Тема : «Элементы комбинаторики. Решение задач с применением формул комбинаторики»

История комбинаторики

- История комбинаторики освещает развитие комбинаторик – раздела конечной математики, который исследует в основном различные способы выборки заданного числа m элементов из заданного конечного множества: размещения, сочетания, перестановки, а также перечисление и смежные проблемы. Начав с анализа головоломок азартных игр, комбинаторика оказалась исключительно полезной для решения практических задач почти во всех разделах математики. Кроме того, комбинаторные методы оказались полезными в статистике, генетике, лингвистике и многих других науках.

Основные формулы комбинаторики

- комбинаторика – наука, изучающая комбинации, которые можно составить по определенным правилам из элементов некоторого конечного множества

Элементы комбинаторики

- **Размещения**

  Пусть дано множество, состоящее из ***n*** элементов.

  Размещением из ***n*** элементов по ***k*** элементов называется упорядоченное подмножество, содержащее ***k*** различных элементов данного множества. Эти подмножества могут отличаться друг от друга составом элементов или порядком их следования.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \ -\text{факториал числа } n, \quad 0! = 1$$

Элементы комбинаторики

- **Перестановки**

Пусть дано множество, состоящее из ***n*** элементов.

Перестановкой из ***n*** элементов называется размещение из ***n*** элементов по ***n*** элементов.

Различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!, \quad \text{т.е.} \quad P_n = n!$$

Элементы комбинаторики

Всевозможные комбинации из данных n элементов по m в каждой, отличающиеся друг от друга хотя бы 1 элементом, называются **сочетаниями из n элементов по m**.

См. задачу 2

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$$

Перестановки. Размещения. Комбинации

Определение	Пример
Перестановкой з n элементов называется любое упорядоченное множество (порядок элементов существенен), которое состоит из n элементов. $P_n = n!$, где P_n - число перестановок из n элементов.	Сколькими способами можно расставить на полке 5 книжек? $P_5=5!=1*2*3*4*5=120$
Размещением из m элементов по n называется любое упорядоченное подмножество из n элементов данного множества, которое содержит m элементов $(n \leq m)$. $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$ $A^n{}_m$-число размещений m элементов по n ячейкам	Сколькими способами можно выбрать старосту класса и его заместителя, если в классе учатся 20 человек? $A_{20}^2 = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = \frac{18! \cdot 19 \cdot 20}{18!} = 19 \cdot 20 = 380$
Комбинацией из m элементов по n называется любое подмножество из n элементов (порядок элементов несущественен) данного множества, которое содержит m элементов $(n \leq m)$. $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ где $C^n{}_m$- число комбинаций из m элементов по n ячейкам	Сколькими способами можно выбрать 2-х дежурный, если в классе учится 20 учеников? $C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{18! \cdot 19 \cdot 20}{2 \cdot 18!} = 19 \cdot 10 = 190$

Основные элементы комбинаторики.

Задача.1.
Сколько можно записать четырехзначных чисел, используя без повторения все 10 цифр?

Решение:

1) $A_{10}^{4} = \frac{10!}{6!} = 5040$.

2) Т.к. есть среди чисел 0, который не может стоять впереди, поэтому надо еще найти: $A_{9}^{3} = \frac{9!}{6!} = 504$

3) $A_{10}^{4} - A_{9}^{3} = 5040 - 504 = 4536.$

$$10! = 1*2*3*4*5*6*7*8*9*10 = 3628800$$

$$6! = 1*2*3*4*5*6 = 720$$

$$!(читаеся: факториал) - математическое\ действие$$

Основные элементы комбинаторики. Решение задач.

Задача.2.
Пусть имеется множество, содержащие 4 буквы: {А,В,С,Д}. Записать все возможные сочетания из указанных букв по три.

Решение:
Здесь в число сочетаний не включены, например АВС, ВСА, т.к. у нас уже есть АВС, потому что порядок элементов в сочетании не учитываются.

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4.$$

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = \frac{4!}{3!\,1!} = \frac{1*2*3*4}{1*2*3*1} = 4$$

(сократите в числителе и знаменателе

Задачи

- 4) Сколькими способами можно вызвать по очереди к доске 4 учеников из 7?
- **Решение.** Задача сводится к подсчету числа размещений из 7 элементов по 4

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$$

Основные элементы комбинаторики.

Решение задач.

Задача.4.

Нужно выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся книг. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

$$C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!*6!} = 210.$$

Задача.5.

Имеется 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров, чтобы среди них были 3 черных?

Решение: Белые шары: .

Черные шары: . Тогда

$$7_{ш} = 3_{ч} + 4_{б}$$

$$C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!*6!} = 210$$

$$C_{5}^{3} = \frac{5!}{3!*2!} = 10$$

$$C_{10}^{4} * C_{5}^{3} = 20 * 10 = 2100$$