

Раздел 7. Неопределённый

интеграл

Интегрирование как действие, обратное дифференцированию

Пусть дана функция $y = f(x)$.

Так как производная любой постоянной $(c)' = 0$,

$$(f(x) + c)' = f'(x)$$

Выполняя обратную дифференцированию операцию интегрирования, получим

$$\int f'(x) dx = f(x) + c.$$

* Если b – заданная постоянная (параметр), из последнего равенства получим

$$\int b \cdot f'(x) dx = b \cdot f(x) + c,$$

где c – новая произвольная постоянная.

Если C - произвольная постоянная, a – параметр (заданная постоянная), с учётом равенства $\int \frac{d}{dx} x^a dx = \int x^a dx + C$ получим:

1) для степенной функции $y = x^a$,

$$\frac{d}{dx} x^a = a \cdot x^{a-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\int x^{a-1} dx = \frac{x^a}{a} + C$$

2) для показательной функции $y = e^{ax}$

$$\frac{d}{dx} e^{ax} = a \cdot e^{ax} \quad \Leftrightarrow$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

3) для логарифмической функции $y = \ln x$

$$\left(\frac{d}{dx} \ln x \right) = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

4) для тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$

$$y = \sin x \text{ и } y = \cos x$$

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x \quad \Leftrightarrow$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x \quad \Leftrightarrow$$

$$\int (-\sin x) dx = \cos x + C$$

$$\frac{d(\tan x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\frac{d(\cot x)}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\int \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = \cot x + C$$

5) для обратных тригонометрических функций:

$$\frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$$

$$\frac{d(\arccos x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d(\arctan x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \arctan x + C \\ -\operatorname{arccot} x + C \end{cases}$$

$$\frac{d(\operatorname{arccot} x)}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$$

7.1. Первообразная. Неопределённый и его свойства

Функция $F(x)$ называется **первообразной функцией** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство: $F'(x) = f(x)$.

Неопределённым интегралом функции $f(x)$ называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением $F(x) + C$.

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Основные свойства неопределённого интеграла:

1. $\left(\int f(x) dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$

2. $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx;$

3. $\int dF(x) = F(x) + C;$

4. $\int (u + v - w) dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx;$ где u, v, w – функции от x .

5. $\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx;$

Таблица основных интегралов

$$\int f'(x) dx = f(x) + c$$

c – произвольная постоянная

a – параметр

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1;$$

$$\int e^x dx = e^x + c,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c;$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} = c;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c;$$

$$\int dx = x + c;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c;$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c$$

Способ подстановки (метод замены переменных).

Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но по таблице сложно найти первообразную, то с помощью замены $x \Rightarrow \varphi(t)$, $dx \Rightarrow \varphi'(t) dt$ получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

- Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

Р е ш е н и е: Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$:

$$\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

О т в е т: $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$

- Пример. $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx.$

Замена $t = x^2 + 1$; $dt = 2x dx$; $dx = \frac{dt}{2x}$; Получаем:

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C;$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u \quad \Leftrightarrow \quad d(uv) = u dv + v du$$

где u и v – некоторые функции от x .

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int u dv + \int v du$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int u dv + \int v du \quad \text{или} \quad \int u dv = uv - \int v du$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{5x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = e^{5x} dx; \\ du = 2x dx; \quad v = \frac{e^{5x}}{5}; \end{array} \right\} = \frac{1}{5} e^{5x} x^2 - \int \frac{1}{5} e^{5x} 2x dx = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \int x e^{5x} dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = e^{5x} dx; \\ du = dx; \quad v = \frac{1}{5} e^{5x}; \end{array} \right\} = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \left[\frac{x e^{5x}}{5} - \int \frac{1}{5} e^{5x} dx \right] = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2x e^{5x}}{25} + \frac{2}{25} \int e^{5x} dx = \\ &= \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2x e^{5x}}{25} + \frac{2 e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5} \left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25} \right). \end{aligned}$$

Разложение дробно - рациональной функции на элементарные дроби по методу неопределённых коэффициентов

Если $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель которой

$$P(x) = (x - a)^\alpha \dots (x - b)^\beta (x^2 + px + q)^\lambda \dots (x^2 + rx + s)^\mu$$

то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\begin{aligned} \frac{Q(x)}{P(x)} = & \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \\ & + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \dots + \frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2} + \dots + \frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu} \end{aligned}$$

Для нахождения величин A_i , B_i , M_i , N_i , R_i , S_i применяют так называемый **метод неопределённых коэффициентов**, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x .

