№1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Лекция №1

ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

№1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Рейтинг

Теория ошибок	5
Нелинейные уравнения и методы оптимизации	6
Численное интегрирование и дифференцирование	7
Приближение функций	7
Решение СЛАУ	15
Задача Коши	10
Методы многомерной оптимизации	20
	70

№1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Дополнительно:

Краевая задача	10
Контрольная работа №1	6
Контрольная работа №2	8
Контрольная работа №3	10

Критерии оценки:

5	> 93
4	> 85
3	<= 85

№1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Список литературы

1. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учеб. пособие. — СПб,; М.; Краснодар: Лань, 2015. – 448 с. [Электр. ресурс]: ЭБС ЛАНЬ. – URL: — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=65043 .

2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов : Учебник для вузов / В. М. Вержбицкий. - 2-е изд., перераб. - М. : Высшая школа, 2005. - 847 с.

№1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Специфика вычислительной математики

- Вычислительная математика имеет дело не только с непрерывными, но и с дискретными объектами $\rightarrow$ погрешность метода;
- Погрешность вычислений в связи с ошибками округления;
- Имеет значение обусловленность задач, т.е. чувствительность решения к малым изменениям входных данных;
- Выбор вычислительного алгоритма, вообще говоря, влияет на результат вычислений;
- Важная черта численного метода – экономичность, т.е. требование минимизации числа операций.

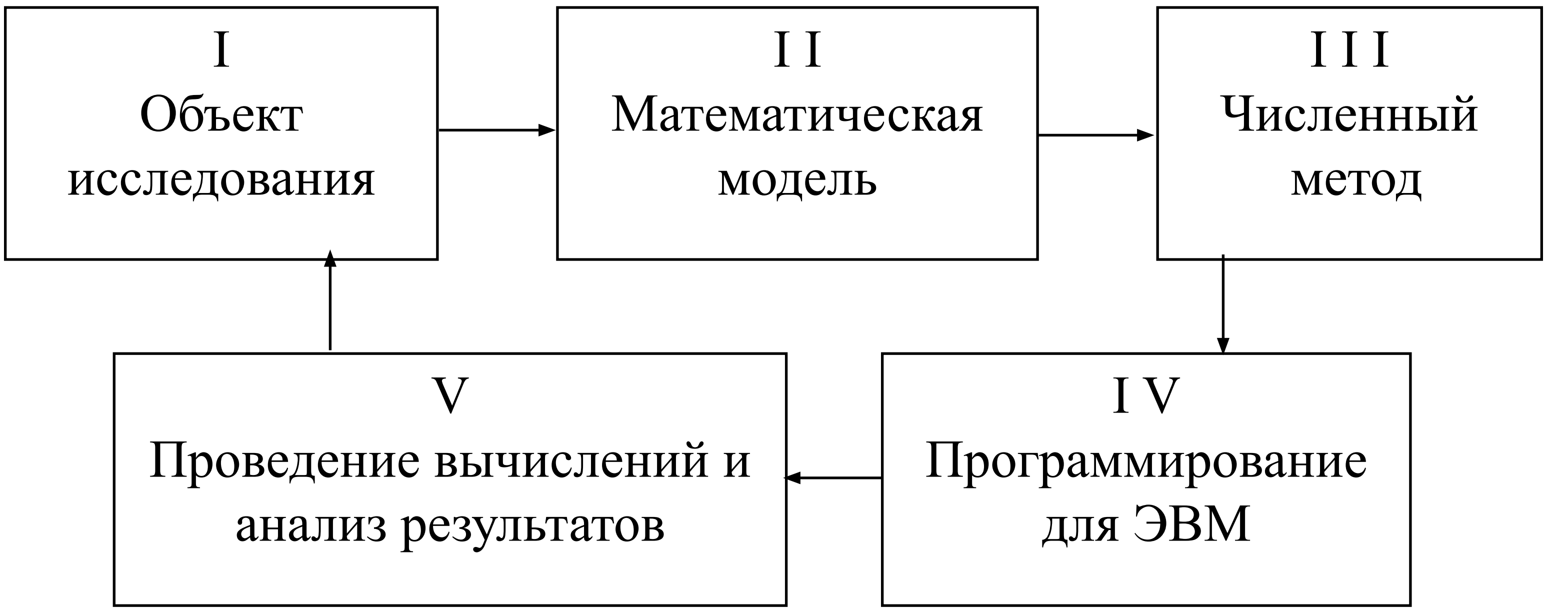
№1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

