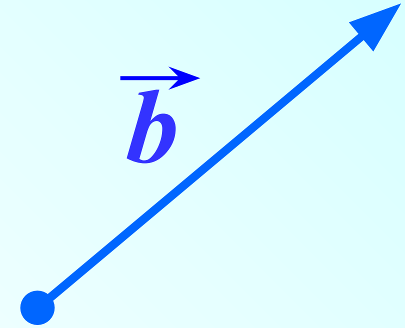
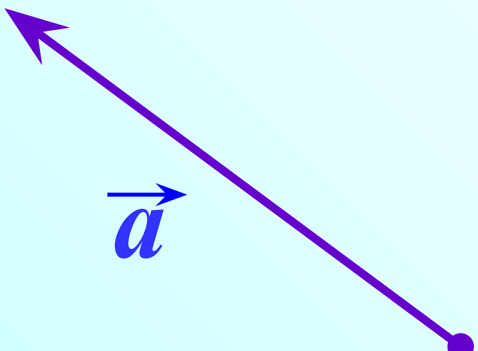
Савченко Е.М., учитель математики, МОУ гимназия № , г. Полярные Зори, Мурманской обл.

Скалярное произведение векторов

Л.С. Атанасян "Геометрия 10-11"

Угол между векторами





A

B

$\vec{a}$

α

$\vec{b}$

O

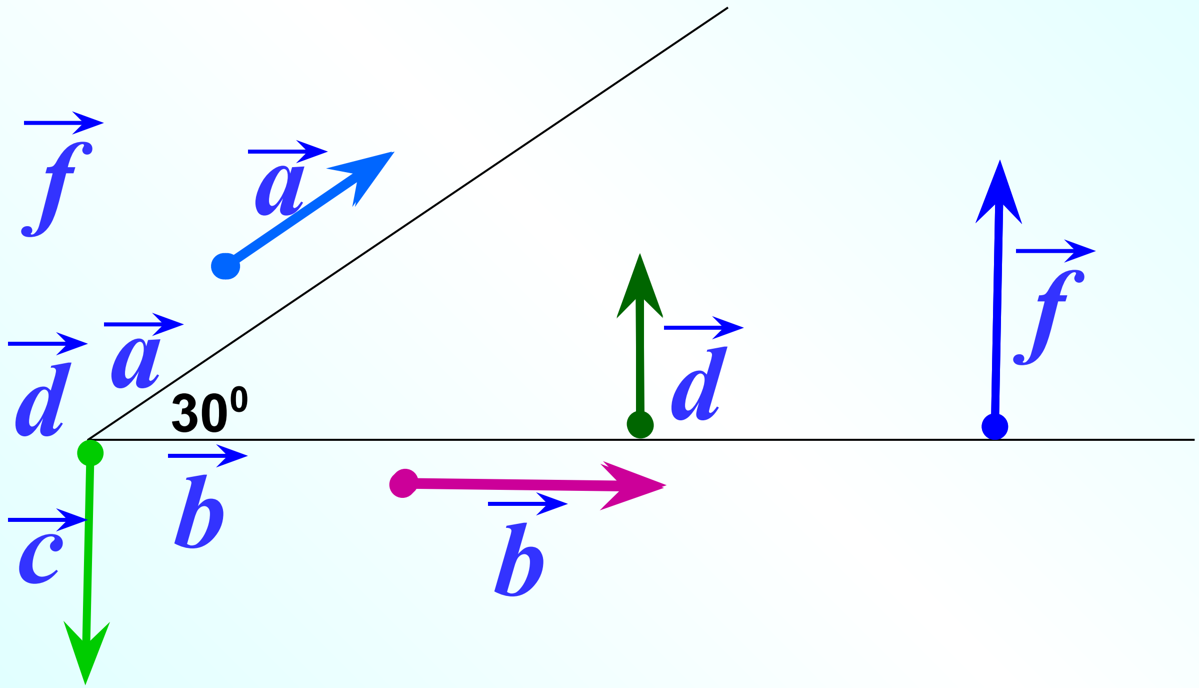
$\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = \alpha$

Лучи OA и OB образуют угол AOB.

Градусную меру этого угла обозначим буквой α

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α

Найти углы между векторами.



