

Савченко Е.М., учитель математики, МОУ гимназия № , г. Полярные Зори, Мурманской обл.



Скалярное произведение векторов

Л.С. Атанасян "Геометрия 10-11"

Угол между векторами

A

\vec{a}

B

\vec{b}

\vec{b}

$\vec{a} \ \vec{b} = \alpha$

α

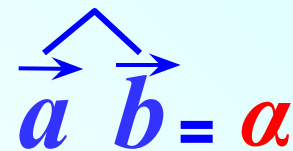
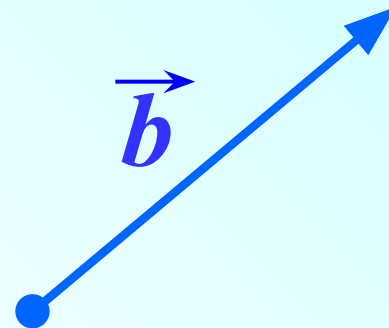
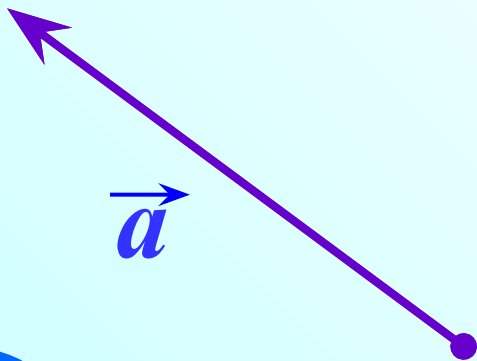
O

Лучи OA и OB образуют угол AOB.

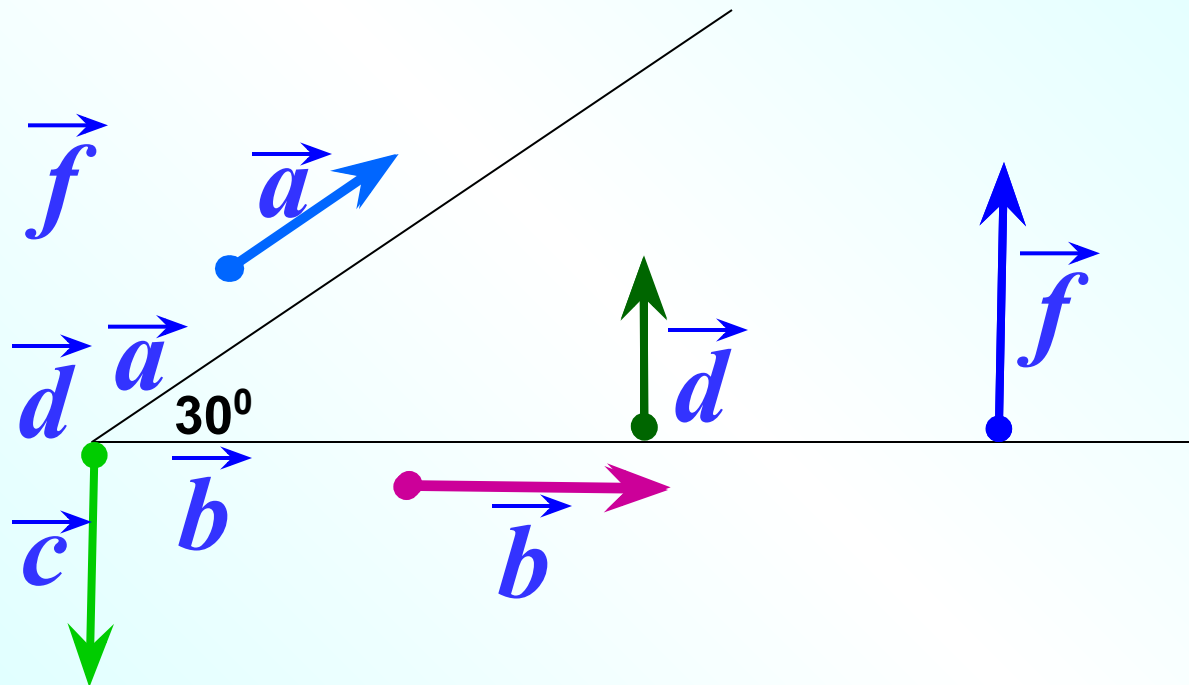
Градусную меру этого угла обозначим буквой α

Угол между векторами
равен α

\vec{a} и \vec{b}



Найти углы между векторами.



