкция, конъюнкция и отрицание; (*основной базис*)
– импликация и константа 0;
– запрет и константа 1;
– штрих Шеффера;
– стрелка Пирса.

Минимальным базисом называется такой базис, для которого исключение хотя бы одной из составляющих его функций превращает данную систему функций в неполную.

Минимальный базис:

– дизъюнкция и отрицание;
– конъюнкция и отрицание;

Минимизация ФАЛ

Нахождение кратчайшей аналитической записи функции алгебры логики в некотором базисе называется **минимизацией**.

Лучше всего подходит основной базис:

дизъюнкция, конъюнкция и отрицание

Для записи произвольной функции, заданной с помощью таблицы истинности, используют так называемые *дизъюнктивные* и *конъюнктивные нормальные формы*.

Элементарная конъюнкция

Элементарной конъюнкцией, или ***импликантой***, называется конъюнкция, состоящая из нескольких аргументов, причем каждый аргумент входит в нее не более одного раза.

$$\overline{x}_1 x_2 x_3, \quad x_1 \overline{x}_2 x_3, \quad x_1 x_2, \quad x_2 \overline{x}_3, \quad x_3$$

Рангом элементарной конъюнкции называется количество аргументов, входящих в эту конъюнкцию.

Минтерм

Элементарная конъюнкция, в которую входят все аргументы данной функции, называется элементарной конъюнкцией высшего ранга, или ***минтермом***.

N	x_1	x_2	x_3	F_0	F_7
0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	1	1	0	0
4	1	0	0	0	0
5	1	0	1	0	0
6	1	1	0	0	0
7	1	1	1	0	1

Минтерм – это функция, которая равна 1 на одном наборе и 0 – на всех остальных.

Чтобы записать минтерм для i-того набора, нужно записать конъюнкцию всех аргументов функции, причем если аргумент входит в данный набор как 0, то он пишется с отрицанием, а если как 1 – без отрицания.

$$F_0 \equiv \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$$

$$F_7 \equiv x_1 x_2 x_3$$

Дизъюнктивные нормальные формы

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv x_2 x_3 x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_4}$$

ДНФ для функции $f(x_1\ x_2 \ldots x_n)$, состоящая только из минтермов, называется ***совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)***.

Минимальной ДНФ (МДНФ) называется ДНФ, содержащая наименьшее количество операций *дизъюнкция* и *конъюнкция* по сравнению с другими ДНФ данной функции.

Аналитическая запись ФАЛ

Чтобы записать функцию в СДНФ нужно выписать минтермы тех наборов, на которых функция равна 1, и объединить их знаками дизъюнкции.

$$f(x_1,x_2,x_3) \equiv \underset{1}{\vee}(1,4,5,7)$$

N	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$$f(x_1,x_2,x_3) \equiv \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}\,x_3 \vee x_1x_2x_3$$

Аналитическая запись ФАЛ

Упрощение ДНФ может быть достигнуто за счет уменьшения числа входящих в ДНФ элементарных конъюнкций и за счет уменьшения ранга самих конъюнкций.

Ранг элементарных конъюнкций может быть уменьшен путем их попарного сравнения и склеивания.

$$A x \vee A \bar{x} \equiv A$$

Самые короткие элементарные конъюнкции, возможные для данной функции, называются ***простыми импликантами***.

МДНФ должна состоять из *простых импликант*. У функции может быть несколько ДНФ, состоящих только из простых импликант.

ДНФ, в которую входят **все возможные** простые импликанты данной функции, называется ***сокращенной дизъюнктивной нормальной формой (СокрДНФ)***.

Аналитическая запись ФАЛ

Чтобы найти СокрДНФ, нужно в СДНФ провести **все возможные** склеивания.

Если из СокрДНФ выбрасывать лишние простые импликанты, можно получить новые ДНФ, состоящие тоже из простых импликант, но более короткие.

Тупиковой ДНФ (ТДНФ) называется ДНФ, состоящая из простых импликант, у которой при удалении из неё любой импликанты получаемая в результате ДНФ не является эквивалентной исходной.

Очевидно, что МДНФ функции является одной из её ТДНФ.

Элементарная дизъюнкция

Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция, нескольких аргументов, причем каждый аргумент входит в нее не более одного раза.