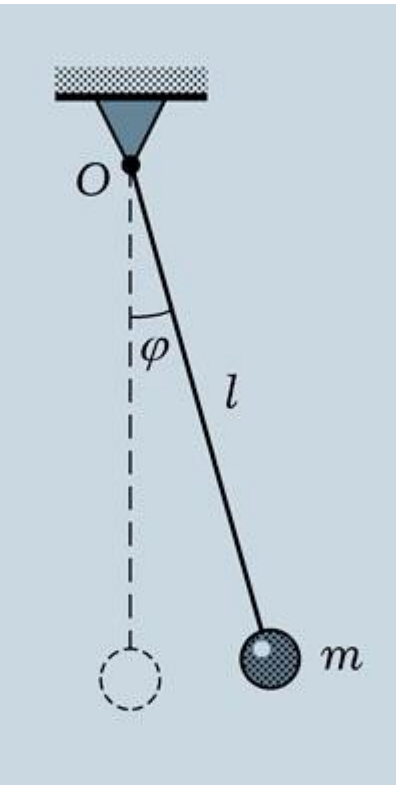
Сложные вычислительные задачи, возникающие при исследовании физических, технических и иных проблем, можно разбить на ряд элементарных — таких, как вычисление интеграла, решение дифференциального уравнения и т.п.

Посмотрим, как решается любая реальная задача, например, нахождение светового потока конструируемой лампы. Одним из способов является эксперимент. Создадим лампу и измерим интересующую нас характеристику. Если характеристика оказалась неудачной, то изменим проект, сделаем новую лампу и т. д., пока не получим желаемые параметры. Ясно, что это слишком медленный и дорогой способ. Другой способ — ***вычислительный эксперимент***.

Схема вычислительного эксперимента



Колебание математического маятника



$$l\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\sin\varphi + \mu\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

ИСТОЧНИКИ ПОГРЕШНОСТИ

1. Погрешность математической модели. Трение зависит от скорости не совсем линейно.
2. Неточность задания исходных данных (g, l, …).
3. Погрешность численного метода – дифференциальное уравнение решаем, используя численный метод.
4. Вычислительная погрешность, связанная с конечной разрядной сеткой.

№1

Иллюстрация понятия вычислительной погрешности

Вычисление синуса с помощью разложения в ряд Тейлора

[redacted]

Ряд сходится для любого значения *x*

Напишем программу для вычисления значения синуса при:

$X1 = \pi / 6 \approx 0.52366$

$X2 = 12\pi + \pi / 6 \approx 38.22277$

№1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

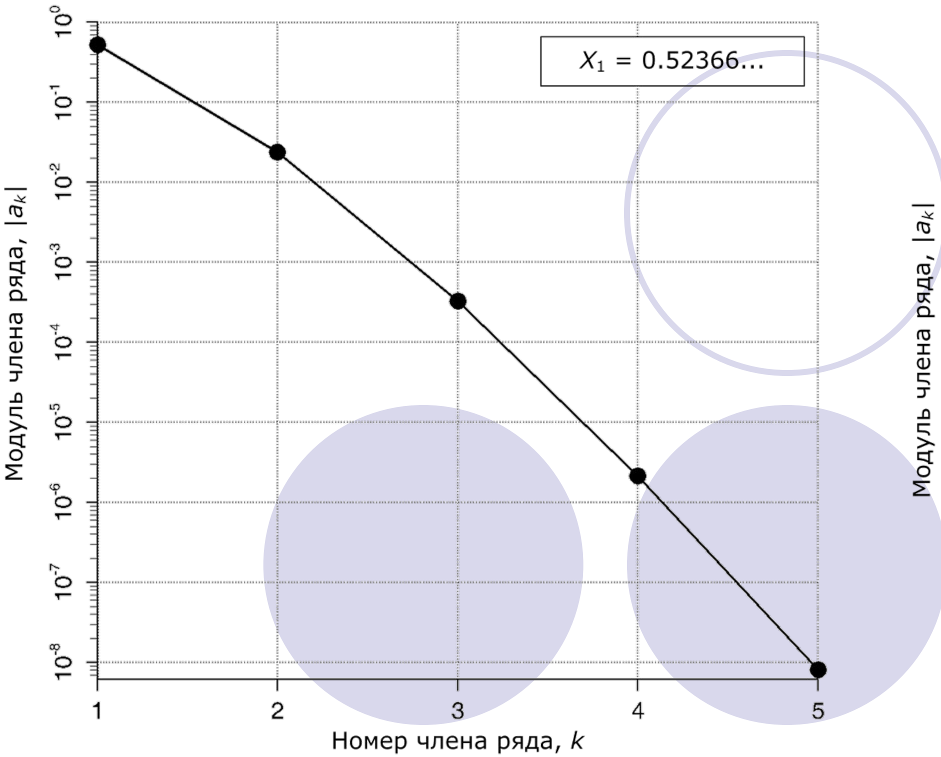
```
#define EPS  1.e-8
#define X      0.52366
...
int i, k = 0;
double curr_sum = 0.0, curr_sum_old = 0.0, fact;
do {
      fact = 1.0;
      for ( i = 1; i<= 2*k+1; i++ )
            fact *= i;
      curr_sum_old = curr_sum;
      curr_sum += pow( -1, k) * pow( X, 2*k+1 ) / fact;
      k++;
} while ( fabs( curr_sum - curr_sum_old ) > EPS );
```

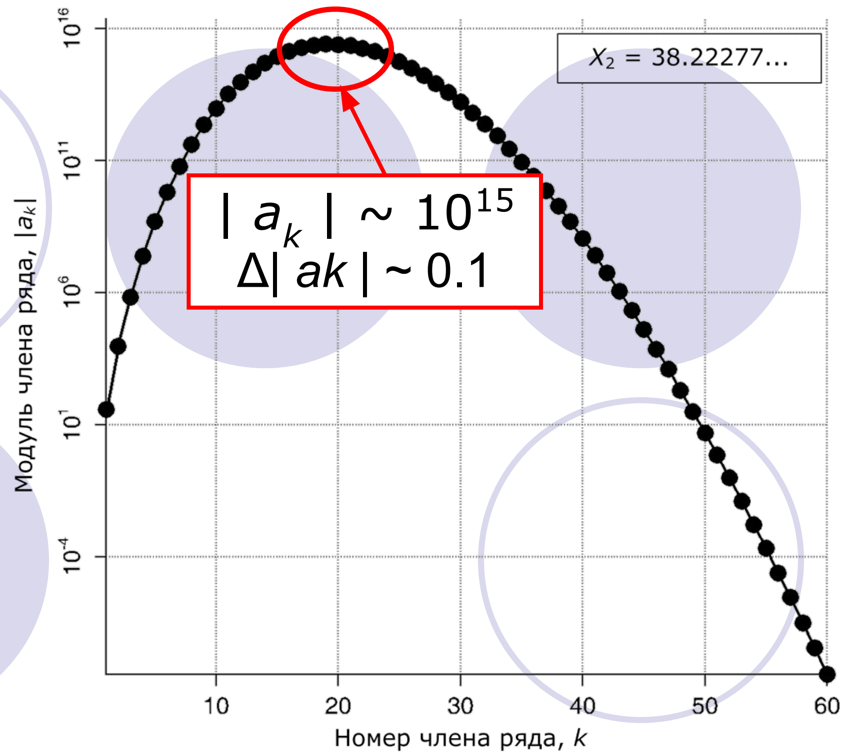
Получаем результат:

Для $X1$ = 0.52366: **0.500053…** Для $X2$ = 38.22277: **1.165079…**

№1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА





Для $| X | < 1$: $| ak |$ монотонно убывают

Для $| X | > 1$: $| a_k |$ сначала возрастают, а затем убывают

№1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Иллюстрация влияния выбора метода вычисления

Вычисление e^x может быть представлено как сумма сходящегося бесконечного ряда $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$. Применим ряд для $x = -5.5$.