Пример. Разложить функцию
на элементарные дроби

$$\frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x - 2)(x - 4)(x^2 + 4)}$$

РЕШЕНИЕ

$$\frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x - 2)(x - 4)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 4} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$$

Приводя к общему знаменателю и приравнявая соответствующие числители, получаем:
 $A(x - 4)(x^2 + 4) + B(x - 2)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 - 6x + 8) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88 \quad <=>$

$$(A + B + C)x^3 + (-4A - 2B - 6C + D)x^2 + (4A + 4B + 8C - 6D)x + (-16A - 8B + 8D) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88.$$

$$\begin{cases} A + B + C = 9 \\ -4A - 2B - 6C + D = -30 \\ 4A + 4B + 8C - 6D = 28 \\ -16A - 8B + 8D = -88 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 5 \\ B = 3 \\ C = 1 \\ D = 2 \end{cases}$$

О т в е т:

$$\frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x - 2)(x - 4)(x^2 + 4)} = \frac{5}{x - 2} + \frac{3}{x - 4} + \frac{x + 2}{x^2 + 4}$$

Интегрирование простейших элементарных дробей

$$\bullet \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a} \ln|t| + C = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C.$$

$$\bullet \int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$$

$$\bullet \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$
$$= \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot$$

$$\cdot \arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

Пример.

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4} dx = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48} dx = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23} dx = \left. \begin{array}{l} u = 6x-5; \quad du = 6dx; \\ x = \frac{u+5}{6}; \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{6} \int \frac{14u+70-24}{u^2+23} du = \frac{7}{3} \int \frac{udu}{u^2+23} + \frac{23}{3} \int \frac{du}{u^2+23} = \frac{7}{6} \ln(u^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{23}} + C =$$

$$= \frac{7}{6} \ln |36x^2 - 60x + 48| + \frac{\sqrt{23}}{3} \operatorname{arctg} \frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C.$$

- Пример.

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40} dx = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x+3; \quad du = dx; \\ x = u-3; \end{array} \right\} = \int \frac{5u-15-3}{u^2-49} du = 5 \int \frac{udu}{u^2-49} -$$

$$-18 \int \frac{du}{u^2-49} = \frac{5}{2} \ln |u^2-49| - \frac{18}{14} \ln \left| \frac{u-7}{u+7} \right| + C = \boxed{\frac{5}{2} \ln |x^2+6x-40| - \frac{9}{7} \ln \left| \frac{x-4}{x+10} \right| + C.}$$

- Пример.

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}} dx = \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x-3; \quad du = dx; \\ x = u+3; \end{array} \right\} = \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}} du = 3 \int \frac{udu}{\sqrt{16-u^2}} +$$

$$+13 \int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} = -3\sqrt{16-u^2} + 13 \arcsin \frac{u}{4} + C = \boxed{-3\sqrt{7-x^2-6x} + 13 \arcsin \frac{x-3}{4} + C.}$$

Общая схема интегрирование рациональных дробей вида

$$\frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

$$\int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = (4a)^n \int \frac{Mx + N}{[(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)]^n} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 2ax + b; \quad du = 2a dx, \\ x = \frac{u - b}{2a}; \quad s = 4ac - b^2; \end{array} \right\} =$$
$$= \frac{(4a)^n}{2a} \int \frac{\frac{M(u - b)}{2a} + N}{(u^2 + s)^n} du = \frac{(4a)^n}{2a} \left[\frac{M}{2a} \int \frac{u du}{(u^2 + s)^n} + \frac{2aN - Mb}{2a} \int \frac{du}{(u^2 + s)^n} \right]$$

M, N, a, b, c, n - заданные постоянные числа - параметры

Пример:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2} dx &= \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x-2; \quad du = dx; \\ x = u+2; \end{array} \right\} = \\ &= 3 \int \frac{udu}{(u^2+3)^2} + 11 \int \frac{du}{(u^2+3)^2} = \left\{ \begin{array}{l} t = u^2+3; \\ dt = 2udu; \end{array} \right\} = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2} + 11 \left[\frac{u}{3 \cdot 2(u^2+3)} + \frac{1}{3 \cdot 2} \int \frac{du}{u^2+3} \right] = \\ &= -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{3}} + C = \\ &= -\frac{3}{2(x^2-4x+7)} + \frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Пример Найти $I = \int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx$

Т.к. дробь неправильная, то предварительно следует выделить у нее целую часть:

$$\begin{array}{r|l} -\frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{6x^5 - 8x^4 - 34x^3 + 12x^2} & \frac{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6}{2x^2 + 3} \\ \hline -\frac{9x^3 + 8x^2 - 76x - 7}{9x^3 - 12x^2 - 51x + 18} & \end{array}$$

$$\int \left[2x^2 + 3 + \frac{20x^2 - 25x - 25}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} \right] dx = \int 2x^2 dx + \int 3 dx + 5 \int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x +$$

$$+ 5 \int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx = \int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3 \int \frac{dx}{x+2} + 2 \int \frac{dx}{x-3} + 5 \int \frac{dx}{3x-1} =$$

О т в е т: $I = \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3 \ln|x+2| + 2 \ln|x-3| + \frac{5}{3} \ln|3x-1| + C.$

Интегрирование тригонометрических функций.

$\int R(\sin x, \cos x) dx$ R - рациональная функции от переменных $\sin x$ и $\cos x$.

Вычисляется универсальной тригонометрической подстановкой.

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\Rightarrow \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2};$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} = \left\| \begin{array}{l} x = 2 \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right\| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$
$$= 2 \int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = 2 \int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{t+2} + C = \left\| t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right\| = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} + C.$$