$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 30^\circ$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{c}} = 120^\circ$$

$$\widehat{\vec{b} \vec{c}} = 90^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{c}} = 180^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{f}} = 0^\circ$$

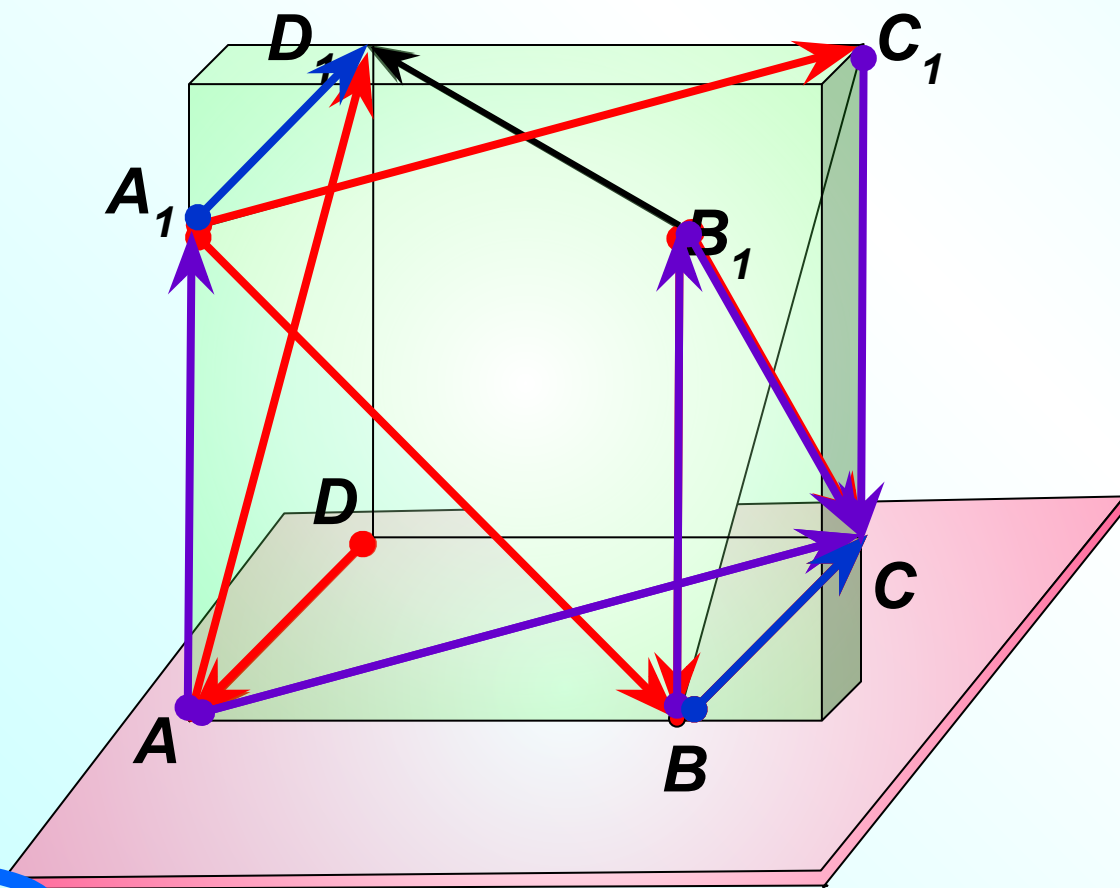
Два вектора называются
перпендикулярными,
если угол между ними равен 90° .

$$\vec{b} \perp \vec{c}$$

$$\vec{b} \perp \vec{d}$$

$$\vec{b} \perp \vec{f}$$

№ 441 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.
 Найдите угол между векторами.