$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 30^0$

$\widehat{\vec{a}\,\vec{c}} = 120^0$

$\widehat{\vec{b}\,\vec{c}} = 90^0$

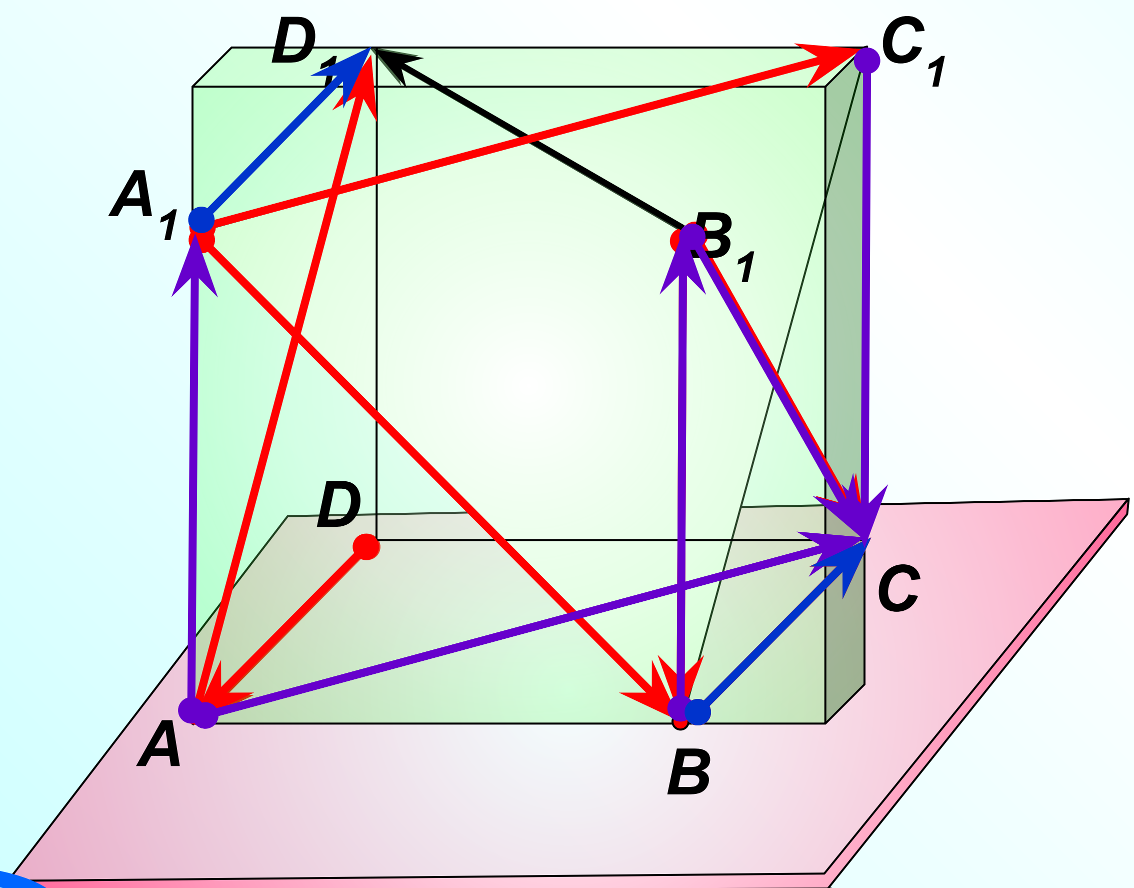
$\widehat{\vec{d}\,\vec{c}} = 180^0$

$\widehat{\vec{d}\,\vec{f}} = 0^0$

Два вектора называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90^0.

$\vec{b} \perp \vec{c}$ $\quad$ $\vec{b} \perp \vec{d}$ $\quad$ $\vec{b} \perp \vec{f}$

№ 441 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.
Найдите угол между векторами.