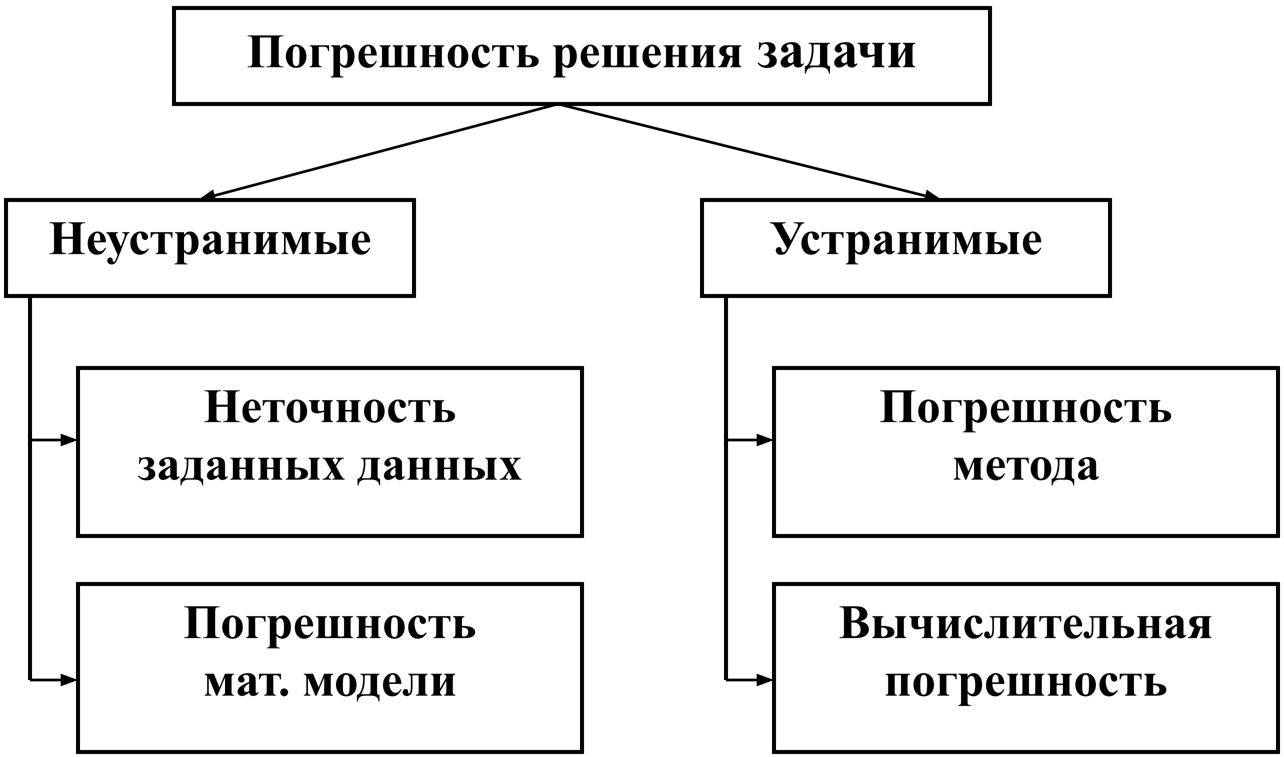
При расчете с 5 знаками последовательно получим следующие числа:

$$e^{-5.5} = 1.0000 - 5.5000 + 15.125 - 27.730 + \ldots \approx 0.0026363.$$

Мы ограничиваемся при суммировании 25 членами ряда, так как последующие слагаемые уже не меняют сумму. Удовлетворительный ли ответ получен? Истинный результат $e^{-5.5} = 0.0040867,$ так что вычисление привело к ответу, не имеющему верных цифр.