$$\overrightarrow{B_1 B}, \overrightarrow{B_1 C} = 45^\circ$$

$$\overrightarrow{D A}, \overrightarrow{B_1 D_1} = 135^\circ$$

$$\overrightarrow{A_1 C_1}, \overrightarrow{A_1 B} = 60^\circ$$

$$\overrightarrow{B C}, \overrightarrow{A C} = 45^\circ$$

$$\overrightarrow{B_1 C}, \overrightarrow{A D_1} = 90^\circ$$

$$\overrightarrow{B B_1}, \overrightarrow{A C} = 90^\circ$$

$$\overrightarrow{A_1 D_1}, \overrightarrow{B C} = 0^\circ$$

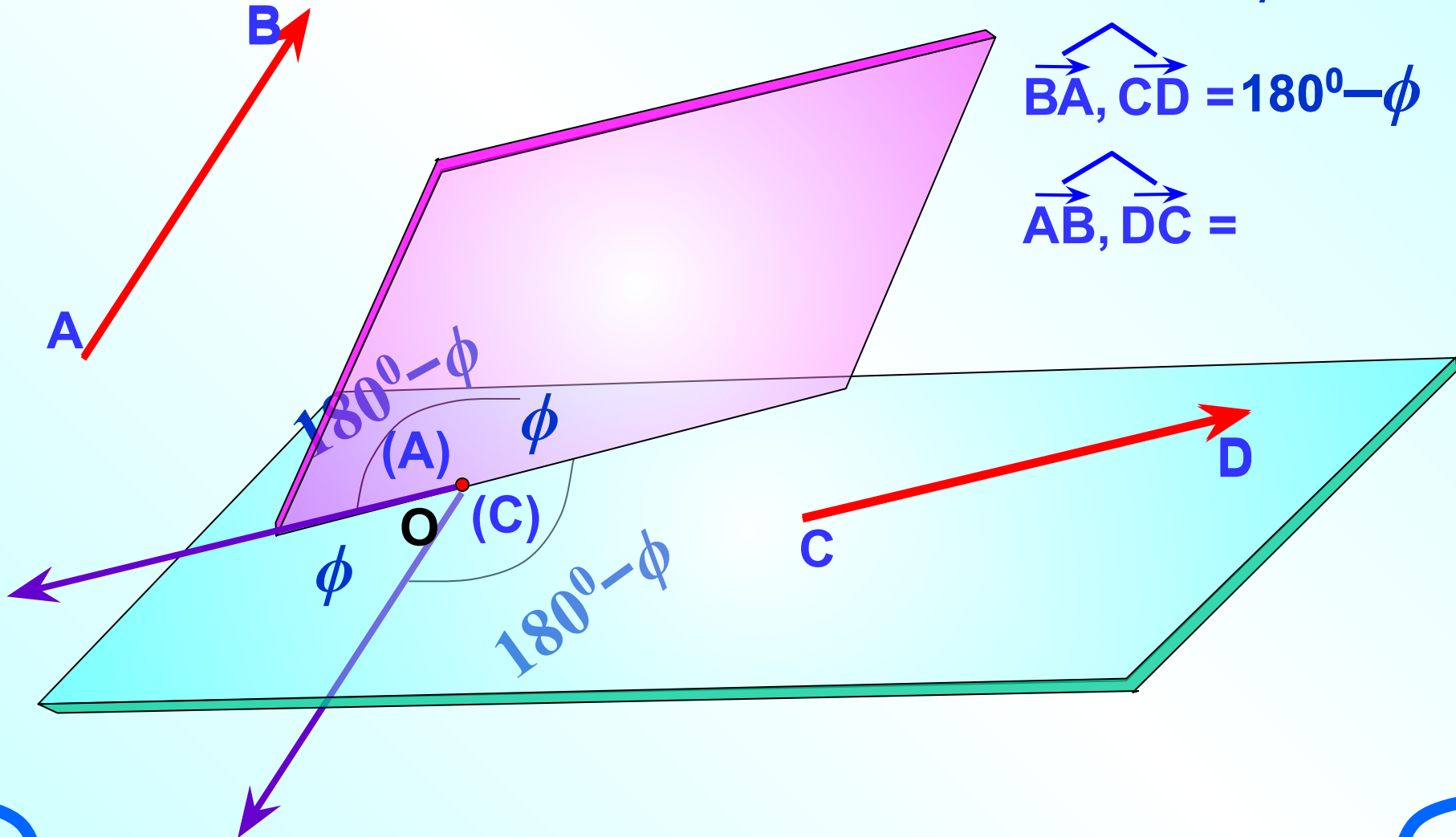
$$\overrightarrow{A A_1}, \overrightarrow{C_1 C} = 180^\circ$$

№ 442 Угол между векторами \vec{AB} и \vec{CD} равен ϕ .
 Найдите углы между векторами

$$\overbrace{\vec{BA}, \vec{DC}} = \phi$$

$$\overbrace{\vec{BA}, \vec{CD}} = 180^\circ - \phi$$

$$\overbrace{\vec{AB}, \vec{DC}} =$$



Сумма векторов – вектор.

Разность векторов – вектор.

Произведение вектора на число – вектор.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

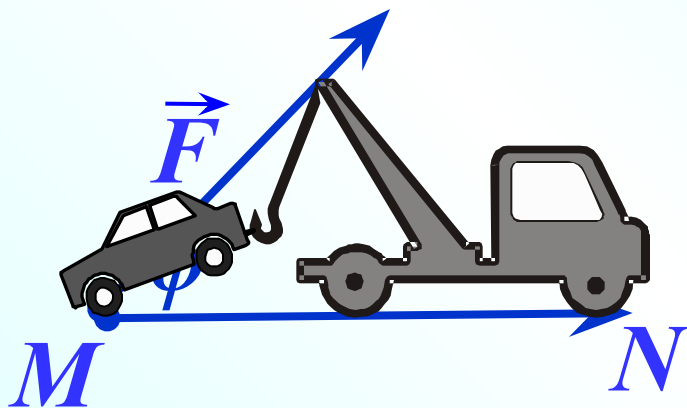
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

Скаляр – лат. *scale* – лестница, шкала.

Ввел в 1845г. У. Гамильтон, английский математик.

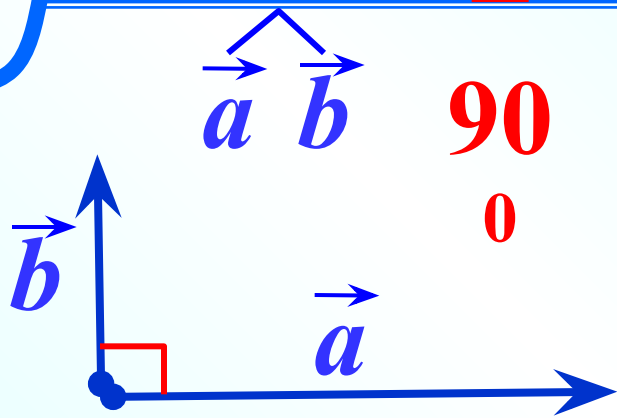
Скалярное произведение в физике



Скалярное произведение векторов встречается в физике. Например, из курса механики известно, что работа A постоянной силы \vec{F} при перемещении тела из точки M в точку N равна произведению силы \vec{F} и перемещения \vec{MN} на косинус угла между ними.