$\widehat{\overrightarrow{B_1B}, \overrightarrow{B_1C}} = 45^0$

$\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{B_1D_1}} = 135^0$

$\widehat{\overrightarrow{A_1C_1}, \overrightarrow{A_1B}} = 60^0$

$\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}} = 45^0$

$\widehat{\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AD_1}} = 90^0$

$\widehat{\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{AC}} = 90^0$

$\widehat{\overrightarrow{A_1D_1}, \overrightarrow{BC}} = 0^0$

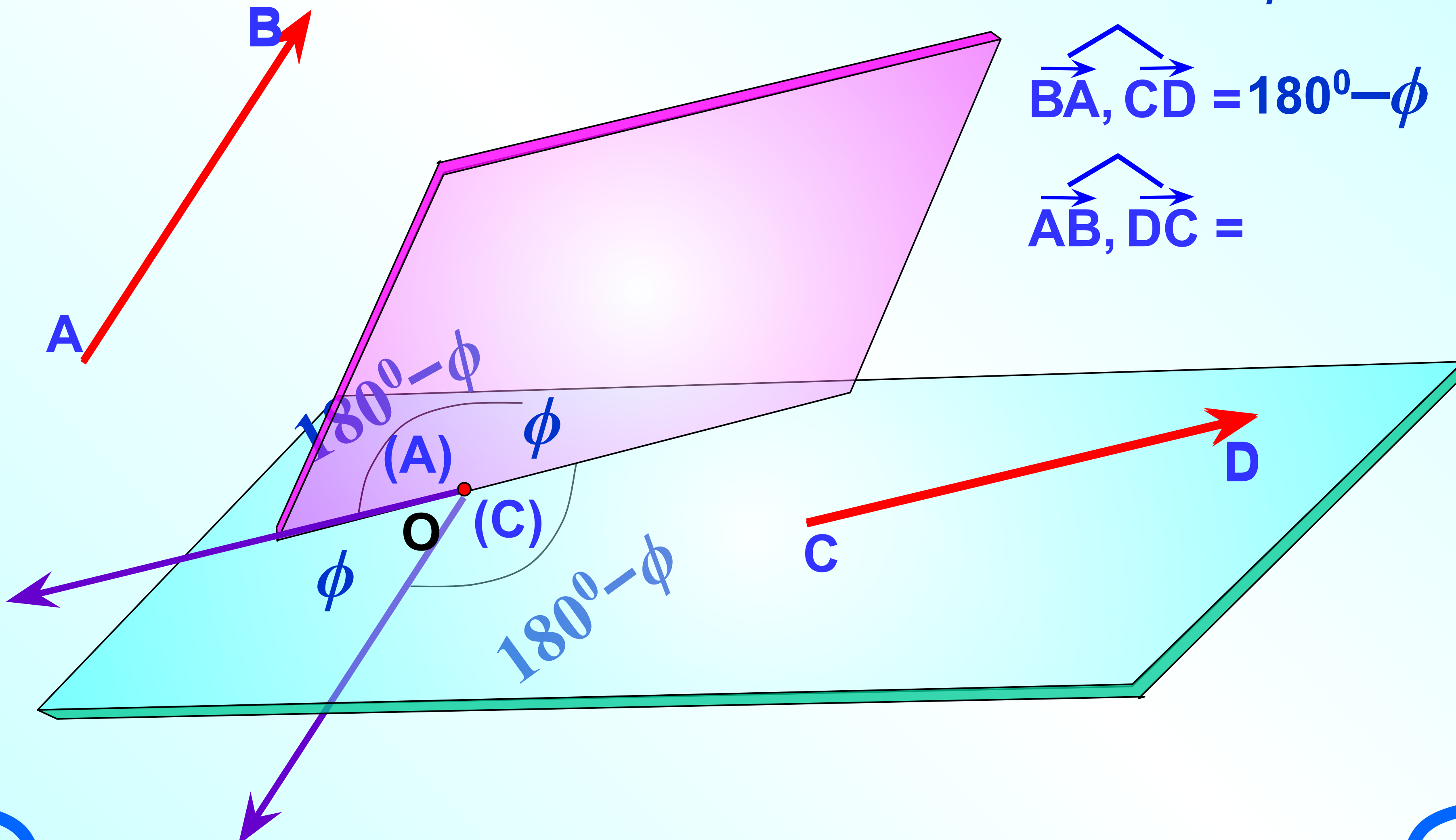
$\widehat{\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{C_1C}} = 180^0$

№ 442 Угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен ϕ. Найдите углы между векторами

$\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}} = \phi$

$\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}} = 180^0 - \phi$

$\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}} =$



Сумма векторов – вектор.

Разность векторов – вектор.

Произведение вектора на число – вектор.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

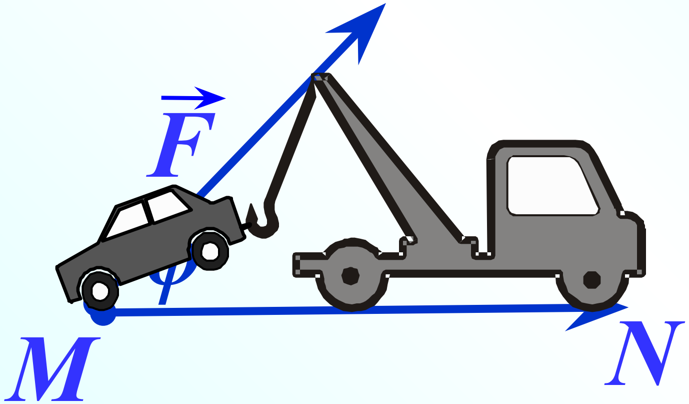
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

Скаляр – лат. *scale* – лестница, шкала.

Ввел в 1845г. У. Гамильтон, английский математик.

Скалярное произведение в физике

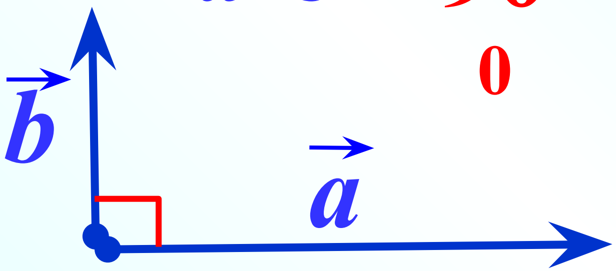


Скалярное произведение векторов встречается в физике. Например, из курса механики известно, что работа $\mathbf{A}$ постоянной силы $\vec{\mathbf{F}}$ при перемещении тела из точки $\mathbf{M}$ в точку $\mathbf{N}$ равна произведению силы $\vec{\mathbf{F}}$ и перемещения $\overrightarrow{\mathbf{MN}}$ на косинус угла между ними.

$$\mathbf{A} = |\vec{\mathbf{F}}| \cdot |\overrightarrow{\mathbf{MN}}| \cos\phi$$

$$\mathbf{A} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{MN}}$$

$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 90^0$



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 90^0 = 0$$

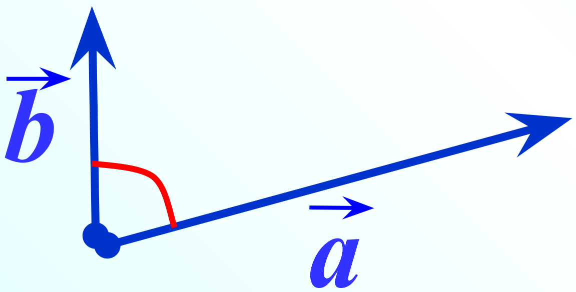
Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то скалярное произведение векторов равно нулю.