Проблема таится в пятизначной арифметике и, вследствие этого, ошибках округления. Но увеличение разрядности не сильно поможет, да и обходится очень дорого. Лучше вычислить сумму для $x = 5.5$ и затем взять обратное число: $e^{-5.5} = \frac{1}{e^{5.5}} = \frac{1}{1 + 5.5 + 15.123 + \ldots} = 0.0040865.$

Классификация погрешности



№1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Абсолютные и относительные погрешности

Если x — точное значение некоторой величины, а x^* — известное приближение к нему, то ***абсолютной погрешностью*** приближенного значения x^* называют некоторую величину $\Delta(a^*)$, про которую известно, что

$$|x^* - x| \le \Delta_x.$$

Пример:

$$x^* = 3.14$$

$$x = \pi = 3.141592...$$

$$\Delta_x = |3.14 - \pi| \le 0.00159 \le 0.002.$$

Относительной погрешностью приближенного значения x^* называют отношение его абсолютной погрешности $\Delta(x^*)$ к абсолютной величине числа x^*

$$\frac{\Delta(x^*)}{|x^*|} = \left|\frac{x^* - x}{x^*}\right| \le \delta(x^*).$$

Пример:

$x^* = 3.14$

$x = \pi = 3.141592...$

$\delta(x^*) = \dfrac{0.002}{3,14} 100\% \approx 0.63\%$

Абсолютная погрешность менее информативна, чем относительная. Так, если точное значение некоторой Величины равно 0.00006, а приближенное значение равно 0.00005, то абсолютная ошибка составляет всего 10-5 , в то время как относительная ошибка составляет 0.2, или 20%. С другой стороны, если точное значение равно 100500, а приближенное значение равно 100000, то абсолютная ошибка составляет 500, хотя относительная ошибка составляет всего 0.005, или 0.5%.

№1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Значащими цифрами числа называются все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева. Любое число можно представить в виде:

$$x = \alpha_1 \beta^n + \alpha_2 \beta^{n-1} + \ldots + \alpha_m \beta^{n-m+1},$$ где

α_1 — первая значащая цифра числа;

β — основание системы счисления; $0 \le \alpha_i \le \beta - 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$

Пример:

$$247.52 = 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$$

$$\beta = 10, \quad \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 4, \quad \alpha_3 = 7 \quad \alpha_4 = 5, \quad \alpha_5 = 2,$$

$$n = 2, \quad m = 5.$$

Значащая цифра α_k считается ***верной***, если имеет место неравенство: $\Delta_x \le \varpi \cdot \beta^{n-k+1}, \quad 0.5 \le \varpi \le 1,$ в противном случае α_k — ***сомнительная*** цифра.

Чаще всего $\varpi = 0.5.$

В этом случае говорят, что число x имеет k верных знаков в ***узком*** смысле.

Если $\varpi = 1.0,$ то число x имеет k верных знаков в ***широком*** смысле.

№1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Относительная погрешность числа, содержащего k верных знаков, определяется соотношением:

$$\delta_x = \frac{\omega\beta^{n-k+1}}{\alpha_1\beta^n + \alpha_2\beta^{n-1} + \alpha_3\beta^{n-2} + \ldots} \le \frac{\omega\beta^{n-k+1}}{\alpha_1\beta^n} \le \frac{\omega}{\alpha_1}\beta^{1-k} \le \omega\beta^{1-k}$$

На практике обычно используется понятие числа С верными знаками в узком смысле.

Тогда можно сказать, что абсолютная погрешность числа с верными знаками равна половине последнего разряда.

Пример 1.

Приближенное число $x = 0.3941$ получено с погрешностью $\Delta_x = 0.25 \cdot 10^{-2}$. Определить число верных знаков в его записи.

Согласно определению должно выполняться неравенство $0.25 \cdot 10^{-2} \leq 0.5 \cdot 10^{n-k+1}$, n — степень первой значащей цифры в записи числа, т.е. $n = -1$, тогда $0.25 \cdot 10^{-2} \leq 0.5 \cdot 10^{-1-k+1}, k = 2,$ т.е. число имеет две верные цифры 0.39, а две следующие являются сомнительными.

№1

Пример 2.

Определить абсолютную и относительную погрешность приближенного числа x, если в его записи только верные цифры : $x = 11.445.$

Решение:

$$n = 1; \quad k = 5;$$

$$\Delta_x \le 0.5 \cdot 10^{1-5+1} = 0.5 \cdot 10^{-3}$$

$$\delta(x) = \frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{11.445} = 4.368 \cdot 10^{-5}.$$

Определение погрешности функции по известным погрешностям аргументов

Основная задача теории погрешности заключается в следующем: по известным погрешностям некоторой системы параметров требуется определить погрешность функции этих параметров.