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{MN}| \cos \phi$$

$$A = \vec{F} \cdot \vec{MN}$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

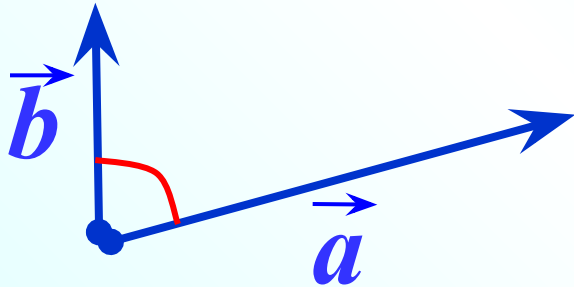
Если векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны, то скалярное произведение векторов равно нулю.

Обратно: если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны.

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \vec{b} \begin{matrix} < \\ 90 \\ 0 \end{matrix}$$



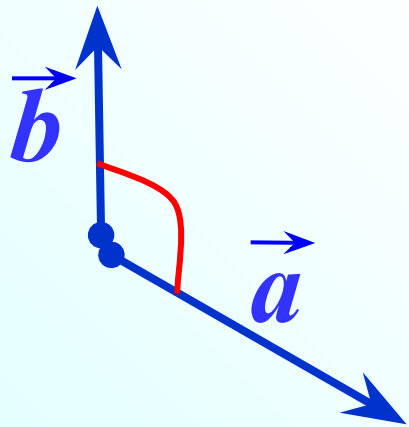
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha \begin{matrix} > \\ 0 \\ > \\ 0 \end{matrix}$$

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда , когда угол между векторами **острый**.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \iff \vec{a} \vec{b} \begin{matrix} < \\ 90 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

90°

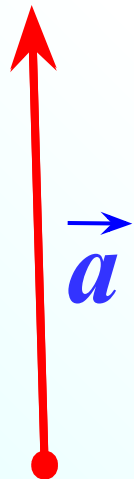
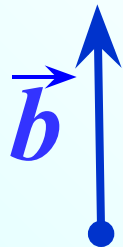


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha < 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \iff \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$

90°

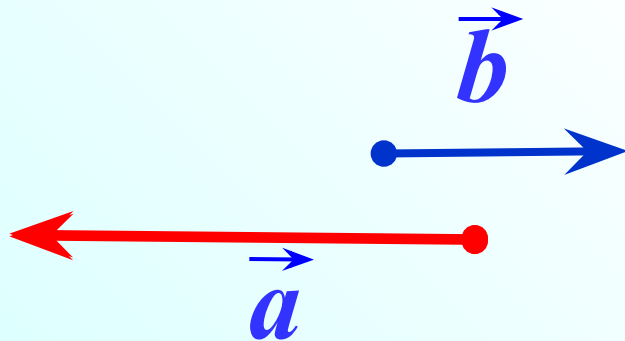


Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

$\vec{a} \ \vec{b} = 0^0$

1

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 0^0 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$



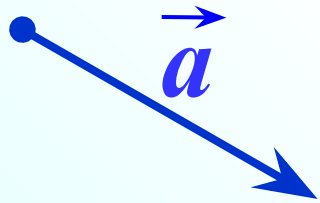
Если $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$

$\vec{a} \ \vec{b} = 180^0$

-1

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 180^0 = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = 0^0$$



$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos \overset{\textcircled{1}}{0^0} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора \vec{a} и обозначается \vec{a}^2

Таким образом,
скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

№ 443 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб. Найдите скалярное произведение векторов

$$\vec{AD} \cdot \vec{B_1 C_1}$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{C_1 A_1}$$

