

Элементы нелинейного функционального анализа

Глава 1. Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах

§ 6. Дифференцируемость по Фреше отображения, имеющего непрерывную производную Гато

Пусть E и F – линейные нормированные пространства, U – открытое множество в E , $x_0 \in U$. Рассмотрим отображение $f: U \rightarrow F$.

Теорема. Пусть отображение $f: U \rightarrow F$ дифференцируемо по Гато в некоторой окрестности точки x_0 , причем производная Гато непрерывна в точке x_0 (как операторное отображение $x \mapsto f'_G(x)$). Тогда отображение f дифференцируемо по Фреше в точке x_0 и $f'(x_0) = f'_G(x_0)$.

(Без доказательства)

§8. Функционал и его градиент

Определение. Если значениями отображения являются числа, то отображение называется *функционалом*.

Рассмотрим гладкий функционал V на банаховом пространстве E . Предположим, что E непрерывно вложено в банахово пространство F , F непрерывно вложено в гильбертово пространство H и E плотно в H .

Замечание 1. Говорят, что банахово пространство E непрерывно вложено в банахово пространство F , если:

- 1) E является подмножеством F ;
- 2) из сходимости последовательности $\{x_n\} \subset E$ по норме пространства E следует сходимость этой последовательности по норме пространства F .

Замечание 2. Говорят, что пространство E плотно в пространстве H , если замыкание E по норме H совпадает с H , то есть для любой точки $a \in H$ существует последовательность $\{x_n\} \subset E$, сходящаяся к a по норме H .

Предположим также, что задано отображение $f : E \rightarrow F$, такое, что

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h = \langle f(x), h \rangle \quad \forall x \in E, \forall h \in E$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в ГП H).

Отображение $f : E \rightarrow F$ называется *градиентом* функционала V и обозначается $\text{grad}V$.

В этом случае говорят, что функционал V обладает *градиентной реализацией* в тройке пространств $\{E, F, H\}$.

Определение. Точка $x_0 \in E$ называется *критической точкой* функционала V , если

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0)h = \langle f(x_0), h \rangle = 0$$

для любого $h \in E$.

Лемма. Точка $x_0 \in E$ является критической точкой функционала тогда и только тогда, когда $f'(x_0) = 0$.

Доказательство.

Достаточность очевидна.

Необходимость. Если x_0 — критическая точка функционала V , то $\langle f'(x_0), h \rangle = 0$ при всех $h \in E$.

В силу плотности E в H , существует последовательность $\{h_n\} \subset E$, сходящаяся к $f'(x_0) \in F$ по норме H .

Учитывая, что $\langle f(x_0), h_n \rangle = 0$ при любом n , и используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получим:

$$\begin{aligned}\|f(x_0)\|_H^2 &= \langle f(x_0), f(x_0) \rangle = |\langle f(x_0), f(x_0) \rangle - \langle f(x_0), h_n \rangle| = \\ &= |\langle f(x_0), f(x_0) - h_n \rangle| \leq \|f(x_0)\|_H \cdot \|f(x_0) - h_n\|_H \rightarrow 0\end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$.

Так как число $\|f(x_0)\|_H^2$ от n не зависит, то

$$\|f(x_0)\|_H^2 = 0. \text{ Таким образом, } f(x_0) = 0.$$

Лемма доказана.

§ 9. Вычисление градиентов некоторых функционалов

Во всех рассматриваемых ниже примерах $H = L_2[0,1]$, E , F – вещественные банаховы линейные пространства, E линейно и непрерывно вложено в F , F линейно и непрерывно вложено в H .

Пример 1. Рассмотрим функционал

$$V(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle = \frac{1}{2} \int_0^1 (Ax)x dt,$$

где $x \in E$, $A: E \rightarrow F$ – симметрический линейный непрерывный оператор (оператор называется симметрическим, если $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in E$).

Вычислим градиент функционала V .

Рассмотрим приращение функционала V :

$$\begin{aligned} V(x+h) - V(x) &= \frac{1}{2} \langle A(x+h), x+h \rangle - \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle Ax, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, x \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle. \end{aligned}$$

Рассмотрим приращение функционала V :

$$\begin{aligned} V(x+h) - V(x) &= \frac{1}{2} \langle A(x+h), x+h \rangle - \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle Ax, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, x \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle. \end{aligned}$$

В силу симметричности оператора A ,
 $\langle Ah, x \rangle = \langle h, Ax \rangle = \langle Ax, h \rangle$.

Следовательно, $V(x+h) - V(x) = \langle Ax, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle$.

Таким образом, $\text{grad}V(x) = Ax$, если $\langle Ah, h \rangle = o(\|h\|_E)$.

Используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получим: $|\langle Ah, h \rangle| \leq \|Ah\|_H \cdot \|h\|_H$.

Следовательно, $\frac{|\langle Ah, h \rangle|}{\|h\|_E} \leq \|Ah\|_H \cdot \frac{\|h\|_H}{\|h\|_E} \leq k_1 \cdot k_2 \cdot \|Ah\|_H \leq$

$\leq k_1 \cdot k_2 \cdot k_2 \cdot \|Ah\|_F \leq k_1 \cdot k_2^2 \cdot \|A\| \cdot \|h\|_E \rightarrow 0$ при $\|h\|_E \rightarrow 0$,

так как $\|h\|_F \leq k_1 \|h\|_E$, $\|h\|_H \leq k_2 \|h\|_F$

(в силу непрерывности вложений E в F и F в H).

Итак, $\langle Ah, h \rangle = o(\|h\|_E)$.

Следовательно, $\text{grad } V(x) = Ax$.

Пример 2. Рассмотрим функционал

$$V(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{x}^2 dt,$$

заданный на БП $E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$, которое непрерывно вложено в БП $F = C[0,1]$; пространство F непрерывно вложено в ГП $H = L_2[0,1]$;

$$\|x\|_E = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\dot{x}(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\ddot{x}(t)|, \quad \|x\|_F = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|,$$

$$\|x\|_H^2 = \int_0^1 x^2(t) dt, \quad \langle x, y \rangle_H = \int_0^1 x(t) y(t) dt.$$

Вычислим $\text{grad } V(x)$.

Используя равенство $\dot{x}\dot{x} + \ddot{x}x = (\dot{x}x)'$, получим:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\dot{x}x)' dt - \frac{1}{2} \int_0^1 \ddot{x}x dt = (\dot{x}x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \ddot{x}x dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d^2x}{dt^2} x dt = \frac{1}{2} \left\langle -\frac{d^2}{dt^2} x, x \right\rangle. \end{aligned}$$

Обозначим $-\frac{d^2}{dt^2} = A$.

Сравним нормы пространств E , F и $H = L_2[0,1]$.

$$1) \quad \|x\|_H^2 = \int_0^1 x^2(t) dt \leq \int_0^1 \left(\max_{t \in [0,1]} |x(t)| \right)^2 dt = \int_0^1 \|x\|_F^2 dt = \|x\|_F^2,$$

следовательно, $\|x\|_H \leq \|x\|_F$.

2) Очевидно, что $\|x\|_F \leq \|x\|_E$.

Из полученных неравенств вытекает непрерывность вложений E в F и F в H .

Нетрудно проверить симметричность оператора A (проверьте самостоятельно!).

Таким образом, этот пример является частным случаем примера 1.

Следовательно, $f(x) = \text{grad } V(x) = Ax = -\frac{d^2}{dt^2}x$ и

$$f'(x) = -\frac{d^2}{dt^2}.$$

Пример 3. Рассмотрим функционал

$$V(x) = \int_0^1 \varphi(x(t)) dt,$$

заданный на БП $E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$, где φ – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная на \mathbb{R}^1 . Пространство E непрерывно вложено в БП $F = C[0,1]$; пространство F непрерывно вложено в ГП $H = L_2[0,1]$;

$$\|x\|_E = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\dot{x}(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\ddot{x}(t)|, \quad \|x\|_F = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|,$$

$$\|x\|_H^2 = \int_0^1 x^2(t) dt, \quad \langle x, y \rangle_H = \int_0^1 x(t) y(t) dt.$$

Вычислим $\text{grad } V$ в некоторой точке $a \in E$.

Воспользуемся формулой Тейлора в форме

Лагранжа:

$$\varphi(a+h) = P_n(a) + r_n(a),$$

где
$$P_n(a) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!} \cdot h^k,$$

$$r_n(a) = \frac{\varphi^{(n+1)}(a + \theta h)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1}, \quad \theta \in (0,1),$$

считая, что a и h – значения функций $a(t)$ и $h(t)$ при некотором $t \in [0,1]$ (число θ зависит от значения $h(t)$).

При $n = 1$ получим:

$$\varphi(a + h) = \varphi(a) + \varphi'(a)h + r_1(a), \quad (1)$$

где

$$r_1(a) = \frac{\varphi''(a + \theta h)}{2} \cdot h^2. \quad (2)$$

Рассмотрим приращение функционала V (с учетом (1) и (2)) :

$$\begin{aligned} V(a+h) - V(a) &= \int_0^1 \varphi(a+h) dt - \int_0^1 \varphi(a) dt = \\ &= \int_0^1 (\varphi(a+h) - \varphi(a)) dt = \int_0^1 (\varphi'(a(t))h(t) + r_1(a(t))) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(a+h) - V(a) &= \int_0^1 \varphi(a+h) dt - \int_0^1 \varphi(a) dt = \\
&= \int_0^1 (\varphi(a+h) - \varphi(a)) dt = \int_0^1 (\varphi'(a(t))h(t) + r_1(a(t))) dt = \\
&= \int_0^1 \varphi'(a(t))h(t) dt + \int_0^1 r_1(a(t)) dt = \langle \varphi'(a), h \rangle_H + \int_0^1 r_1(a(t)) dt.
\end{aligned}$$

Докажем, что $\int_0^1 r_1(a(t)) dt = o(\|h\|_E)$. Тогда, очевидно,

$$\text{grad } V(a) = \varphi'(a).$$

Итак, поскольку $\|h\|_E \rightarrow 0$, можно считать, что $\|h\|_E \leq 1$.

Тогда получаем следующую оценку (при $\forall \theta \in (0,1)$, $\forall t \in [0,1]$):

$$\begin{aligned} |a(t) + \theta \cdot h(t)| &\leq |a(t)| + |\theta| \cdot |h(t)| \leq |a(t)| + |h(t)| \leq \\ &\leq \|a\|_E + \|h\|_E \leq \|a\|_E + 1. \end{aligned}$$

Следовательно, значения функции $a(t) + \theta \cdot h(t)$, где $h(t)$ – достаточно малая (по норме) добавка, при $\forall t \in [0,1]$ и $\forall \theta \in (0,1)$ можно считать заключёнными в некотором отрезке $[-c, c]$.

Функция φ'' непрерывна на \mathbb{R}^1 и, следовательно, ограничена на любом отрезке, поэтому существует такая константа k , что $|\varphi''(x)| \leq k$ для любого $x \in [-c, c]$. Отсюда следует, что $|\varphi''(a(t) + \theta h(t))| \leq k \quad \forall \theta \in (0, 1), \forall t \in [0, 1]$.

Используя последнее неравенство и равенство (2), установим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 r_1(a(t)) dt \right| &\leq \int_0^1 |r_1(a(t))| dt = \int_0^1 \left| \frac{\varphi''(a + \theta h)}{2} \cdot h^2 \right| dt \leq \frac{k}{2} \int_0^1 h^2(t) dt \leq \\ &\leq \frac{k}{2} \int_0^1 \left(\max_{t \in [0, 1]} |h(t)| \right)^2 dt = \frac{k}{2} \|h\|_F^2 \leq \frac{k}{2} \|h\|_E^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 r_1(a(t)) dt \right| &\leq \int_0^1 |r_1(a(t))| dt = \int_0^1 \left| \frac{\varphi''(a + \theta h)}{2} \cdot h^2 \right| dt \leq \frac{k}{2} \int_0^1 h^2(t) dt \leq \\ &\leq \frac{k}{2} \int_0^1 \left(\max_{t \in [0,1]} |h(t)| \right)^2 dt = \frac{k}{2} \|h\|_F^2 \leq \frac{k}{2} \|h\|_E^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\left| \int_0^1 r_1(a(t)) dt \right|}{\|h\|_E} \leq \frac{k}{2} \cdot \|h\|_E \rightarrow 0 \text{ при } \|h\|_E \rightarrow 0,$$

то есть $\int_0^1 r_1(a(t)) dt = o(\|h\|_E)$.

