ПЛАНИМЕТРИЯ

От углов до многоугольников

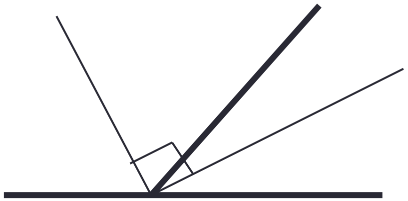
Повторение материала

- Картина Рафаэля «Афинская школа».
- На ней изображены Пифагор, Евклид, Платон и другие основоположники геометрии, а вокруг них- любознательная молодежь, которой интересны научные открытия.

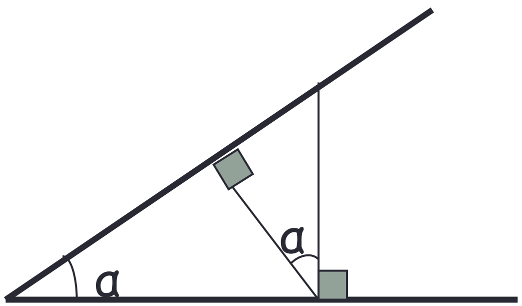
«Необученным геометрии вход воспрещён»

- Научная школа Платона (открыта в 387 г. до н.э.) – Академия – на протяжении более чем тысячи лет являлась центром культурного классического наследия.
- Она была размещена на специально купленном для этой цели участке в роще, носившей имя древнеаттического героя Академа
- Согласно преданию, над дверями Академии Платона было написано **«Необученным геометрии вход воспрещён»**

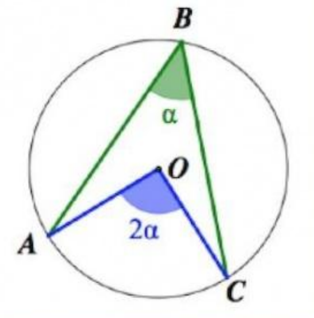
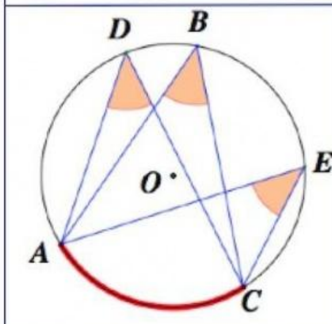
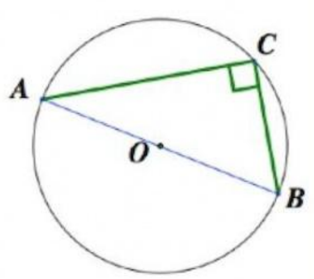
Углы и их свойства