Обратно: если $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$

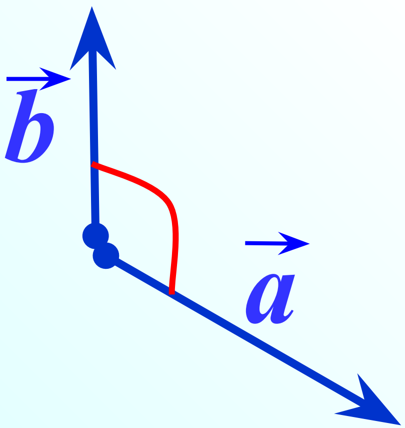


$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$ > 0 > 0

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда , когда угол между векторами **острый.**

$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$$

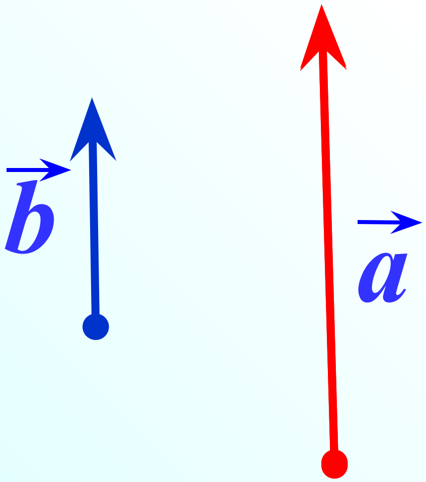


$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha < 0$$

< 0

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда , когда угол между векторами **тупой.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$$

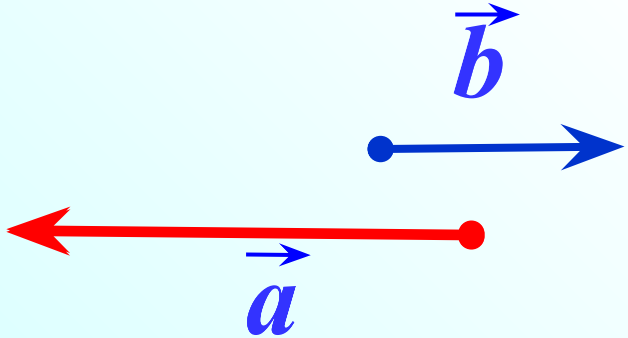


Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0^0$$

1

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 0^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$



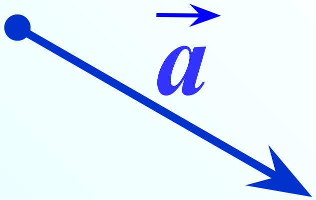
Если $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 180^0$$

-1

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 180^0 = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{a}} = 0^0$$



$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\overset{1}{\cos 0^0} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^{\,2}$

Таким образом,
скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$$

№ 443 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Найдите скалярное произведение векторов

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1}$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1A_1}$

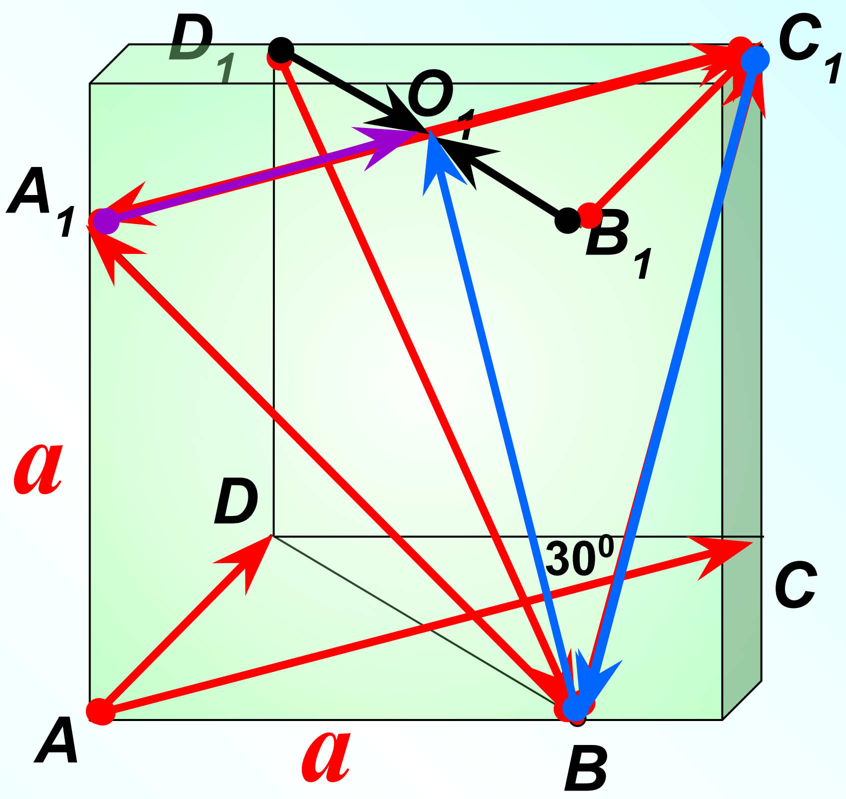
$\overrightarrow{D_1B} \cdot \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

