Раздел 7. Неопределённый интеграл

Интегрирование как действие, обратное дифференцированию

Пусть *дана функция* $y = f(x)$.

Так как производная любой постоянной $(c)' = 0$,

$$\boxed{(f(x) + c)' = f'(x)}$$

Выполняя обратную дифференцированию операцию интегрирования, получим

$$\boxed{\int f'(x)dx = f(x) + c.}$$

$*$ Если b – заданная постоянная (параметр), из последнего равенства получим

$$\boxed{\int b \cdot f'(x)dx = b \cdot f(x) + c,}$$

где c - новая произвольная постоянная.

Если C - произвольная постоянная, a – параметр (заданная постоянная), с учётом равенства $\int f'(x)dx = f(x) + C$ получим:

1) для степенной функции $y = x^{a}$,

$$(x^{a})' = a \cdot x^{a-1} \quad <=> \quad \int x^{a-1}dx = \frac{x^{a}}{a} + C$$

2) для показательной функции $y = a^{x}$

$$(a^{x})' = a^{x} \cdot \ln a \quad <=> \quad \int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + \mathbf{c}$$

3) для логарифмической функции $y = \ln x$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad <=> \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \mathbf{c}$$

4) для тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$:

$$(\sin x)' = \cos x \quad <=> \quad \int \cos x \, dx = \sin x + c;$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad <=> \quad \int (-\sin x) \, dx = \cos x + c;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad <=> \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad <=> \quad \int \left(-\frac{dx}{\sin^2 x}\right) = \operatorname{ctg} x + c$$

5) для обратных тригонометрических функций:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=> \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c \end{cases}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad => \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c \\ -\operatorname{arcctg} x + c \end{cases}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

7.1. Первообразная. Неопределённый и его свойства

Функция F(x) называется **первообразной функцией** функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство: $F'(x) = f(x)$.

Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением F(x) + C.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – функции от x.
5. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$

Таблица основных интегралов

$$\boxed{\int f'(x)dx = f(x) + c}$$

c − произвольная постоянная $\quad\quad$ a − параметр

$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1;$ $\quad\quad$ $\int dx = x + c;$

$\int e^x dx = e^x + c,$ $\quad\quad$ $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c;$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + c;$ $\quad\quad$ $\int \cos x\, dx = \sin x + c;$

$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left|tg\frac{x}{2}\right| + c,$ $\quad\quad$ $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right| + c;$

$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\, x + c;$ $\quad\quad$ $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctg\, x + c;$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c;$ $\quad\quad$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c;$

$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arcctg\, \frac{x}{a} = c;$ $\quad\quad$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + c;$

$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c;$ $\quad\quad$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

Способ подстановки (метод замены переменных).

Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но по таблице сложно найти первообразную, то с помощью замены x = > φ(t), dx = > φ′(t) dt получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

- <u>Пример.</u> Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

  Р е ш е н и е: Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos x\, dt$:

  $$\int \sqrt{\sin x}\cos x dx = $$ [illegible] = > [illegible], [illegible] = > [illegible] =.

  $$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

  О т в е т: $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx = \frac{2}{3}$ ξ [illegible] + C.

- <u>Пример.</u> $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

  Замена $t = x^2 + 1;\quad dt = 2xdx;\quad dx = \frac{dt}{2x};$ Получаем:

  $$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u \quad <=> \quad d(uv) = udv + vdu$$

где u и v – некоторые функции от x.

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$uv = \int udv + \int vdu$ или

$$\int udv = uv - \int vdu$$

<u>Пример.</u>

$$\int x^2 e^{5x} dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2; & dv = e^{5x} dx; \\ du = 2xdx; & v = \dfrac{e^{5x}}{5}; \end{matrix} \right\} = \frac{1}{5} e^{5x} x^2 - \int \frac{1}{5} e^{5x} 2xdx = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \int xe^{5x} dx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = x; & dv = e^{5x} dx; \\ du = dx; & v = \dfrac{1}{5} e^{5x}; \end{matrix} \right\} = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \left[\frac{xe^{5x}}{5} - \int \frac{1}{5} e^{5x} dx \right] = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2}{25} \int e^{5x} dx =$$

$$= \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5} \left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25} \right).$$

Разложение дробно - рациональной функции на элементарные дроби по методу неопределённых коэффициентов

Если $R(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель которой

$$P(x) = (x - a)^{\alpha}\dots(x - b)^{\beta}(x^2 + px + q)^{\lambda}\dots(x^2 + rx + s)^{\mu}$$

то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} +$$

$$+ \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \dots + \frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2} + \dots + \frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

Для нахождения величин A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i применяют так называемый **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x.

Пример. Разложить функцию на элементарные дроби $\dfrac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}$

РЕШЕНИЕ

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая соответствующие числители, получаем:

$$A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-6x+8)=9x^3-30x^2+28x-88 \quad <=>$$

$$(A+B+C)x^3+(-4A-2B-6C+D)x^2+(4A+4B+8C-6D)x+(-16A-8B+8D)=$$
$$=9x^3-30x^2+28x-88.$$

$$\begin{cases} A+B+C=9 \\ -4A-2B-6C+D=-30 \\ 4A+4B+8C-6D=28 \\ -16A-8B+8D=-88 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} A=5 \\ B=3 \\ C=1 \\ D=2 \end{cases}$$

Ответ: $$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{5}{x-2}+\frac{3}{x-4}+\frac{x+2}{x^2+4}$$

Интегрирование простейших элементарных дробей

- $$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \underline{\frac{1}{a}\ln|ax+b| + C}.$$

- $$\int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = \underline{-\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C};$$

- $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \underline{\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}} \cdot$$

$$\underline{\cdot\, arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C}$$

Пример.

