Производная

Понятие производной

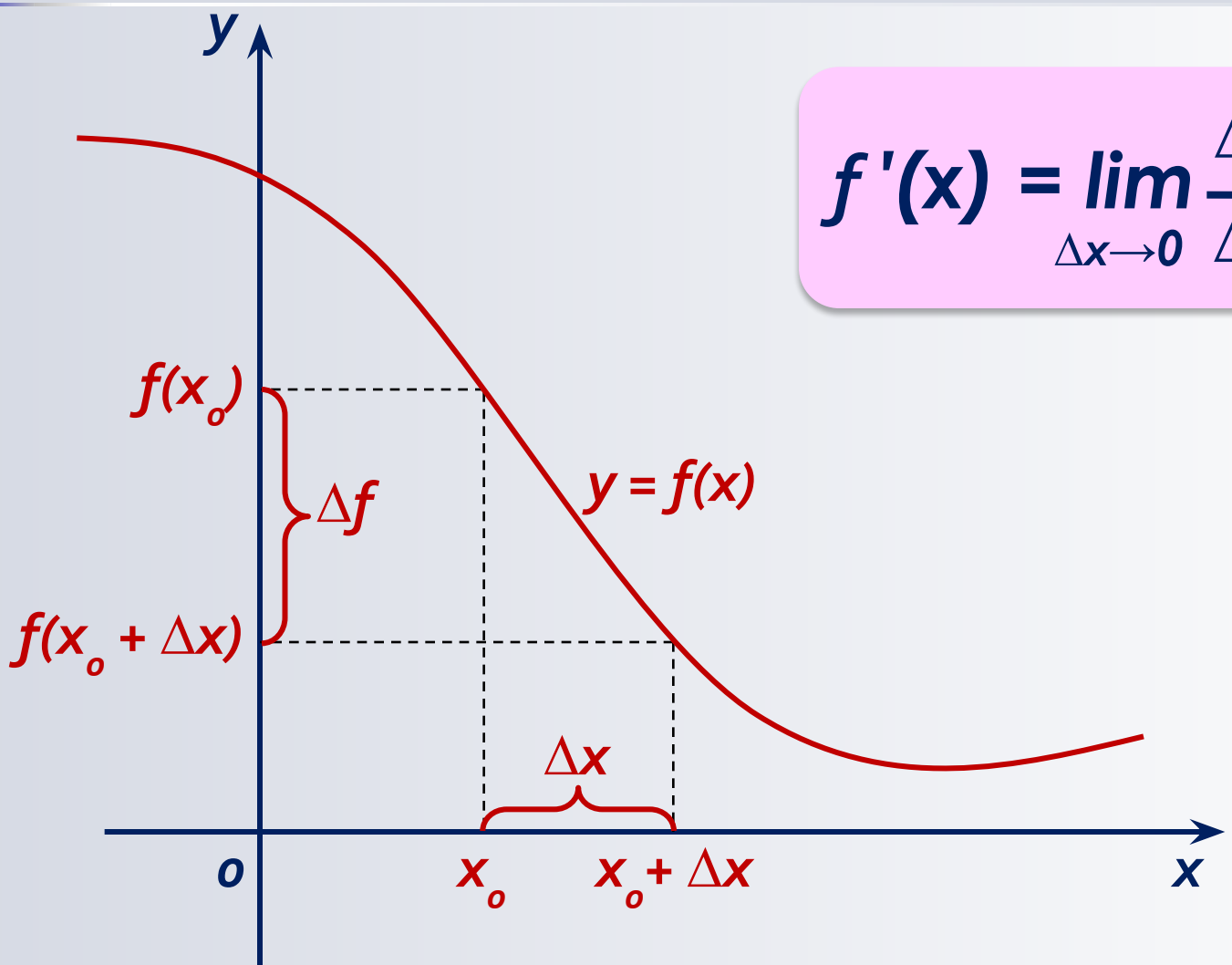
Производной *функции y = f(x), заданной на некотором интервале (a; b), в некоторой точке* ***x*** *этого интервала называют* ***предел*** *отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Нахождение производной называют ***дифференцированием***

Понятие производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



Алгоритм нахождения производной

1. Зафиксировать значение x_o, найти $f(x_o)$.
2. Дать аргументу x_o приращение Δx, перейти в новую точку $x_o + \Delta x$, найти $f(x_o + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$.
4. Составить отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.
6. Этот предел и есть $f'(x_o)$.

