Производная

Понятие производной

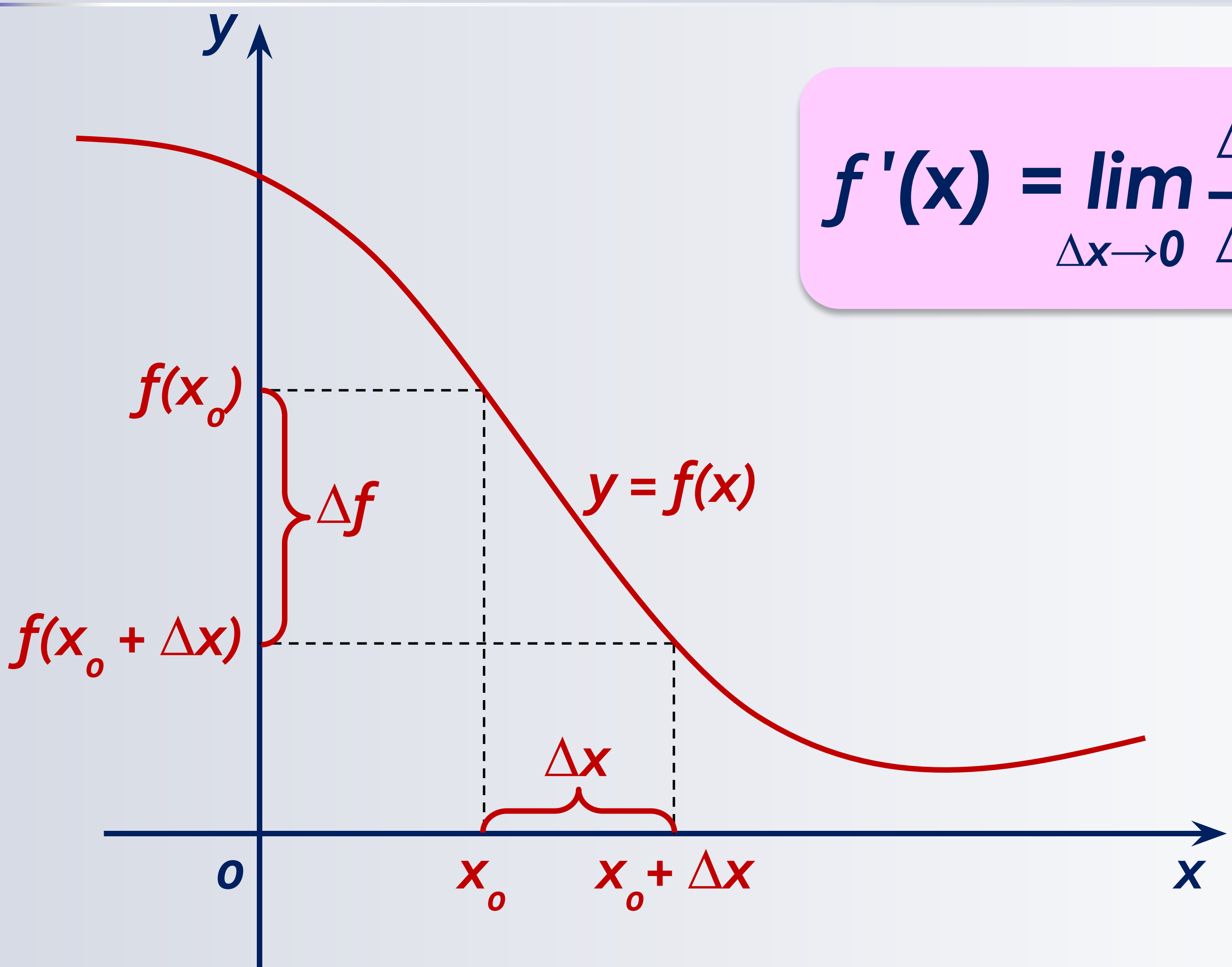
Производной функции y = f(x), заданной на некотором интервале (a; b), в некоторой точке x этого интервала называют предел отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Нахождение производной называют дифференцированием