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48}dx = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}dx = \left\{ \begin{matrix} u = 6x-5; & du = 6dx; \\ x = \dfrac{u+5}{6}; & \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{14u+70-24}{u^2+23}du = \frac{7}{3}\int \frac{udu}{u^2+23} + \frac{23}{3}\int \frac{du}{u^2+23} = \frac{7}{6}\ln(u^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}} arctg \frac{u}{\sqrt{23}} + C =$$

$$= \boxed{\frac{7}{6}\ln\left|36x^2-60x+48\right| + \frac{\sqrt{23}}{3} arctg \frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C.}$$

- <u>Пример.</u>

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49}dx = \left\{\begin{matrix} u = x+3; & du = dx; \\ x = u-3; & \end{matrix}\right\} = \int \frac{5u-15-3}{u^2-49}du = 5\int \frac{udu}{u^2-49} -$$

$$-18\int \frac{du}{u^2-49} = \frac{5}{2}\ln\left|u^2-49\right| - \frac{18}{14}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right| + C = \boxed{\frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right| - \frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right| + C.}$$

- <u>Пример.</u>

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}dx = \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx = \left\{\begin{matrix} u = x-3; & du = dx; \\ x = u+3; & \end{matrix}\right\} = \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}du = 3\int \frac{udu}{\sqrt{16-u^2}} +$$

$$+13\int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} = -3\sqrt{16-u^2} + 13\arcsin\frac{u}{4} + C = \boxed{-3\sqrt{7-x^2-6x} + 13\arcsin\frac{x-3}{4} + C.}$$

Общая схема интегрирование рациональных дробей вида

$$\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}dx=(4a)^n\int\frac{Mx+N}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n}dx=\left\{\begin{aligned}&u=2ax+b; \quad du=2adx;\\ &x=\frac{u-b}{2a}; \quad s=4ac-b^2;\end{aligned}\right\}=$$

$$=\frac{(4a)^n}{2a}\int\frac{\frac{M(u-b)}{2a}+N}{(u^2+s)^n}du=\frac{(4a)^n}{2a}\left[\frac{M}{2a}\int\frac{udu}{(u^2+s)^n}+\frac{2aN-Mb}{2a}\int\frac{du}{(u^2+s)^n}\right]$$

M, N, a, b, c, n - заданные постоянные числа - параметры

Пример:

$$\boxed{\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}\,dx} = \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x-2; & du = dx; \\ x = u+2; & \end{matrix}\right\} =$$

$$= 3\int \frac{udu}{(u^2+3)^2} + 11\int \frac{du}{(u^2+3)^2} = \left\{\begin{matrix} t = u^2+3; \\ dt = 2udu; \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2} + 11\left[\frac{u}{3\cdot 2(u^2+3)} + \frac{1}{3\cdot 2}\int \frac{du}{u^2+3}\right] =$$

$$= -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}\, arctg\,\frac{u}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \boxed{-\frac{3}{2(x^2-4x+7)} + \frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}\, arctg\,\frac{x-2}{\sqrt{3}} + C.}$$

Пример Найти $I = \int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6}\,dx$

Т.к. дробь неправильная, то предварительно следует выделить у нее целую часть:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7 & 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 \\ \cline{2-2}
\underline{6x^5 - 8x^4 - 34x^3 + 12x^2} \qquad\qquad\quad & 2x^2 + 3 \\
-\;9x^3 + 8x^2 - 76x - 7 & \\
\underline{9x^3 - 12x^2 - 51x + 18} & \\
20x^2 \qquad\qquad\quad &
\end{array}
$$

$$\int \left[2x^2 + 3 + \frac{20x^2 - 25x - 25}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} \right] dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx + 5\int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x +$$

$$+ 5\int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx \; = \; \int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3\int \frac{dx}{x+2} + 2\int \frac{dx}{x-3} + 5\int \frac{dx}{3x-1} =$$

Ответ: $I = \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3\ln|x+2| + 2\ln|x-3| + \frac{5}{3}\ln|3x-1| + C.$

Интегрирование тригонометрических функций.

$\int R(\sin x, \cos x)dx$ R - рациональная функции от переменных sin x и cos x.

Вычисляется **универсальной тригонометрической подстановкой.**

$$t = tg\frac{x}{2}, \qquad \cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \qquad \sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$=> \qquad x = 2arctgt, \qquad dx = \frac{2dt}{1 + t^2};$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \left\| \begin{matrix} x = 2arctgt \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{matrix} \right\| = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{4\dfrac{2t}{1+t^2} + 3\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} == 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{t+2} + C = \left\| t = tg\frac{x}{2} \right\| = -\frac{1}{tg\dfrac{x}{2} + 2} + C.}$$