

Производная

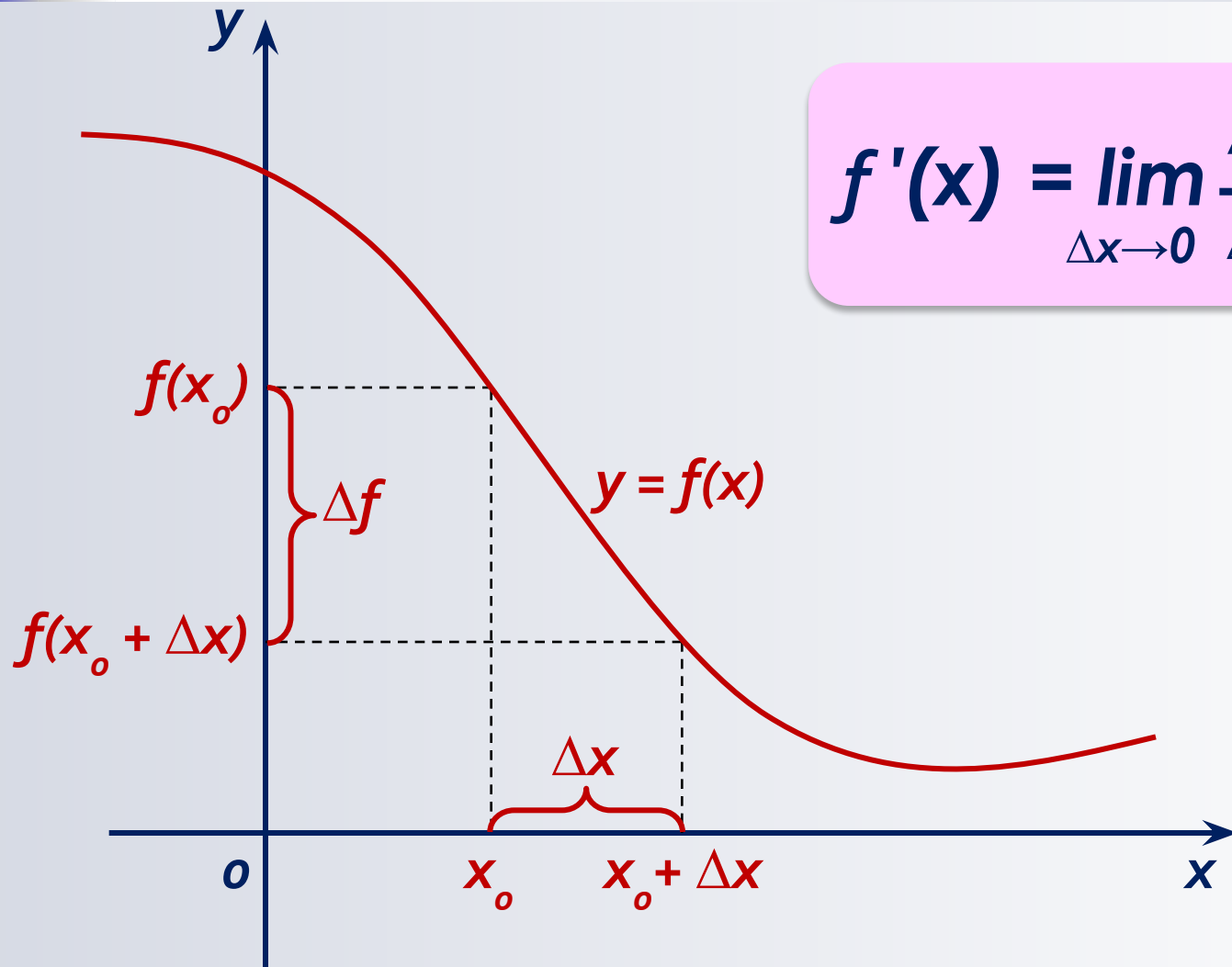
Понятие производной

Производной функции $y = f(x)$, заданной на некотором интервале $(a; b)$, в некоторой точке x этого интервала называют **предел** отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Нахождение производной называют **дифференцированием**

Понятие производной



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Алгоритм нахождения производной

1. Зафиксировать значение x_0 , найти $f(x_0)$.
2. Дать аргументу x_0 приращение Δx , перейти в новую точку $x_0 + \Delta x$, найти $f(x_0 + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
4. Составить отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.
6. Этот предел и есть $f'(x_0)$.

Примеры

1. Найти производную функции $y = kx + b$ в точке x_0

$$1. f(x_0) = kx_0 + b$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = k(x_0 + \Delta x) + b$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = k(x_0 + \Delta x) + b - (kx_0 + b) = \\ = kx_0 + k \cdot \Delta x + b - kx_0 - b = k \cdot \Delta x$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{k \cdot \Delta x}{\Delta x} = k$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (k) = k$$

$$(kx + b)' = k$$

Примеры

2. Найти производную функции $y = C$ (C – const) в точке x_0

$$1. f(x_0) = C$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = C$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = C - C = 0$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$(C)' = 0$$

Примеры

3. Найти производную функции $y = x^2$ в точке x_0

$$1. f(x_0) = (x_0)^2$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2 = \\ = x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

$$(x^2)' = 2x$$

Примеры

4. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ в точке x_0

$$1. f(x_0) = \sqrt{x_0}$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = \sqrt{x_0 + \Delta x}$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} =$$

$$= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

Примеры

4. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ в точке x_0

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Примеры

5. Найти производную функции $y = 1/x$ в точке x_0

$$1. f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} =$$
$$= \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x(x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x)} = \frac{-1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}$$

Примеры

5. Найти производную функции $y = 1/x$ в точке x_0

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x (x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x)} = \frac{-1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}$$


$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x} \right) = -\frac{1}{x_0^2}$$

$$\left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Физический (механический) СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Если при прямолинейном движении путь s , пройденный точкой, есть функция от времени t , т.е. $s = s(t)$, то **скорость** точки есть **производная** от пути по времени, т.е. $v(t) = s'(t)$.

Производная выражает **мгновенную скорость** в момент времени t .



Если функция имеет производную (дифференцируема) в точке x , то она непрерывна в этой точке.

- Прочитайте п.4.1, обратите внимание на понятия выделенные в розовых рамках Стр92,94..
- Рассмотрите примеры в учебнике и в презентации.
- Попробуйте выполнить №4.1 и 4.3.

- После дистанта нам нужно написать контрольную. Вводную диагностику.
- И приступим к изучению производной.