Для начала рассмотрим случай вычисления функции одного аргумента $y = f(x)$.

Абсолютная погрешность вычисления функции равна произведению абсолютной величины ее производной на абсолютную погрешность ее аргумента:

$$\Delta y = \left| f'(x) \right| \cdot \Delta x.$$

Рассмотрим относительную погрешность вычисления функции одной переменной. Учитывая, что $\Delta x = \delta x \cdot |x|$

$$\delta y = \frac{\Delta y}{|y|} = \frac{|f'(x)|}{|f(x)|} \cdot \Delta x = \left| x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \cdot \delta x.$$

Так как $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{d\ln(f(x))}{dx}$, то δy можно записать так:

$$\delta y = \left| x \cdot \frac{d\ln(f(x))}{dx} \right| \cdot \delta x.$$

Для основных элементарных функций получаем следующие правила

Степенная функция $y = x^n$.

Абсолютная погрешность равна $\Delta_y = nx^{n-1}\Delta_x$.

Относительная погрешность степени равна относительной погрешности основания, умноженной на абсолютную величину показателя степени.

$$\delta y = \left| x \cdot \frac{nx^{n-1}}{x^n} \right| \cdot \delta x = |n| \cdot \delta x.$$

№1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Показательная функция $y = a^x \; (a > 0).$

Абсолютная погрешность показательной функции равна

$$\Delta_y = a^x \ln a \cdot \Delta_x .$$

Относительная погрешность показательной функции равна

$$\delta_y = \Delta_x \ln a.$$

Для функции $y = e^x$ получаем: $\delta_y = \Delta_x .$

Логарифмическая функция $y = \ln x.$

Абсолютная погрешность натурального логарифма числа равна относительной погрешности самого числа:

$$\Delta_y = \frac{1}{x}\Delta_x = \delta_x .$$

Тригонометрические функции.

Абсолютные погрешности синуса и косинуса не превосходят абсолютных погрешностей аргумента:

$$\Delta_{\sin x} = |\cos x|\Delta_x \le \Delta_x, \qquad \Delta_{\cos x} = |\sin x|\Delta_x \le \Delta_x$$

Абсолютная погрешность тангенса и котангенса всегда больше абсолютной погрешности аргумента:

$$\Delta_{tgx} = |1 + tg^2 x|\Delta_x \ge \Delta_x, \qquad \Delta_{ctgx} = |1 + ctg^2 x|\Delta_x \ge \Delta_x$$

№1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Определение погрешности функции многих переменных по известным погрешностям аргументов

Для непрерывно дифференцируемой функции

$$U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

абсолютную погрешность можно вычислить по формуле:

$$\Delta_U = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial U}{\partial x_i} \right| \Delta x_i ,$$

где Δx_i - абсолютные погрешности аргументов x_i.

Относительная погрешность вычисляется по формуле:

$$\delta_U = \frac{\Delta_U}{|U|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left|\frac{\partial U}{\partial x_i}\right|}{|U|} \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial \ln U}{\partial x_i}\right| \cdot \Delta x_i$$

Учитывая, что $\Delta x_i = \delta x_i |x_i|,$ получим

$$\delta_U = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ln U \right| \delta x_i .$$

Пример 1.

Пусть $U = x_1 + x_2.$

$$\Delta_U = \left|\frac{\partial(x_1 + x_2)}{\partial x_1}\right|\Delta x_1 + \left|\frac{\partial(x_1 + x_2)}{\partial x_2}\right|\Delta x_2 = 1\cdot\Delta x_1 + 1\cdot\Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

Абсолютная погрешность суммы равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых.

Относительная погрешность суммы:

$$\delta_U = \left|\frac{\Delta(x_1 + \Delta x_2)}{x_1 + x_2}\right| = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{x_1 + x_2} = \frac{|x_1|\delta x_1 + |x_2|\delta x_2}{|x_1 + x_2|}.$$

Попробуем оценить границы относительной погрешности суммы. Выберем из всех относительных погрешностей наибольшую и тогда можно записать:

$$\delta_{x_1+x_2+\ldots+x_n} = \frac{|x_1|\delta_{\max} + |x_2|\delta_{\max} + \ldots + |x_n|\delta_{\max}}{|x_1 + x_2 + \ldots + x_n|} = \delta_{\max}.$$

Таким образом, предельная относительная погрешность суммы положительных чисел не превосходит максимальной относительной погрешности слагаемых.