$\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}$ $\quad$ $\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4$ $\quad$ $x_1 \vee x_3$ $\quad$ $\overline{x_3}$

Рангом элементарной дизъюнкции называется количество аргументов, входящих в эту дизъюнкцию.

Макстерм

Элементарная дизъюнкция, куда входят все аргументы функции, называется **элементарной дизъюнкцией высшего ранга**, или ***макстермом***.

N	x_1	x_2	x_3	$Ф_0$	$Ф_7$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1
2	0	1	0	1	1
3	0	1	1	1	1
4	1	0	0	1	1
5	1	0	1	1	1
6	1	1	0	1	1
7	1	1	1	1	0

Макстерм – это функция, которая равна 0 на одном наборе и 1 – на всех остальных.

Чтобы записать макстерм для i-того набора, нужно записать дизъюнкцию всех аргументов функции, причем если аргумент входит в данный набор как 1, то он пишется с отрицанием, а если как 0 – без отрицания.

$$Ф_0 \equiv x_1 \vee x_2 \vee x_3$$

$$Ф_7 \equiv \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$

Конъюнктивные нормальные формы

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций. У функции может быть несколько КНФ.

$$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \cdot (x_1 \vee x_3)$$

КНФ для функции $f(x_1\ x_2 \ldots x_n)$, состоящая только из макстермов, называется ***совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)***.

Минимальной КНФ (МКНФ) называется КНФ, содержащая наименьшее количество операций *дизъюнкция* и *конъюнкция* по сравнению с другими КНФ данной функции. У функции может быть несколько МКНФ.

Аналитическая запись ФАЛ

Чтобы записать функцию в СКНФ нужно выписать макстермы тех наборов, на которых функция равна 0, и объединить их знаками конъюнкции.

$$f(x_1,x_2,x_3) \equiv \underset{0}{\&}(0,2,6)$$

N	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$$f(x_1,x_2,x_3) \equiv (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\&(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)\&(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$$

Стратегия минимизации ФАЛ

МДНФ содержит наименьшее количество операций *дизъюнкция* и *конъюнкция* по сравнению с другими ДНФ данной функции. МДНФ должна состоять из *простых импликант*.

Чтобы найти все простые импликанты (т.е. сокращенную дизъюнктивную нормальную форму), нужно в СДНФ провести **все возможные** склеивания.

СДНФ □ *СокрДНФ*

Выбрасывая из СокрДНФ лишние простые импликанты, можно получить новые ДНФ, состоящие тоже из простых импликант, но более короткие (ТДНФ).

СокрДНФ □ *ТДНФ*

Выбирая из ТДНФ те, у которых наименьшее число операций, находим МДНФ.

ТДНФ □ *МДНФ*

Алгоритм метода Квайна

Алгоритм метода Квайна включает два этапа:

1. Нахождение всех простых импликант функции.
2. Составление таблицы Квайна и нахождение МДНФ

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) \equiv \bigvee_1(0,1,4,5,7,8,10,12,14,15)$$

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3\bar{x}_4$	$x_1x_2x_3x_4$
$\bar{x}_1x_2x_4$					V			V		
$x_2x_3x_4$								V		V
$x_1x_2x_3$									V	V
$\bar{x}_1\bar{x}_3$	V	V	V		V					
$\bar{x}_3\bar{x}_4$	V		V	V			V			
$x_1\bar{x}_4$				V		V	V		V	

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) \equiv x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_4$$

Синтез комбинационной схемы

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) \equiv \underset{1}{\vee}(0,1,4,5,7,8,10,12,14,15)$

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3\bar{x}_4$	$x_1x_2x_3x_4$
$\bar{x}_1x_2x_4$					√			√		
$x_2x_3x_4$								√		√
$x_1x_2x_3$									√	√
$\bar{x}_1\bar{x}_3$	√	√	√		√					
$\bar{x}_3\bar{x}_4$	√		√	√			√			
$x_1\bar{x}_4$				√		√	√		√	

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) \equiv x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_4 \equiv \overline{\overline{x_2x_3x_4} \cdot \overline{\bar{x}_1\bar{x}_3} \cdot \overline{x_1\bar{x}_4}}$$