Понятие производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



Алгоритм нахождения производной

1. *Зафиксировать значение x_o, найти $f(x_o)$.*
2. *Дать аргументу x_o приращение Δx, перейти в новую точку $x_o + \Delta x$, найти $f(x_o + \Delta x)$.*
3. *Найти приращение функции: $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$.*
4. *Составить отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.*
5. *Вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.*
6. *Этот предел и есть $f'(x_o)$.*

Примеры

1. Найти производную функции $y = kx + b$ в точке x_o

1. $f(x_o) = kx_o + b$
2. $f(x_o + \Delta x) = k(x_o + \Delta x) + b$
3. $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = k(x_o + \Delta x) + b - (kx_o + b) =$
   $= kx_o + k \cdot \Delta x + b - kx_o - b = k \cdot \Delta x$
4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{k \cdot \Delta x}{\Delta x} = k$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(k) = k$

$$(kx + b)' = k$$

Примеры

2. Найти производную функции y = C (C – const) в точке x_o

1. $f\left(x_o\right)=C$
2. $f\left(x_o+\Delta x\right)=C$
3. $\Delta f=f\left(x_o+\Delta x\right)-f\left(x_o\right)=C-C=0$
4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{0}{\Delta x}=0$
5. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$

$$\boxed{(C)'=0}$$

Примеры

3. Найти производную функции $y = x^2$ в точке x_o

1. $f(x_o) = (x_o)^2$
2. $f(x_o + \Delta x) = (x_o + \Delta x)^2$
3. $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = (x_o + \Delta x)^2 - (x_o)^2 =$

   $= x_o^2 + 2x_o \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x_o^2 = 2x_o \cdot \Delta x + \Delta x^2$
4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{2x_o \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2x_o + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_o + \Delta x$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x_o + \Delta x) = 2x_o$

$$\boxed{(x^2)' = 2x}$$

Примеры

4. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ в точке x_o

$$1.\ f\left(x_o\right) = \sqrt{x_o}$$

$$2.\ f\left(x_o + \Delta x\right) = \sqrt{x_o + \Delta x}$$

$$3.\ \Delta f = f\left(x_o + \Delta x\right) - f\left(x_o\right) = \sqrt{x_o + \Delta x} - \sqrt{x_o} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x_o + \Delta x} - \sqrt{x_o}\right)\left(\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}\right)}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}} = \frac{\left(\sqrt{x_o + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x_o}\right)^2}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}} =$$

$$= \frac{x_o + \Delta x - x_o}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}$$

$$4.\ \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}$$

Примеры

4. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ *в точке* x_o

$$4.\ \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}$$

$$5.\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x_o}}$$

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Примеры

5. Найти производную функции y = 1/x в точке x_o

$$1.\ f(x_o) = \frac{1}{x_o}$$

$$2.\ f(x_o + \Delta x) = \frac{1}{x_o + \Delta x}$$

$$3.\ \Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = \frac{1}{x_o + \Delta x} - \frac{1}{x_o} =$$

$$= \frac{x_o - (x_o + \Delta x)}{x_o(x_o + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_o^2 + x_o \cdot \Delta x}$$

$$4.\ \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x(x_o^2 + x_o \cdot \Delta x)} = \frac{-1}{x_o^2 + x_o \cdot \Delta x}$$

Примеры

5. Найти производную функции y = 1/x в точке x_o

$$4.\ \frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\Delta x\left(x_o^2+x_o\cdot\Delta x\right)}=\frac{-1}{x_o^2+x_o\cdot\Delta x}$$

$$5.\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{x_o^2+x_o\cdot\Delta x}\right)=-\frac{1}{x_o^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

Физический (механический) смысл производной

Если при прямолинейном движении путь s, пройденный точкой, есть функция от времени t, т. е. $s = s(t)$, то скорость точки есть производная от пути по времени, т.е. $v(t) = s'(t)$.

Производная выражает мгновенную скорость в момент времени t.

Если функция имеет производную (дифференцируема) в точке x, то она непрерывна в этой точке.

- Прочитайте п.4.1, обратите внимание на понятия выделенные в розовых рамках Стр92,94..
- Рассмотрите примеры в учебнике и в презентации.
- Попробуйте выполнить №4.1 и 4.3.

- После дистанта нам нужно написать контрольную. Вводную диагностику.
- И приступим к изучению производной.