Определители второго и третьего порядка

Определитель (или детерминант) – это число, связанное с квадратной матрицей А, обозначение:

$$|A| \quad \text{или } \mathbf{det\ A}.$$

Если матрица записана в прямых чертах, то это обозначает определитель матрицы.

Определитель 2-го порядка:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

det A= $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

Определитель 3-го порядка:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

,

det A= $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$

Способы вычисления определителя третьего порядка

1. По правилу «треугольника».

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad -$$

2. Правило параллельных прямых.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$-$ $\qquad\qquad$ $+$

Свойства определителей.

- При перемене местами любых двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

- При умножении всех элементов любой строки (столбца) на некоторое число, определитель умножается на это число.

- Если любую строку (столбец) определителя разбить в сумму двух строк (столбцов), то определитель можно представить как сумму соответствующих определителей:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

- Определитель, имеющий две одинаковые строки (столбца) равен нулю.

- Определитель, содержащий строку (строчку) из нулей, равен нулю.

- К любой строке определителя можно прибавить любую другую строку, умноженную на любое число. Определитель при этом не меняется.

- Транспонирование не меняет определителя:

$$\det(A^T) = \det A$$

Опр: Минор M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания строки под номером i и столбца под номером j, т.е. той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}. **Минор M_{ij}** есть определитель порядка на единицу ниже исходного.

Опр. ***Алгебраическое дополнение A_{ij}*** - это минор M_{ij}, умноженный на $(-1)^{i+j}$,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} либо совпадает с его минором (если $i+j$ – четное число), либо противоположно ему (если $i+j$ – нечетное число).

•***Теорема Лапласа:*** Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на соответствующее алгебраическое дополнение этих элементов.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13};$$

правая часть равенства называется разложением определителя по элементам первой строки.

Обратная матрица

Рассмотрим квадратную матрицу n-го порядка *A*

Опр. Квадратная матрица называется **невырожденной,** если ее определитель не равен нулю. В противном случае матрица называется **вырожденной.**

Опр. **Обратной матрицей** для матрицы *A* называется такая матрица $\boldsymbol{A}^{-1}$, произведение которой слева и справа на матрицу *A* дает единичную матрицу того же порядка.

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

Теорема: Для каждой невырожденной матрицы существует обратная и она находится по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} - алгебраические дополнения элементов матрицы А. По отношению к исходной матрицы они транспонированы.