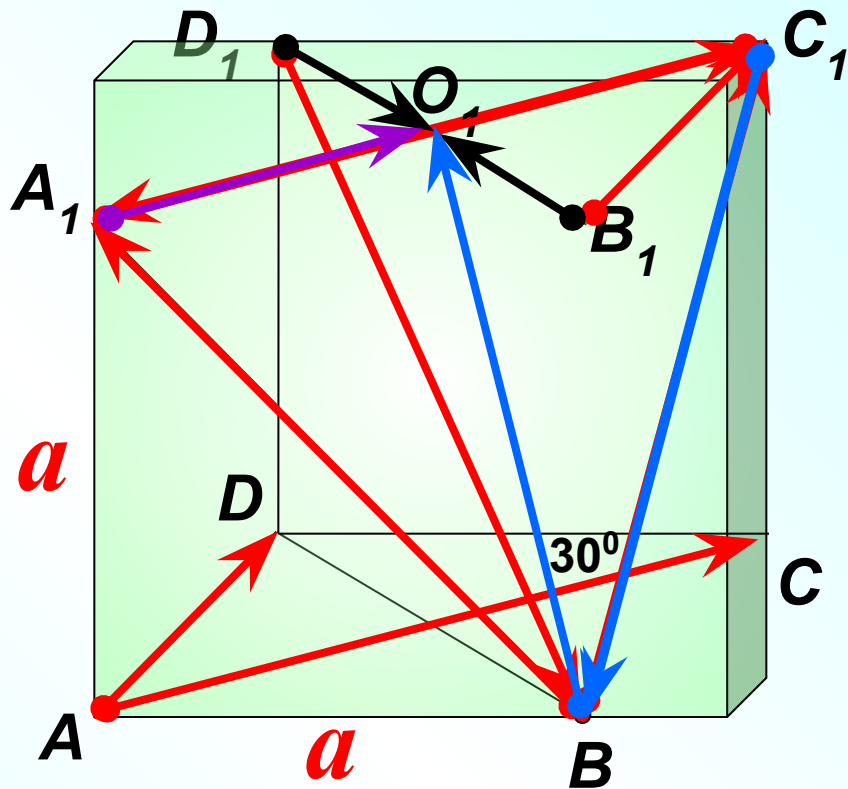
$$\vec{D_1 B} \cdot \vec{AC}$$

$$\vec{BA_1} \cdot \vec{BC_1}$$

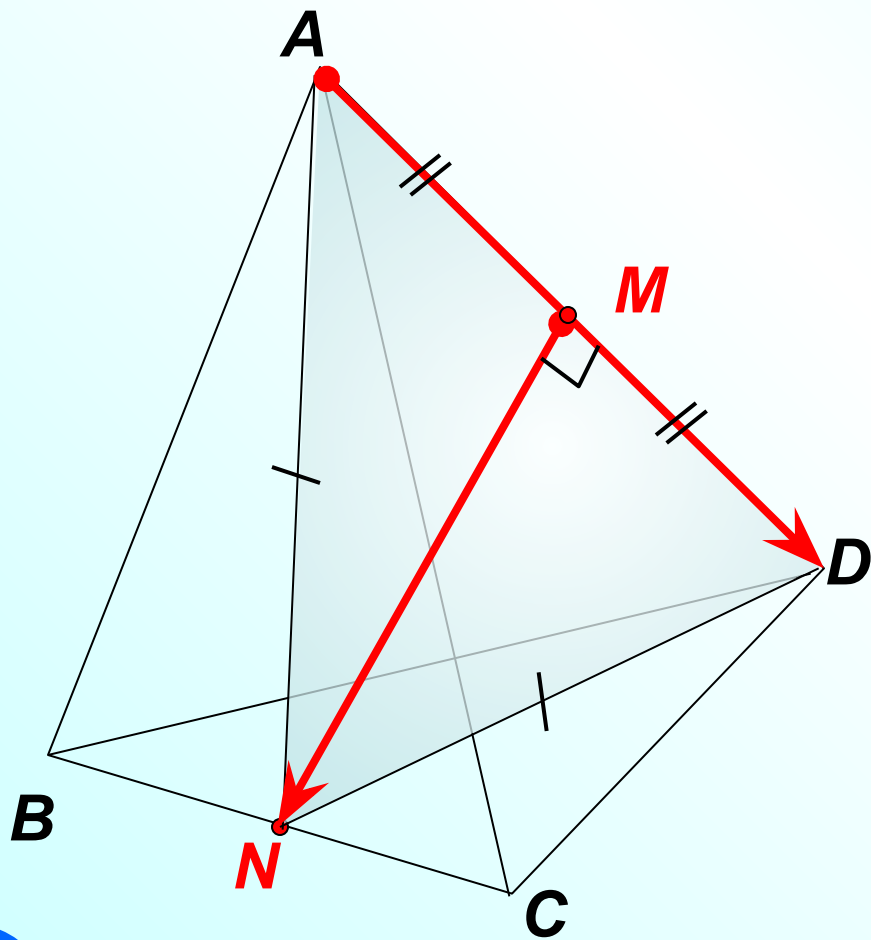
$$\vec{A_1 O_1} \cdot \vec{A_1 C_1}$$

$$\vec{D_1 O_1} \cdot \vec{B_1 O_1}$$

$$\vec{BO_1} \cdot \vec{C_1 B}$$



Все ребра тетраэдра $ABCD$ равны друг другу. Точки M и N – середины ребер AD и BC . Докажите, что $\vec{MN} \cdot \vec{AD} = 0$