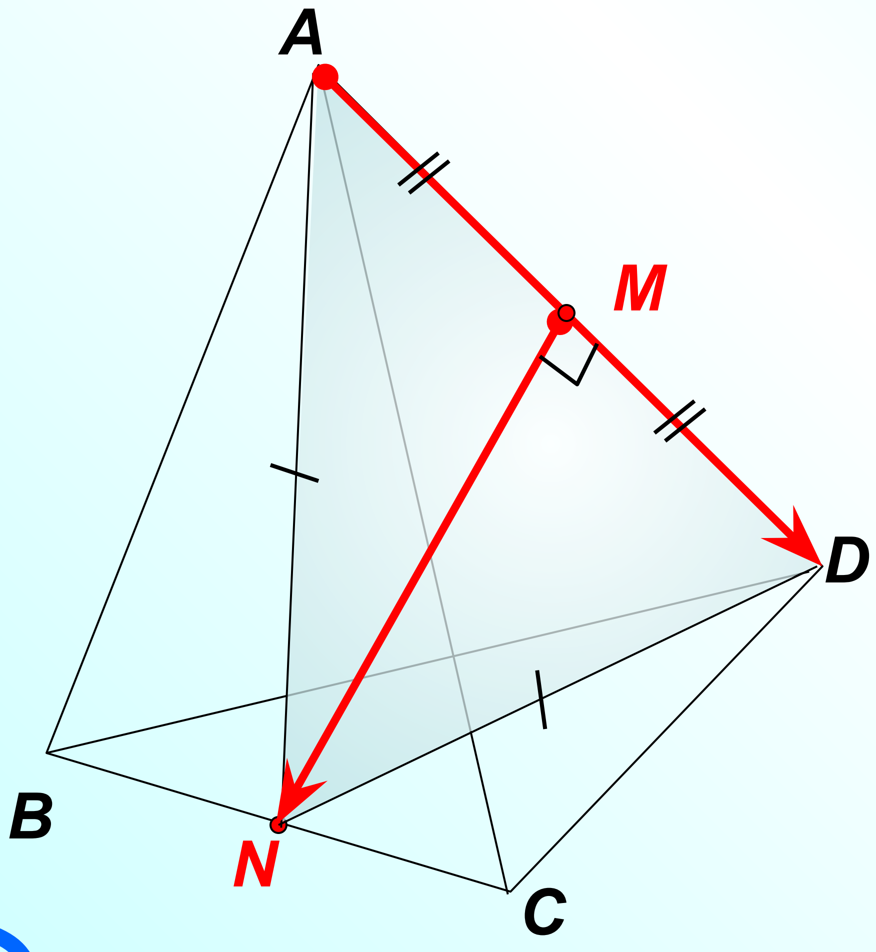
$\overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1}$

$\overrightarrow{D_1O_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1}$

$\overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B}$



Все ребра тетраэдра ABCD равны друг другу. Точки M и N – середины ребер AD и BC. Докажите, что $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$



Маленький тест

На каком расстоянии от плоскости xOy находится точка A(2; -3; 5)