Примеры

1. Найти производную функции $y = kx + b$ в точке x_o

1. $f(x_o) = kx_o + b$
2. $f(x_o + \Delta x) = k(x_o + \Delta x) + b$
3. $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = k(x_o + \Delta x) + b - (kx_o + b) =$
   $= kx_o + k \cdot \Delta x + b - kx_o - b = k \cdot \Delta x$
4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{k \cdot \Delta x}{\Delta x} = k$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (k) = k$

$$(kx + b)' = k$$

Примеры

2. Найти производную функции $y = C$ *(C – const) в точке* x_o

1. $f(x_o) = C$
2. $f(x_o + \Delta x) = C$
3. $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = C - C = 0$
4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$

$$(C)' = 0$$

Примеры

3. Найти производную функции $y = x^2$ в точке x_o

1. $f(x_o) = (x_o)^2$
2. $f(x_o + \Delta x) = (x_o + \Delta x)^2$
3. $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = (x_o + \Delta x)^2 - (x_o)^2 =$

$$= x_o^2 + 2x_o \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x_o^2 = 2x_o \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{2x_o \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2x_o + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_o + \Delta x$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x_o + \Delta x) = 2x_o$

$$(x^2)' = 2x$$

Примеры

4. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ в точке x_o

1. $f(x_o) = \sqrt{x_o}$

2. $f(x_o + \Delta x) = \sqrt{x_o + \Delta x}$

3. $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = \sqrt{x_o + \Delta x} - \sqrt{x_o} =$

$$= \frac{\left(\sqrt{x_o + \Delta x} - \sqrt{x_o}\right)\left(\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}\right)}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}} = \frac{\left(\sqrt{x_o + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x_o}\right)^2}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}} =$$

$$= \frac{x_o + \Delta x - x_o}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}$$

4. $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}$$

Примеры

4. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ в точке x_o

4. $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}$$

5. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x_o}}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Примеры

5. Найти производную функции ***y = 1/x*** *в точке* x_o

1. $f(x_o) = \dfrac{1}{x_o}$

2. $f(x_o + \Delta x) = \dfrac{1}{x_o + \Delta x}$

3. $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = \dfrac{1}{x_o + \Delta x} - \dfrac{1}{x_o} =$

$$= \frac{x_o - (x_o + \Delta x)}{x_o(x_o + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_o^2 + x_o \cdot \Delta x}$$

4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{-\Delta x}{\Delta x(x_o^2 + x_o \cdot \Delta x)} = \dfrac{-1}{x_o^2 + x_o \cdot \Delta x}$

Примеры

5. Найти производную функции $y = 1/x$ в точке x_o

4. $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x\left(x_o^2 + x_o \cdot \Delta x\right)} = \frac{-1}{x_o^2 + x_o \cdot \Delta x}$$

5. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{-1}{x_o^2 + x_o \cdot \Delta x}\right) = -\frac{1}{x_o^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Физический (механический) смысл производной

Если при прямолинейном движении путь s, пройденный точкой, есть функция от времени t, т. е. $s = s(t)$, то скорость точки есть производная от пути по времени, т.е. $v(t) = s'(t)$.

Производная выражает мгновенную скорость в момент времени t.

Если функция имеет производную (дифференцируема) в точке x, то она непрерывна в этой точке.

- Прочитайте п.4.1, обратите внимание на понятия выделенные в розовых рамках Стр92,94..
- Рассмотрите примеры в учебнике и в презентации.
- Попробуйте выполнить №4.1 и 4.3.

- После дистанта нам нужно написать контрольную. Вводную диагностику.
- И приступим к изучению производной.