Маленький тест

На каком расстоянии от плоскости xOy находится точка $A(2; -3; 5)$

1 2

ПОДУМАЙ

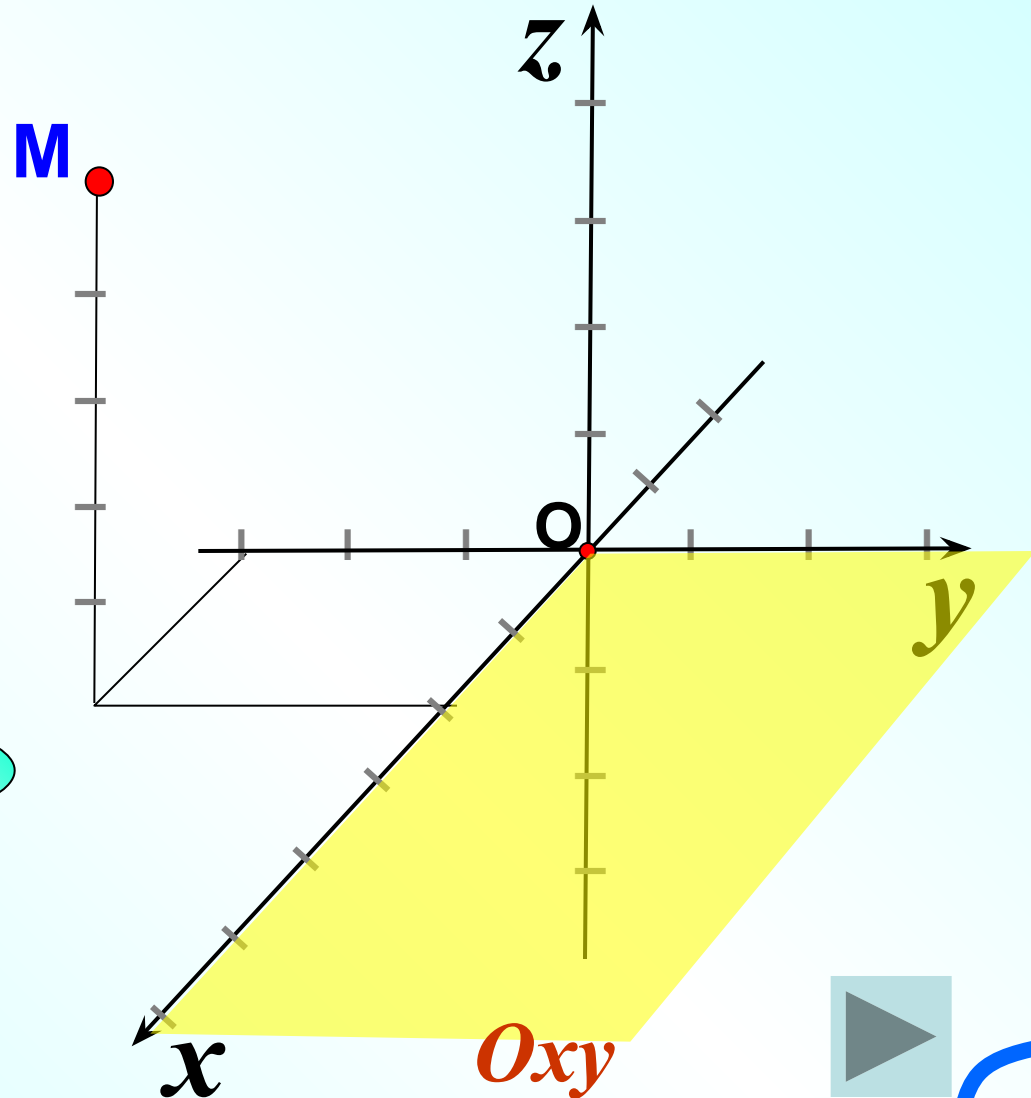
2 5

ВЕРНО!

3 3

ПОДУМАЙ

Проверка



На каком расстоянии от начала координат находится точка $A(-3; 4; 0)$

1

5;

2

4;

