Бином Ньютона

Алгебра 11-класс

Актуализация знаний

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Формула квадрата суммы двух выражений

$\mathbf{(a + b)^3} = (a + b)^2(a + b) =$

$= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 2a^2b +$

$+ ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = \mathbf{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

Формула суммы кубов

Формула бинома Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + \ldots + C_n^n b^n$$

C_n^k *Называется биномиальным коэффициентом*

:

Число всех возможных сочетаний из n элементов по k элементов обозначается

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Биномиальные коэффициенты легко находить с помощью треугольника Паскаля

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Свойства бинома Ньютона

- Число слагаемых на 1 больше степени бинома.
- Коэффициенты находятся по треугольнику Паскаля.
- Коэффициенты симметричны.
- Если в скобке знак минус, то знаки + и – чередуются.
- Сумма степеней каждого слагаемого равна степени бинома.

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + \ldots + C_n^n b^n$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

n	
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
...	... ...

Пример 1. $(x-2y)^4$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + \ldots + C_n^n b^n$$

$$(x-2y)^4 = C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3(-2y) + C_4^2 x^2(-2y)^2 + $$
$$+ C_4^3 x^1(-2y)^3 + C_4^4(-2y)^4 =$$

n	
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
...	... ...

$$= x^4 + 4x^3(-2y) + 6x^2(-2y)^2$$
$$+ 4x(-2y)^3 + (-2y)^4 =$$

$$= x^4 - 8x^3 y + 24x^2 y^2 - 32xy^3 + 16y^4$$

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1

Пример $(1+\sqrt{3})^5$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + \ldots + C_n^n b^n$$

$$(1+\sqrt{3})^5 = C_5^0 1^5 + C_5^1 1^4 (\sqrt{3})^1 + C_5^2 1^3 (\sqrt{3})^2 +$$

$$+ C_5^3 1^2 (\sqrt{3})^3 + C_5^4 1^1 (\sqrt{3})^4 + C_5^5 (\sqrt{3})^5 =$$

$$= \underline{1} + \underline{5}\sqrt{3} + \underline{10} \cdot 3 + \underline{10} \cdot 3\sqrt{3} + \underline{5} \cdot 9 + \underline{1} \cdot 9\sqrt{3} =$$

$$= 76 + 44\sqrt{3}$$

Задание для самостоятельного решения

$$1)(1+\sqrt{5})^4$$

$$2)(2a-b)^6$$

$$3)(x+y)^5$$