Следовательно, $\text{grad } V(a) = \varphi'(a)$.

Пример 4. Рассмотрим функционал

$$V(x) = \int_0^1 \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\lambda x}{2} + \frac{x^4}{4} \right) dt,$$

где $E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$, $F = C[0,1]$, $H = L_2[0,1]$,

λ – параметр, $\lambda \in \mathbb{R}^1$.

Представим функционал в виде суммы

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) + V_3(x),$$

где $V_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{x}^2 dt$, $V_2(x) = \int_0^1 \frac{\lambda x}{2} dt$, $V_3(x) = \int_0^1 \frac{x^4}{4} dt$.

Очевидно, что

$$f(x) = \text{grad}V(x) = \sum_{i=1}^3 \text{grad}V_i(x) = -\frac{d^2}{dt^2}x + \frac{\lambda}{2} + x^3$$

(см. примеры 2 и 3).

Задача 9.1. Пусть φ – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная на \mathbb{R}^1 .

Отображение f действует из БП $E = C^2[0,1]$ в БП $F = C[0,1]$:

$$f(x)(t) = \varphi(x(t)), \quad x \in E, \quad t \in [0,1].$$

Найдите производную Фреше отображения f .

§ 10. Производные высших порядков

Рассмотрим отображение $f: U \rightarrow F$ (E, F – ЛНП-ва, U – открытое множество в E). Пусть для любой точки $x \in U$ существует производная Фреше $f'(x): E \rightarrow F$, то есть определено операторное отображение $f': U \rightarrow L(E, F)$ (f действует из U в ЛНП $F_1 = L(E, F)$ и переводит $x \in U$ в ЛОО $f'(x)$, являющийся элементом пространства F_1).

Предположим, что отображение $f' : U \rightarrow F_1$ также дифференцируемо по Фреше на множестве U , то есть для любой точки $x \in U$ существует производная Фреше $(f')'(x) : E \rightarrow F_1$. ЛОО $(f')'(x)$ называется **второй производной** отображения f (в точке x) и обозначается $f''(x)$.

Рассмотрим операторное отображение $f'' : U \rightarrow L(E, F_1)$, переводящее $x \in U$ в ЛОО $f''(x)$, являющийся элементом пространства $F_2 = L(E, F_1)$. Если отображение f'' дифференцируемо по Фреше на множестве U , то для любой точки $x \in U$ определен ЛОО $f'''(x) = (f'')'(x)$, называемый **третьей производной** отображения f (в точке x).

Очевидно, что оператор $f'''(x)$ является элементом пространства

$$F_3 = L(E, F_2) = L(E, L(E, F_1)) = L(E, L(E, L(E, F))).$$

Итак, можно определить производную любого порядка: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

§ 11. Вторая производная как билинейное отображение

1. Билинейные отображения.

Пусть E и F — ЛНП-ва, $B: E \times E \rightarrow F$ — отображение.
(вещное)

Опр. 1. Отобр-е B называется билинейным, если

$\forall h, k, h_1, h_2, k_1, k_2 \in E$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$1) B(\alpha h_1 + \beta h_2, k) = \alpha \cdot B(h_1, k) + \beta \cdot B(h_2, k),$$

$$2) B(h, \alpha k_1 + \beta k_2) = \alpha \cdot B(h, k_1) + \beta \cdot B(h, k_2).$$

Опр. 2. Билинейное от-е B называется симметричным,

если $\forall h, k \in E \quad B(h, k) = B(k, h).$

2. Производная второго порядка.

Пусть E и F — ЛНП-ва (вещные), U — открытое множество в E , $f: U \rightarrow F$ — отображение.

