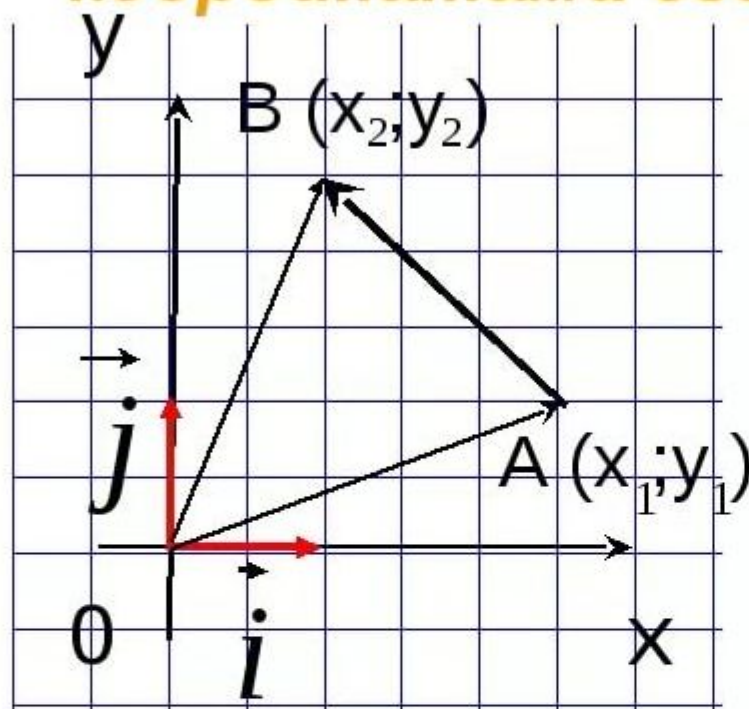


## Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца

1 2



$\vec{OA}$  - радиус-вектор точки A;

$\vec{OB}$  - радиус-вектор точки B;

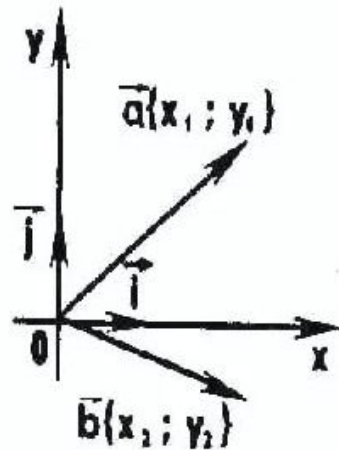
$\vec{OA} \{x_1; y_1\}$ ;  $\vec{OB} \{x_2; y_2\}$ ;

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\vec{AB} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$

Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его начала и конца

## Скалярное произведение в координатах



$$\vec{a} \{x_1; y_1\}$$

$$\vec{b} \{x_2; y_2\}$$

$$\vec{a} \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\cos(\widehat{a b}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

## Свойства скалярного произведения векторов

- 1)  $\vec{a}^2 \geq 0$  ( $\vec{a}^2 > 0$  при  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ); 2)  $\vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{a}$ ;
- 3)  $(\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} \vec{c} + \vec{b} \vec{c}$ ; 4)  $(k\vec{a}) \vec{b} = k(\vec{a} \vec{b})$ .



# Векторное произведение

- **Векторное произведение векторов,**
- **заданных в координатной форме.**
- Пусть  $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$  и  $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$
- Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\left( \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 z_2 \\ y_2 z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 z_2 \\ x_2 z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 y_2 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right)$$

## Пример

Найти косинусы углов, которые, вектор  $\overline{AB}$  составляет с осями координат, если A (1,2,3) и B (2,4,5).

Решение.

$$\overline{AB} = \{2 - 1; 4 - 2; 5 - 3\} = \{1; 2; 2\}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3,$$

тогда

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}, \cos \beta = \frac{2}{3}, \cos \gamma = \frac{2}{3}$$

# ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ СООТНОШЕНИИ НА ПЛОСКОСТИ

---

Отрезок  $AB$  разделен точкой  $C$  в отношении



$$|AC| : |CB| = \lambda,$$

то координаты точки  $C$  находятся по формулам:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}; \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}$$

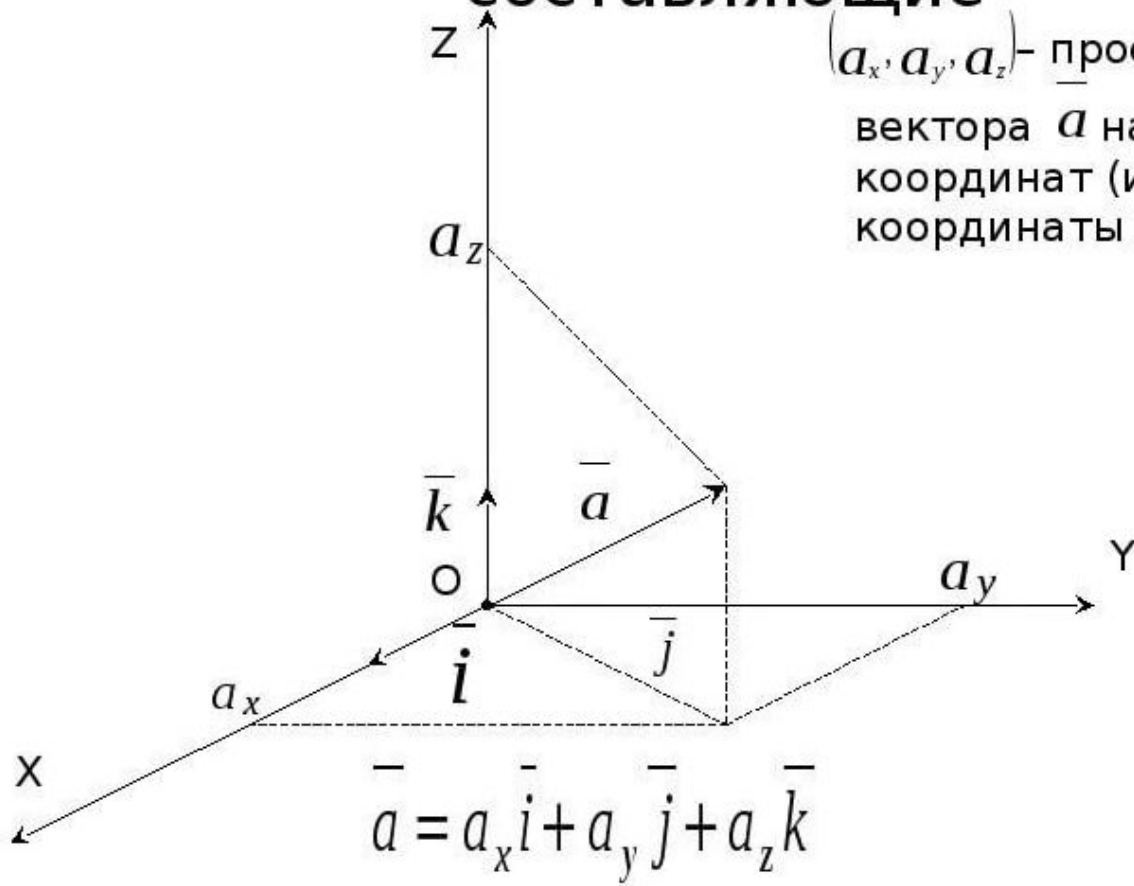
Если  $\lambda = 1$ , то отрезок  $AB$  разделен точкой  $C$  пополам.

Координаты середины находят по формулам:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}; \quad z_C = \frac{z_A + z_B}{2}$$

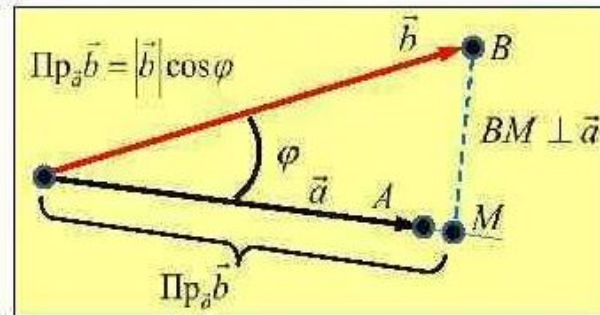
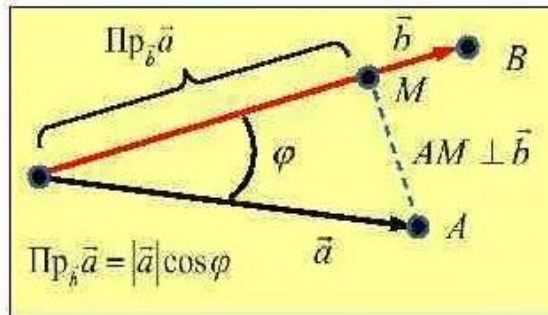
---

## Разложение вектора на составляющие





Скалярное произведение двух векторов равно произведению модуля одного вектора на проекцию другого на первый.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = \begin{cases} |\vec{b}| \text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} \\ |\vec{a}| \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} \end{cases}$$

Выражение проекции вектора на другой через их скалярное произведение и косинуса угла между векторами через их взаимные проекции

$$\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}, \quad \text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|},$$

$$\cos \varphi = \frac{\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a}}{|\vec{a}|}$$

## Угол между векторами

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{a \cdot b} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$



## Векторное произведение векторов

Найти площадь треугольника с вершинами:

$$A(2; 3; 1) \quad B(5; 6; 3) \quad C(7; 1; 10)$$

Найдем координаты векторов:

$$\overline{AB} = \{5 - 2; 6 - 3; 3 - 1\} = \{3; 3; 2\}$$

$$\overline{AC} = \{7 - 2; 1 - 3; 10 - 1\} = \{5; -2; 9\}$$

$$S = \frac{1}{2} |\overline{a} \times \overline{b}|$$

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 31\bar{i} - 17\bar{j} - 21\bar{k}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{31^2 + (-17)^2 + (-21)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1691} \approx 20.6$$