3

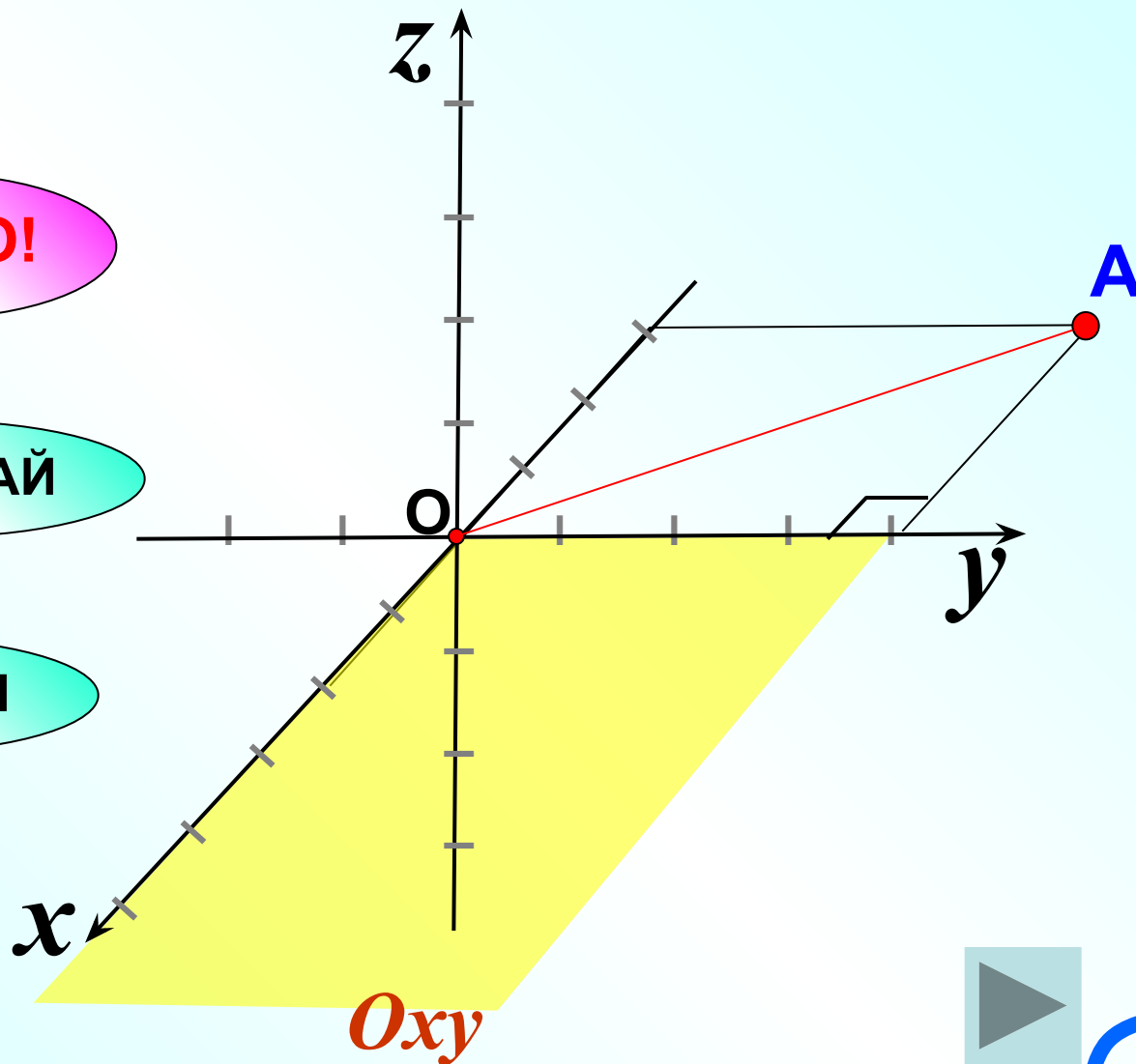
3.

Проверка

ВЕРНО!

ПОДУМАЙ

ПОДУМАЙ



Найти координаты середины отрезка, если концы его имеют координаты $A(-3; 2; -4)$ и $B(1; -4; 2)$

$$C\left(\frac{-3 + 1}{2}, \frac{2 + (-4)}{2}, \frac{-4 + 2}{2}\right)$$

ПОДУМАЙ

1 $C(-2; 1; -1)$

!

2 $C(-1; -1; -1)$

ВЕРНО!

3 $C(-2; -2; -2)$

ПОДУМАЙ

!

Проверка



Дан квадрат ABCD.

Найдите угол между векторами \vec{AC} и \vec{DA} .

1 135° ;

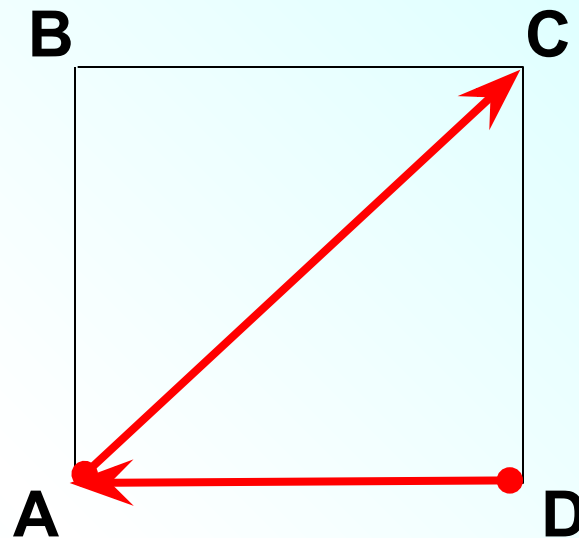
ВЕРНО!

2 45° ;

ПОДУМАЙ!

3 90° .

ПОДУМАЙ!