1 2

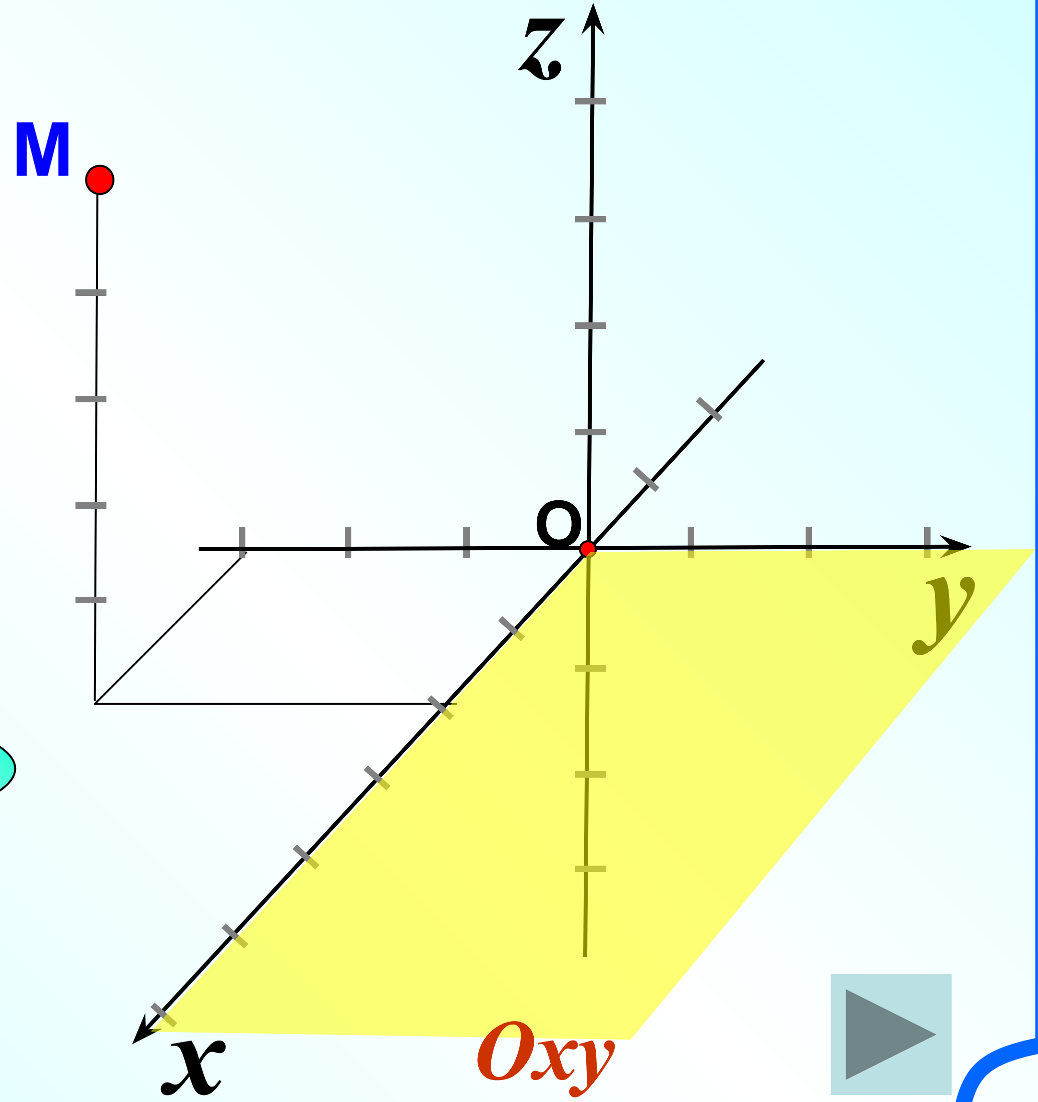
ПОДУМАЙ!

2 5

ВЕРНО!

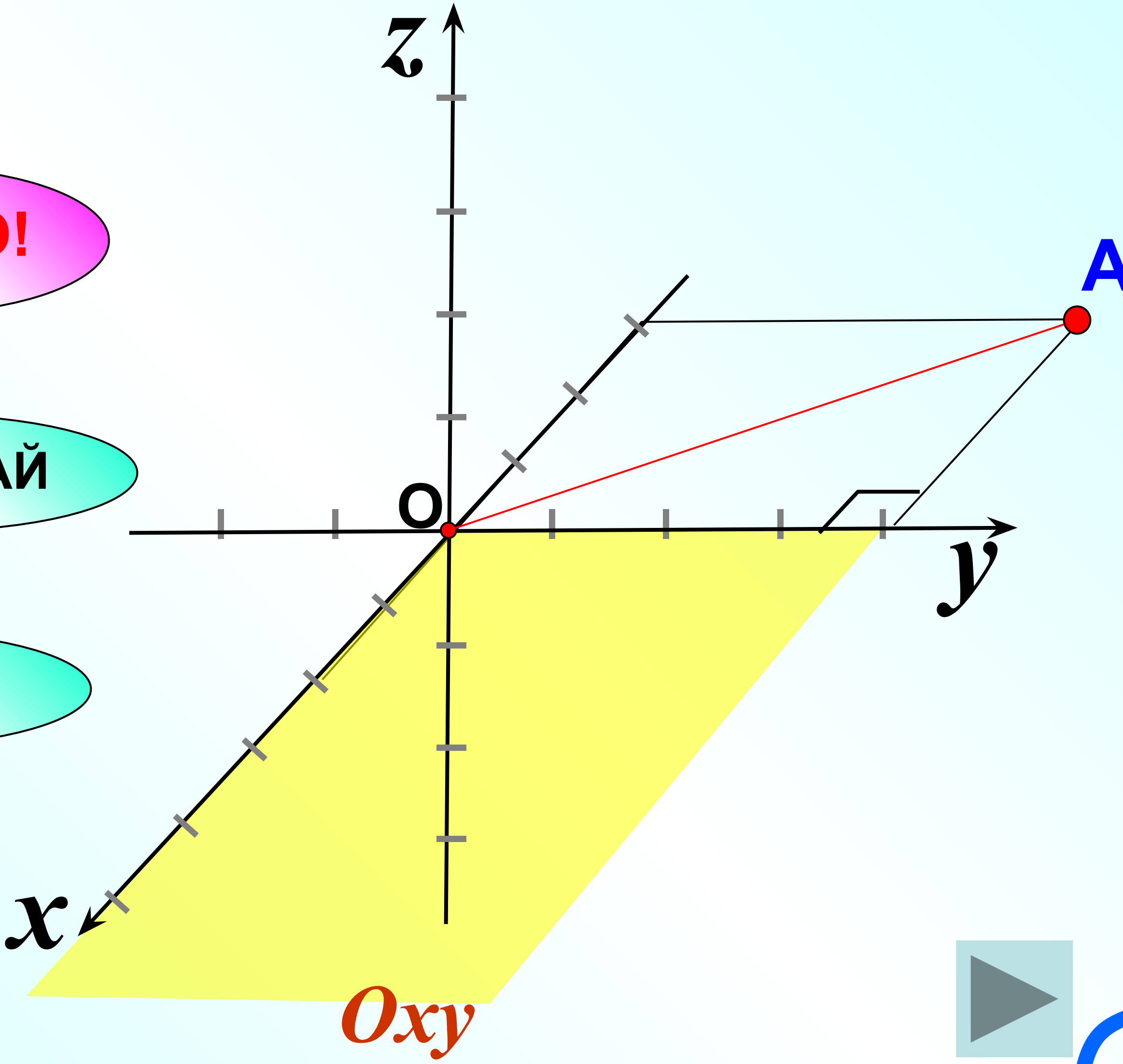
3 3

ПОДУМАЙ!