Пример 2.

Пусть $U = x_1 - x_2.$

$$\Delta_U = \left|\frac{\partial(x_1 + x_2)}{\partial x_1}\right|\Delta x_1 + \left|\frac{\partial(x_1 + x_2)}{\partial x_2}\right|\Delta x_2 = 1\cdot\Delta x_1 + 1\cdot\Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

Абсолютная погрешность разности равна сумме абсолютных погрешностей аргументов.

Относительная погрешность разности:

$$\delta_U = \left|\frac{\Delta(x_1 - \Delta x_2)}{x_1 - x_2}\right| = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{x_1 - x_2} = \frac{|x_1|\delta x_1 + |x_2|\delta x_2}{|x_1 - x_2|}.$$

Пример.

Пусть $x_1 = 2520, x_2 = 2518.$

Тогда

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0.5, \quad \delta x_1 = \delta x_2 = \frac{0.5}{2518} \approx 0.0002\ (0.02\%).$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta(x_1 - x_2) = 0.5 + 0.5 = 1.$$

Относительная погрешность:

$$\delta(x_1 - x_2) = \frac{\Delta(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2} = 0.5\ (50\%).$$

При вычитании близких по значению чисел относительная погрешность может существенно возрастать…

Абсолютная и относительная погрешность вычисления произведения и частного приближенных чисел

При умножении и делении приближенных чисел складываются их относительные погрешности, т.е. относительная погрешность выражения

$$y = \frac{a_1 a_2 \ldots a_m}{b_1 b_2 \ldots b_n}$$

оценивается величиной

$$\delta_y = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \ldots + \delta_{a_m} + \delta_{b_1} + \delta_{b_2} \ldots \delta_{b_n}.$$

Абсолютная погрешность в этом случае вычисляется через относительную погрешность: $\Delta_y = |y|\delta_y$

№1

Определение допустимой погрешности аргументов по допустимой погрешности функций

Эта задача имеет однозначное решение только для функции одной переменной $y = f(x)$: если эта функция дифференцируема и $f'(x) \neq 0$, то

$$\Delta_x = \frac{1}{|f'(x)|}\Delta_y.$$

Для функции нескольких переменных $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ решается только при наличии дополнительных ограничений. Если значение одного из аргументов трудно измерить с высокой точностью других аргументов, то погрешность именно этого аргумента надо согласовать с требуемой погрешностью функции.

№1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Если значения всех аргументов можно одинаково легко определить с любой точностью, то обычно применяют ***принцип равных влияний***, считая, что в формуле $\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$ все слагаемые равны между собой;

это дает следующую формулу:

$$\Delta x_i = \frac{\Delta y}{n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пример.

Найти допустимую абсолютную погрешность приближенных величин $x = 15.2,$ $y = 57^{\circ}$, для которых возможно найти значение функции $u = 6x^2(\lg x - \sin 2y)$ с точностью до двух десятичных знаков после запятой.

Решение.

Находим

$$u = 6x^2(\lg x - \sin 2y) = 6(15.2)^2(\lg 15.2 - \sin 114^{\circ}) = 371.9$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 12x(\lg x - \sin 2y) + 6x^2 \lg e = 88.54,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -12x^2 \cos 2y = 1127.7.$$

№1

По условию $\Delta_u = 0.005$. Тогда согласно принципу равных влияний по формуле

$$\Delta x_i = \frac{\Delta y}{n\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

находим

$$\Delta_x = \frac{\Delta_u}{2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|} = \frac{0.005}{2 \cdot 88.54} = 0.28 \cdot 10^{-4}$$

$$\Delta_y = \frac{\Delta_u}{2\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|} = \frac{0.005}{2 \cdot 1127.7} = 0.22 \cdot 10^{-5} = 0''.45$$

№1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

№1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

№1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА