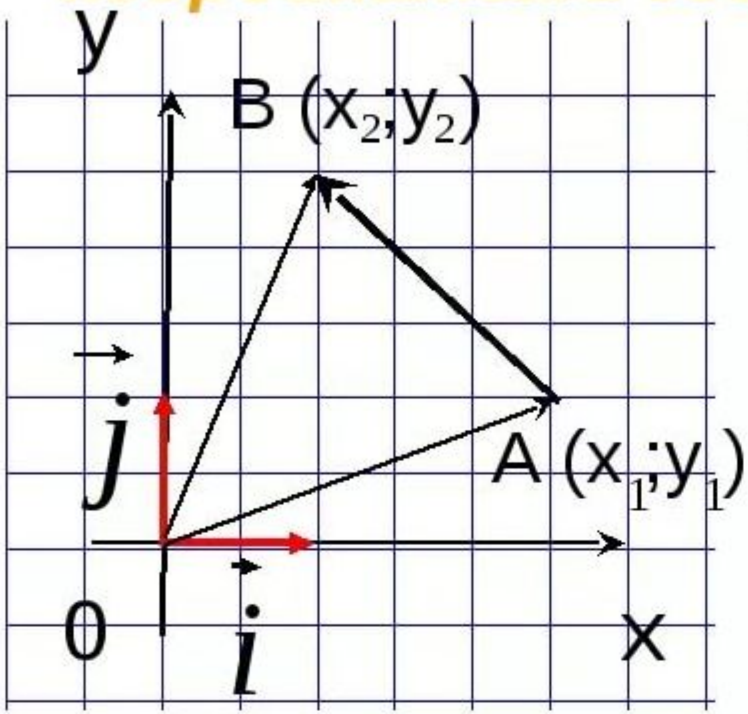
Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца

1 2



$\overrightarrow{OA}$ -радиус-вектор точки А;

$\overrightarrow{OB}$ -радиус-вектор точки В;

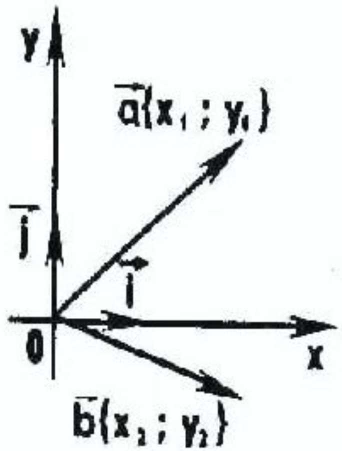
$\overrightarrow{OA}\ \{x_1;y_1\}$; $\overrightarrow{OB}\ \{x_2;y_2\}$;

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\boxed{\overrightarrow{AB}\ \{x_2 - x_1\ ;\ y_2 - y_1\}}$

Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его начала и конца

Скалярное произведение в координатах



$\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$

$\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$

$$\boxed{\vec{a}\,\vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2}$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Свойства скалярного произведения векторов

1) $\vec{a}^2 \geqslant 0$ ($\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$); 2) $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$;

3) $(\vec{a} + \vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$; 4) $(k\vec{a})\,\vec{b} = k\,(\vec{a}\,\vec{b})$.

Векторное произведение

- **Векторное произведение векторов,**
- **заданных в координатной форме.**
- Пусть $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$
- Тогда

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{\left(\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 z_1 \\ x_2 z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right)}$$

Пример

Найти косинусы углов, которые, вектор $\overline{AB}$ составляет с осями координат, если A (1,2,3) и B (2,4,5).

Решение.

$$\overline{AB} = \{2-1;4-2;5-3\} = \{1;2;2\},$$

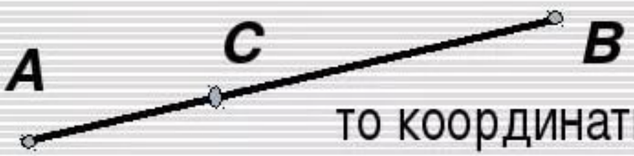
$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3,$$

тогда

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{2}{3}$$

ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ СООТНОШЕНИИ НА ПЛОСКОСТИ

Отрезок *AB* разделен точкой *C* в отношении



$$\left|AC\right|:\left|CB\right|=\lambda,$$

то координаты точки *C* находятся по формулам:

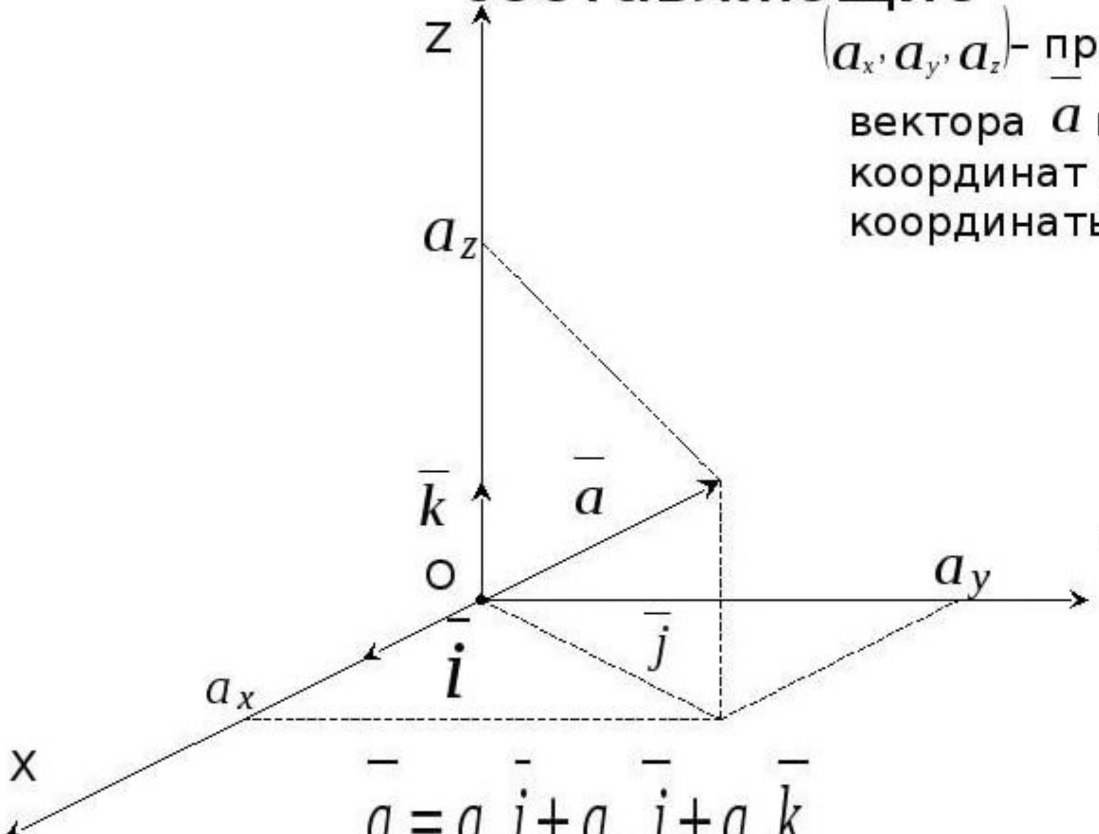
$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda};\quad y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}$$

Если $\lambda=1$, то отрезок *AB* разделен точкой С пополам.

Координаты середины находят по формулам:

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2};\ y_C=\frac{y_A+y_B}{2};\ z_C=\frac{z_A+z_B}{2}$$

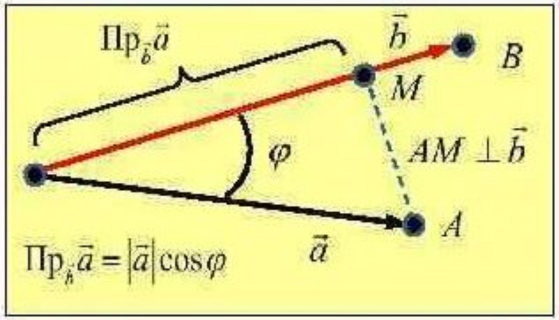
Разложение вектора на составляющие

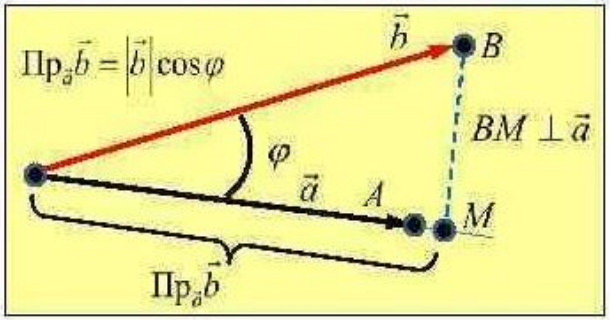


(a_x, a_y, a_z) – проекции вектора $\bar{a}$ на оси координат (или координаты вектора $\bar{a}$)

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$$

Скалярное произведение двух векторов равно произведению модуля одного вектора на проекцию другого на первый.





$$\vec a \cdot \vec b = |\vec a||\vec b|\cos\varphi = \begin{cases} |\vec b|\,\text{Пр}_{\vec b}\vec a \\ |\vec a|\,\text{Пр}_{\vec a}\vec b \end{cases}$$

Выражение проекции вектора на другой через их скалярное произведение и косинуса угла между векторами через их взаимные проекции

$$\text{Пр}_{\vec a}\vec b = \frac{\vec a \cdot \vec b}{|\vec b|}, \quad \text{Пр}_{\vec b}\vec a = \frac{\vec a \cdot \vec b}{|\vec a|},$$

$$\cos\varphi = \frac{\text{Пр}_{\vec a}\vec b}{|\vec a|} = \frac{\text{Пр}_{\vec b}\vec a}{|\vec b|}$$

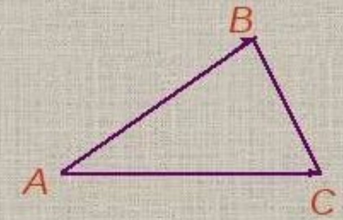
Угол между векторами

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{a\cdot b} = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Векторное произведение векторов

Найти площадь треугольника с вершинами:

$A(2;3;1) \quad B(5;6;3) \quad C(7;1;10)$



Найдем координаты векторов:

$$\overline{AB} = \{5-2;\,6-3;\,3-1\} = \{3;\,3;\,2\}$$

$$\overline{AC} = \{7-2;\,1-3;\,10-1\} = \{5;\,-2;\,9\}$$

$$S = \frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$$

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 31\bar{i} - 17\bar{j} - 21\bar{k}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{31^2 + (-17)^2 + (-21)^2} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{1691} \approx 20.6}$$