Проверка

На каком расстоянии от начала координат находится точка А(-3; 4; 0)



ВЕРНО!

1 5;

ПОДУМАЙ!

2 4;

ПОДУМАЙ!

3 3.

Проверка

Найти координаты середины отрезка, если концы его имеют координаты $A(-3;\ 2;-4)$ и $B(1;-4;\ 2)$

$$C\left(\frac{-3+1}{2};\ \frac{2+(-4)}{2};\ \frac{-4+2}{2}\right)$$

1 C(-2; 1;-1)

ПОДУМАЙ!

2 C(-1;-1;-1)

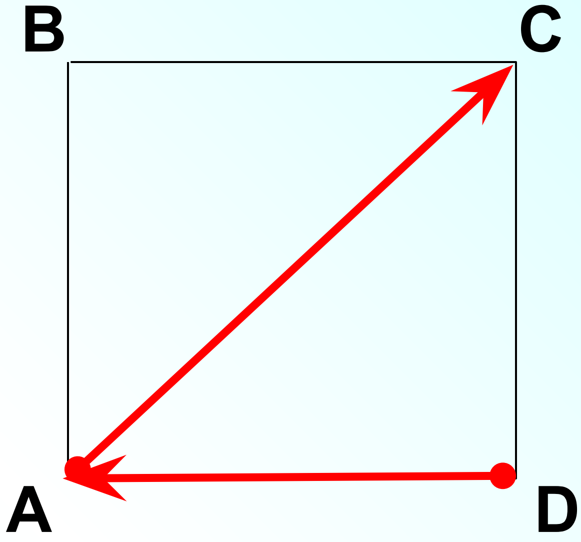
ВЕРНО!

3 C(-2;-2;-2)

ПОДУМАЙ!

Проверка

Дан квадрат ABCD.
Найдите угол между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DA}$.



1 135^0;

ВЕРНО!

2 45^0;

ПОДУМАЙ!

3 90^0.

ПОДУМАЙ!

Проверка

Скалярное произведение координатных векторов

$\vec{k}$ и $\vec{j}$:

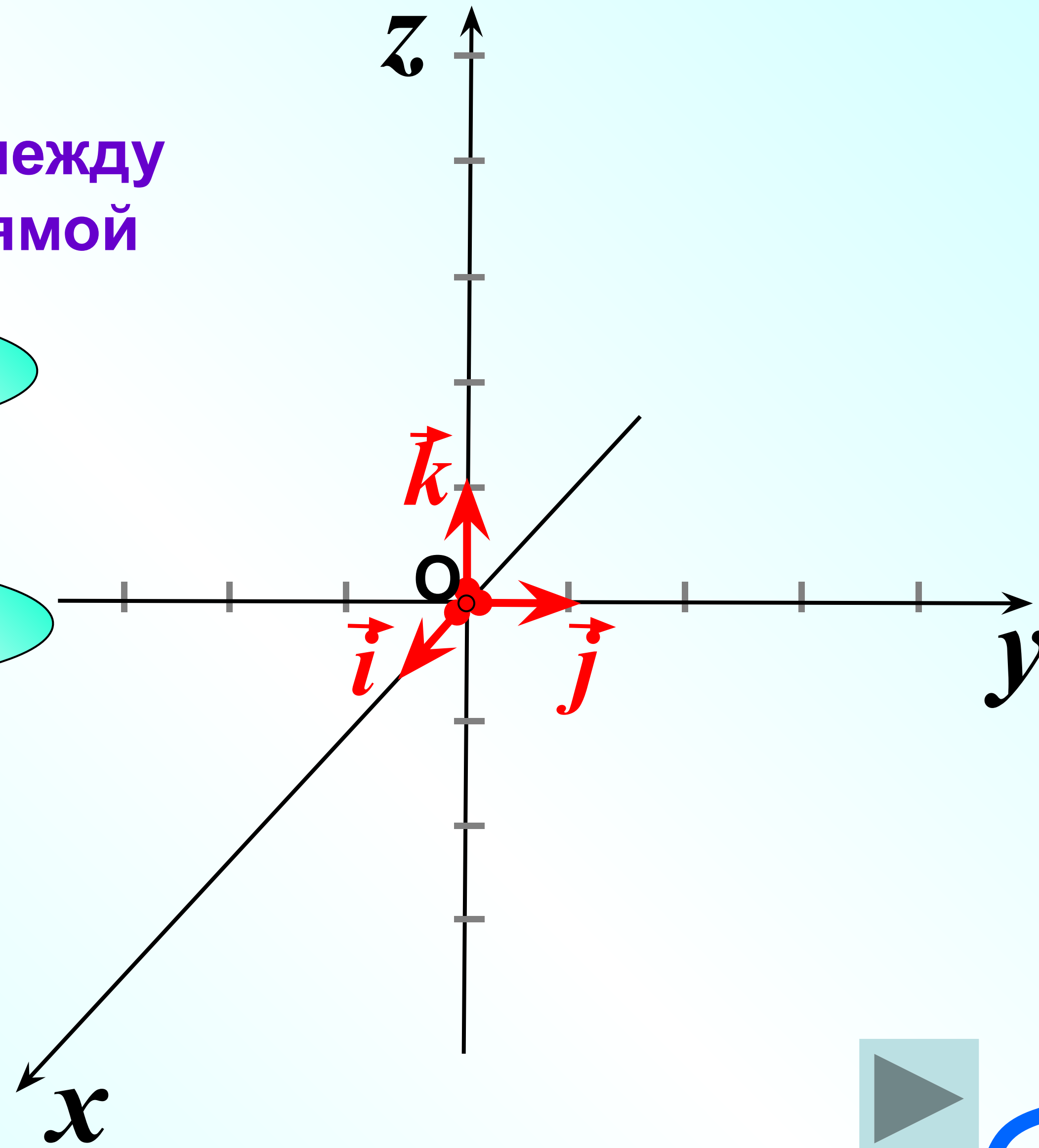
равно нулю, т.к. угол между векторами прямой

1 | 1 | ПОДУМАЙ!

2 | – 1 | ПОДУМАЙ!

3 | 0 | ВЕРНО!

Проверка



Скалярный квадрат вектора $7\vec{i}$ равен:

ВЕРНО!

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

1 49

$$(7\vec{i})^2 = |7\vec{i}|^2 = 7^2 = 49$$

2 7

ПОДУМАЙ!

3 1

ПОДУМАЙ!

Проверка

Записать координаты вектора $\vec{n} = -8\vec{j} + \vec{i}$

1 $\vec{n}\ \{-8;\ 1;\ 0\}$

ПОДУМАЙ!

2 $\vec{n}\ \{1;-8;\ 0\}$

ВЕРНО!

3 $\vec{n}\ \{1;\ 0;-8\}$

ПОДУМАЙ!

Найдите угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если

$$\vec{m}\cdot\vec{n} = -15, \quad |\vec{m}| = 5, \quad |\vec{n}| = 6.$$

ПОДУМАЙ!

1 50^0

ПОДУМАЙ!

2 60^0

ВЕРНО!

3 120^0

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда , когда угол между векторами тупой

Проверка

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, ребро которого равно 1.

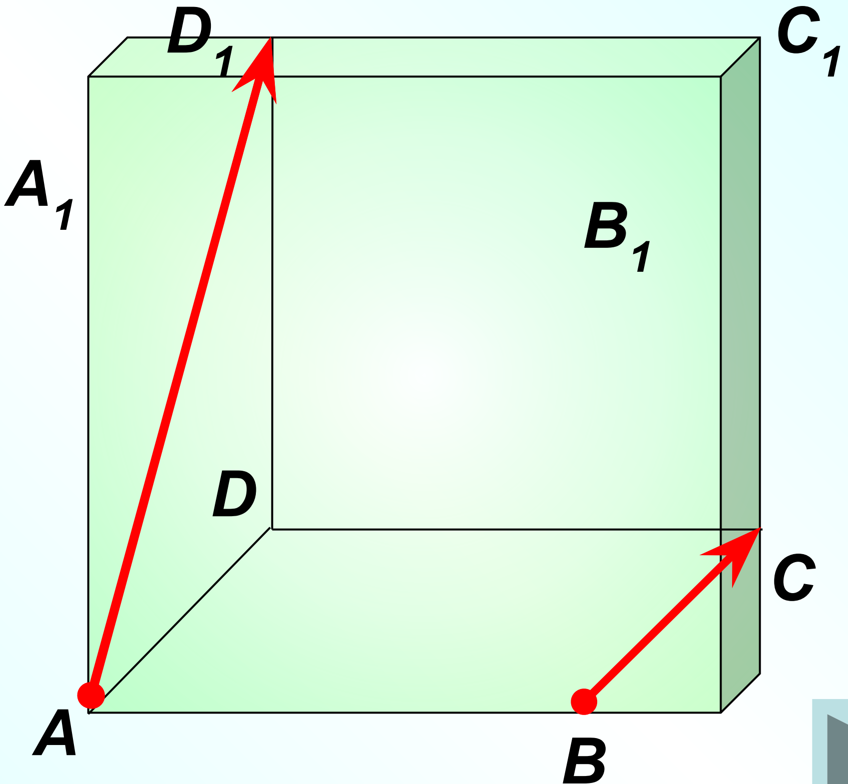
Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BC_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos 45^0=1\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1$$

1 4; ПОДУМАЙ!

2 2; ПОДУМАЙ!

3 1. ВЕРНО!



Проверка (3)