Пусть отображение f дважды непрерывно дифференцируемо (по Фреше) на множестве U , т.е. $\forall x \in U$

существуют $f'(x)$ и $f''(x)$, причем $f''(x)$ непрерывна по x на U как операторное отображение

$f'': U \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$.

Рассмотрим отображение $B: E \times E \rightarrow F$,
 $B(h, k) = [f''(x)h]k = [Ah]k$, где $A = f''(x): E \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$

— ЛОО, элемент $x \in U$ — фиксирован.

Проверим условия 1) и 2) из опр. 1.

$$\begin{aligned}
 1) \quad B(\alpha h_1 + \beta h_2, k) &= \underbrace{[A(\alpha h_1 + \beta h_2)]}_{\text{100}} k = [\alpha \cdot \underbrace{Ah_1}_{\substack{\text{100} \\ (\text{из } E \text{ и } F)}} + \beta \cdot \underbrace{Ah_2}_{\text{100}}] k = \\
 &= [\alpha \cdot Ah_1] k + [\beta \cdot Ah_2] k = \\
 &= \alpha \cdot [Ah_1] \cdot k + \beta \cdot [Ah_2] k = \alpha \cdot B(h_1, k) + \beta \cdot B(h_2, k).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad B(h, \alpha k_1 + \beta k_2) &= \underbrace{[Ah]}_{\substack{\text{100 из } E \text{ и } F}} (\alpha k_1 + \beta k_2) = \\
 &= \alpha \cdot [Ah] k_1 + \beta \cdot [Ah] k_2 = \alpha \cdot B(h, k_1) + \beta \cdot B(h, k_2).
 \end{aligned}$$

Итак, $B(h, k) = [Ah]k$ — билинейное отображение.

Положим, что $B(h, k)$ — симметричное дил. от-е.
Зафиксируем произвольные $h, k \in E$ и рассмотрим $l \in F^*$ (нока произвольный).

Рассмотрим функцию $\varphi(t, s) = l[f(x + th + sk)]$,
 $t, s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^1$. Вычислим частные производные
функции φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, s) = l[f'(x + th + sk)h]$$

$$(l'(y) = l, \text{ т.к. } l - \text{лин. ф-л}; (x + th + sk)'_t = h);$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(t, s) = \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, s) \right] = l[(f''(x + th + sk)k)h];$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(t, s) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial s}(t, s) \right] = l[(f''(x + th + sk)h)k].$$

Пр-е $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(t, s)$ и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(t, s)$ непрерывны (как

композиция непрерывных отображений) \Rightarrow

Стр-е $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(t, s)$ и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(t, s)$ непрерывны (как композиции непрерывных отображений) \Rightarrow
 \Rightarrow эти производные равны (по теореме о маб. анализа).

Тогда при $t = s = 0$ имеем:

$$\mathcal{L}[(f''(x)k)h] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(0, 0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(0, 0) = \mathcal{L}[(f''(x)h)k] (*)$$

а) точным вид ф-ла ℓ .

Следствие из теоремы Хаана-Банаха:

для любого $y \in F$ ($y \neq \theta$) \exists л.о.ф. $\ell \in F^*$:

1) $\ell(y) = \|y\|$ и 2) $\|\ell\| = 1$.

Пусть $y = (f''(x)k)h - (f''(x)h)k \in F$. $\Pi: y \neq \theta$.

Тогда из (*) $\Rightarrow \|y\| = \ell(y) = 0 \Rightarrow \underline{y = \theta}$.

Получили противоречие. След-но, $y = \theta \Rightarrow$

$\Rightarrow (f''(x)k)h = (f''(x)h)k \Rightarrow B(k, h) = B(h, k)$.

Итак, мы доказали след-ю теорему.

Итак, мы доказали след-ю теорему.

Теорема. Если отображение $f: U \rightarrow F$ дважды непрерывно дифференцируемо на множестве U , то вторая производная $f''(x)$ при $\forall x \in U$ представляет собой симметричное билинейное отображение.

Пусть $h = k$. Выражение $[f''(x)h]h \stackrel{\text{обозн.}}{=} d^2 f(x, h)$ наз-ая вторым дифференциалом отображения f в т. x .