Проверка



Скалярное произведение координатных векторов

\vec{k} и \vec{j} :

равно нулю, т.к. угол между векторами прямой

1 1

ПОДУМАЙ

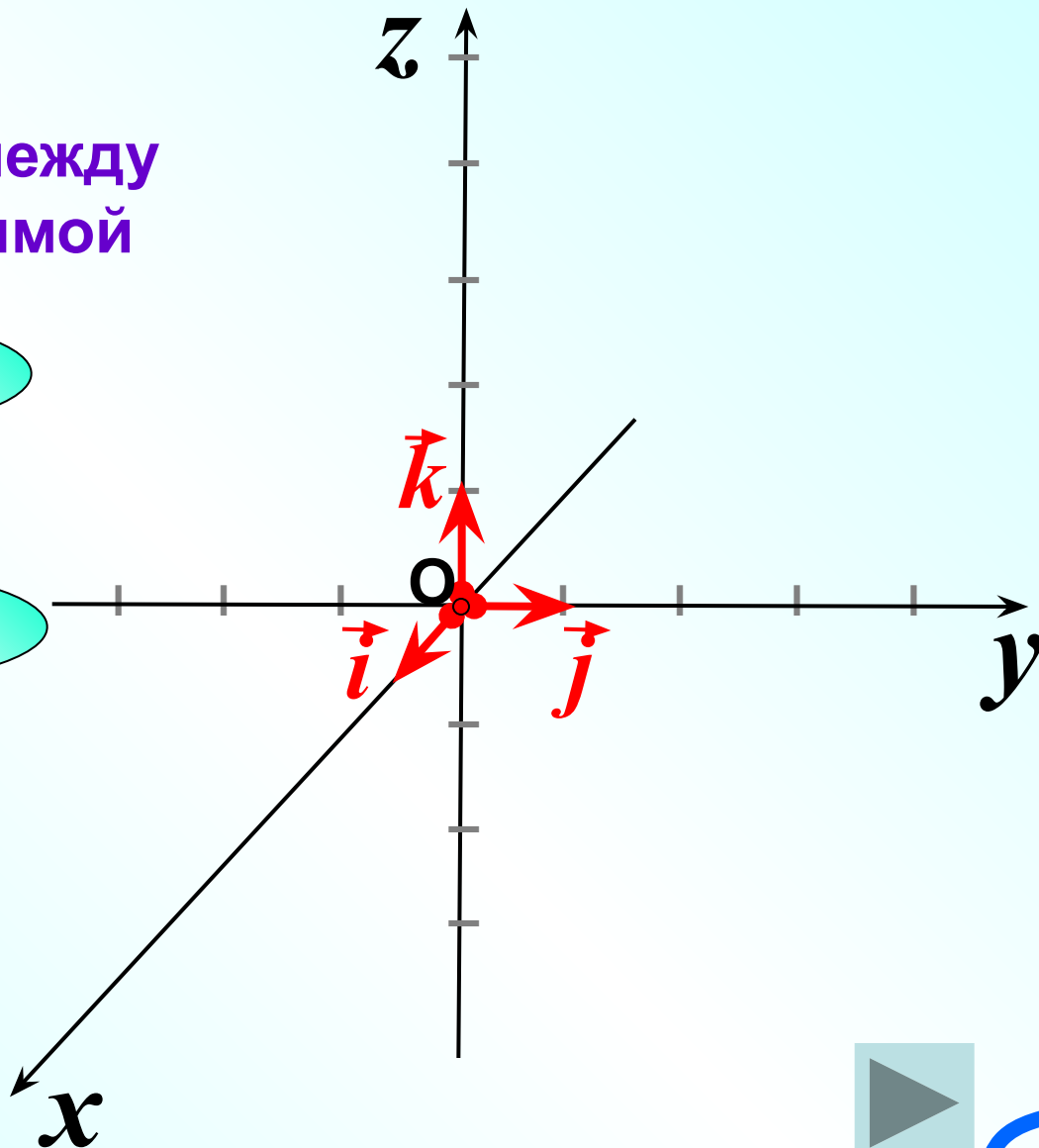
2 -1

ПОДУМАЙ

3 0

ВЕРНО!

Проверка



Скалярный квадрат вектора $7\vec{i}$ равен:

ВЕРНО!

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

1 49

2 7

ПОДУМАЙ

3 1

ПОДУМАЙ

$$(7\vec{i})^2 = |7\vec{i}|^2 = 7^2 = 49$$

Проверка



Записать координаты вектора $\vec{n} = -8\vec{j} + \vec{i}$

1 $\vec{n} \{-8; 1; 0\}$

ПОДУМАЙ
!

2 $\vec{n} \{1; -8; 0\}$

ВЕРНО!

3 $\vec{n} \{1; 0; -8\}$

ПОДУМАЙ
!



Найдите угол между векторами \vec{m} и \vec{n} , если

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = -15, \quad |\vec{m}| = 5, \quad |\vec{n}| = 6.$$

1

50°

ПОДУМАЙ

!

2

60°

ПОДУМАЙ

!

3

120°

ВЕРНО!

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**

Проверка



$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб, ребро которого равно 1.
 Найдите скалярное произведение векторов \vec{AD}_1 и \vec{BC} .

$$\vec{BC}_1 \cdot \vec{BC} = |\vec{BC}_1| \cdot |\vec{BC}| \cos 45^\circ = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

1

4;

ПОДУМАЙ
!

2

2;

ПОДУМАЙ
!

3

1.

ВЕРНО!

Проверка (3)