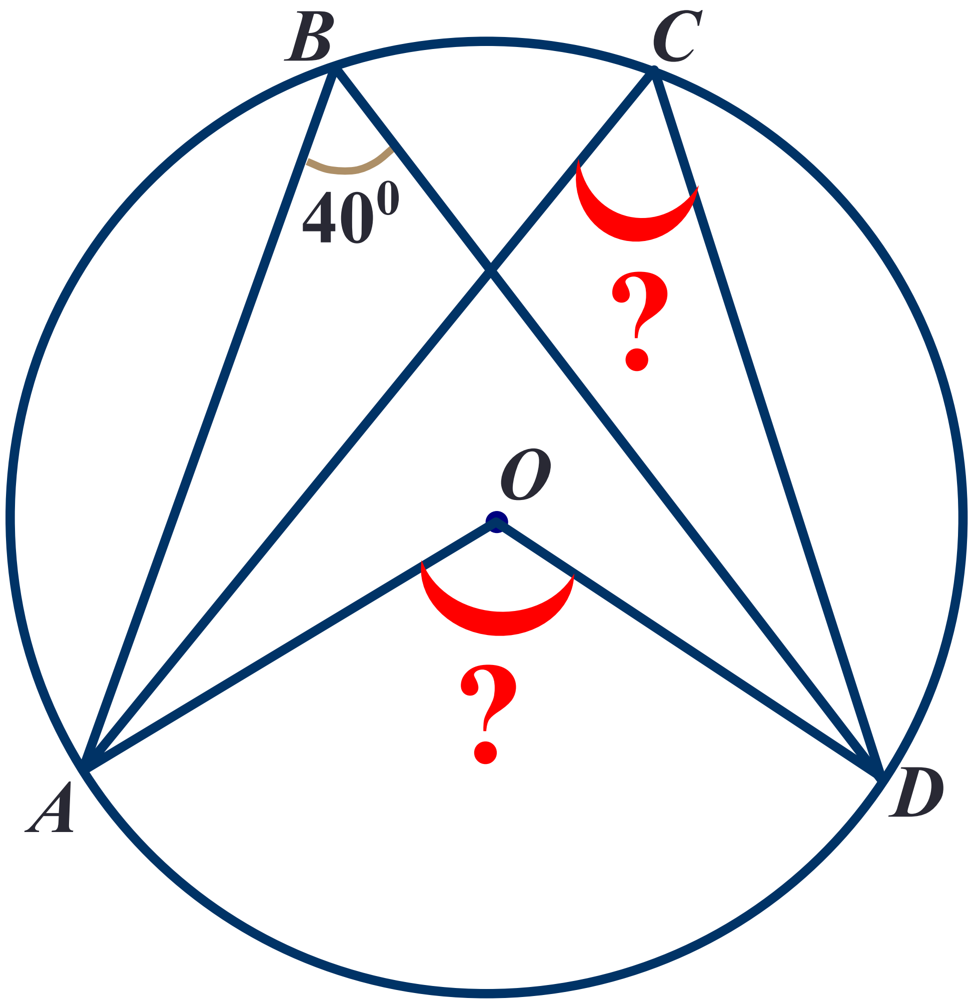
Угол между биссектрисами смежных углов равен 90°



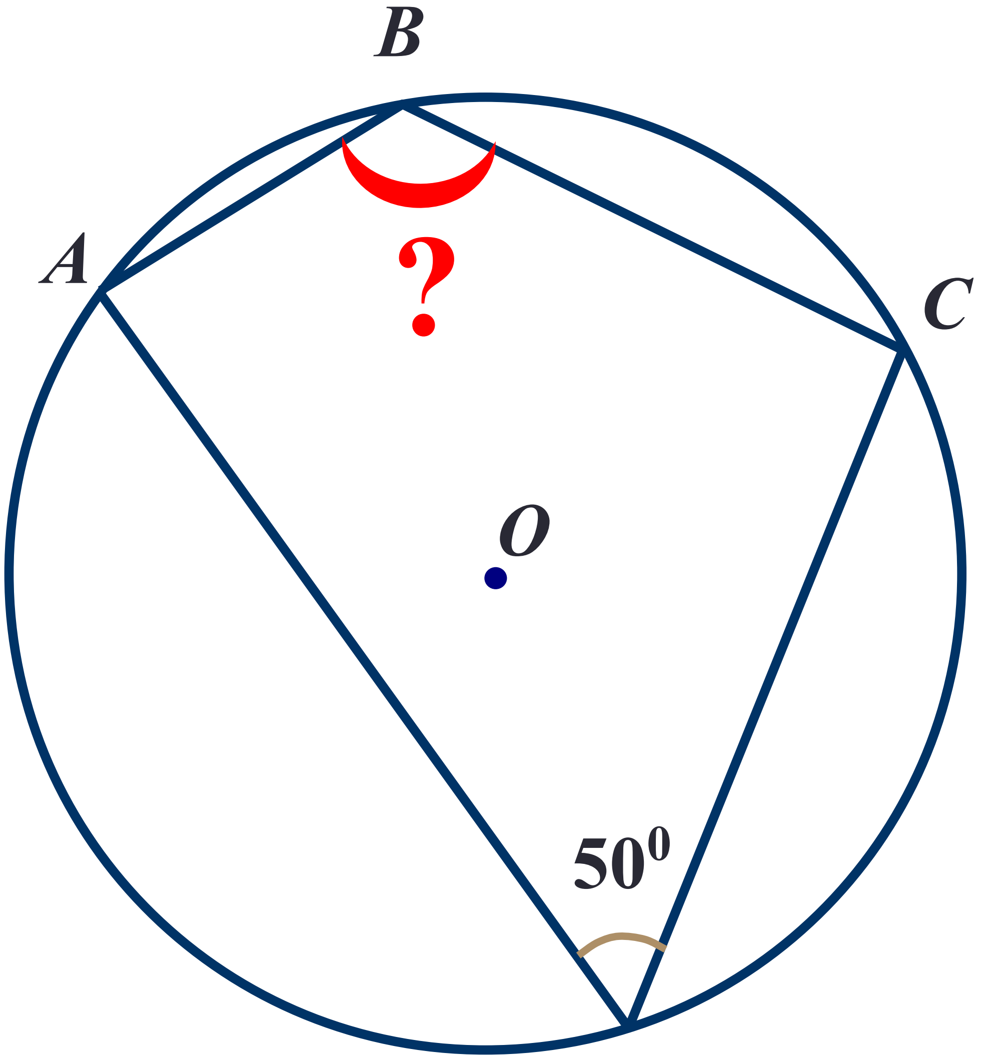
Углы со взаимно-перпендикулярными сторонами

	Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу. *И т.к. центральный угол измеряется градусной мерой дуги, на которую опирается, то вписанный угол равен половине этой дуги*
	Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны
	Угол, опирающийся на диаметр, - прямой.

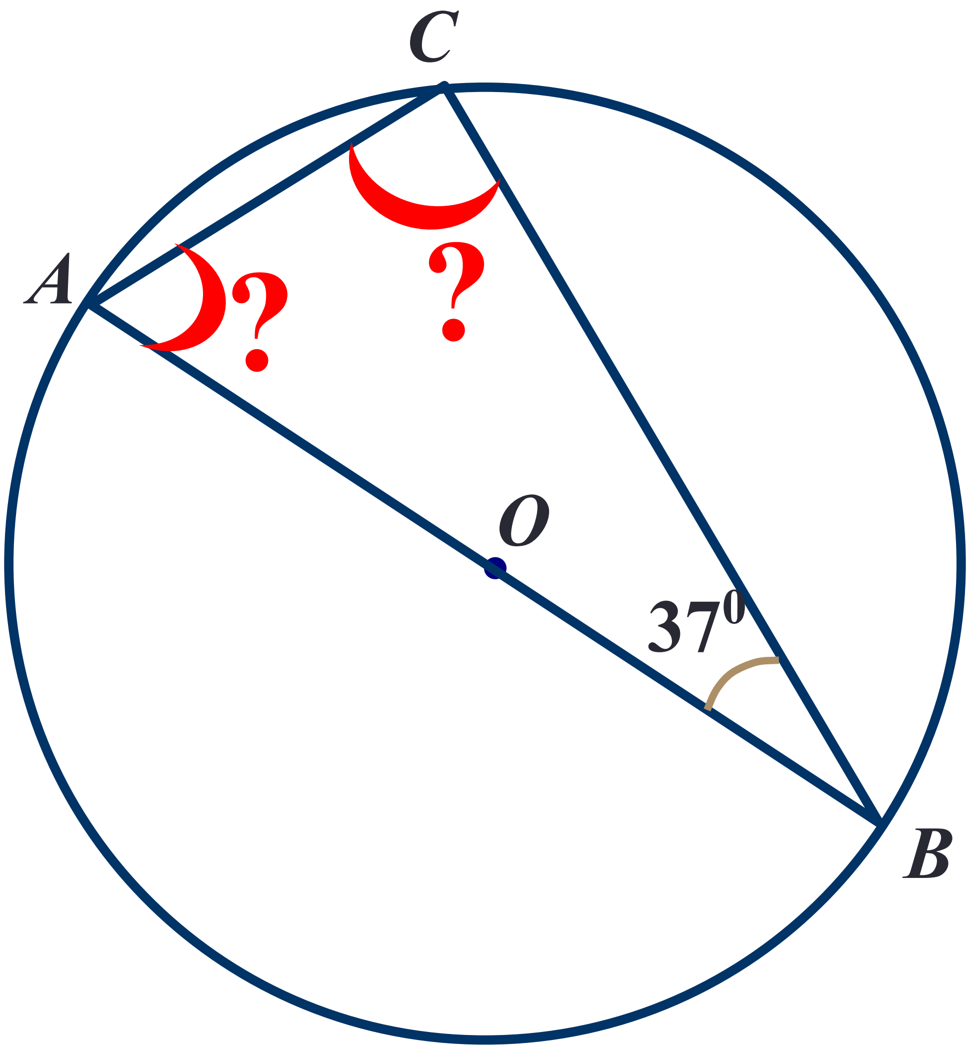
Задача



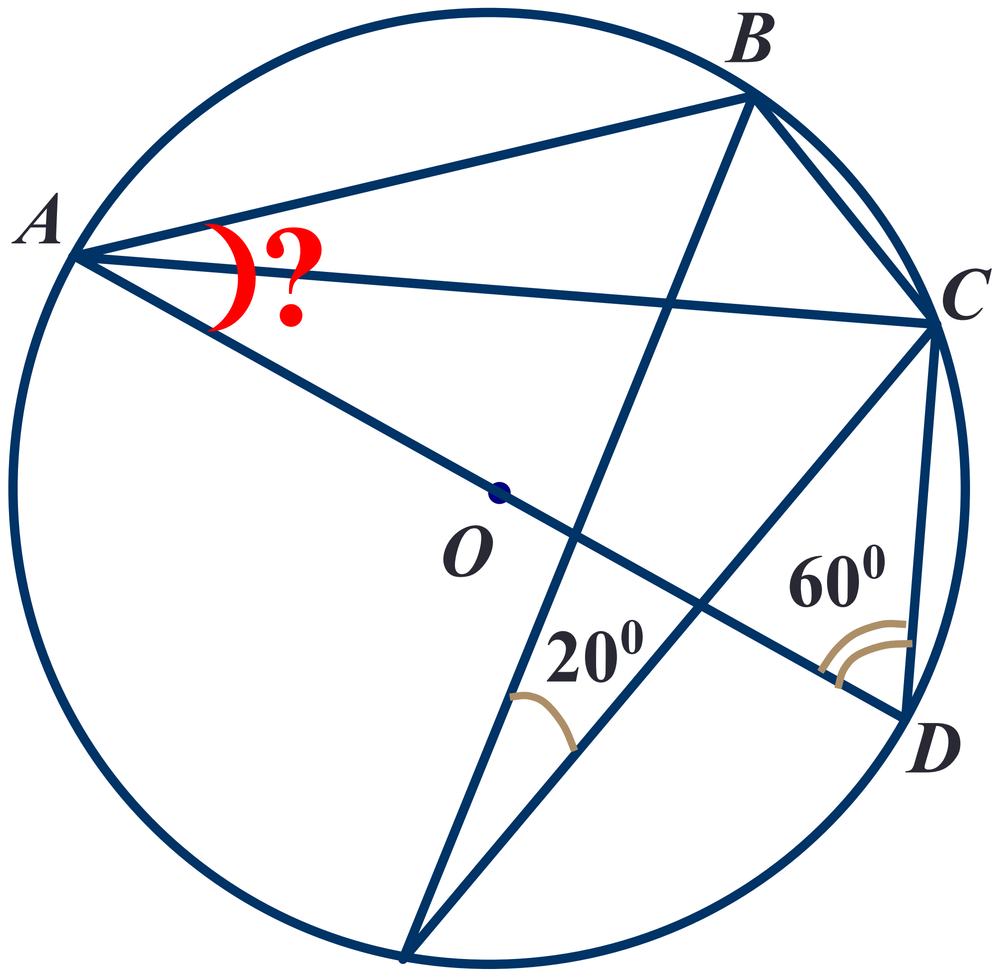
Задача



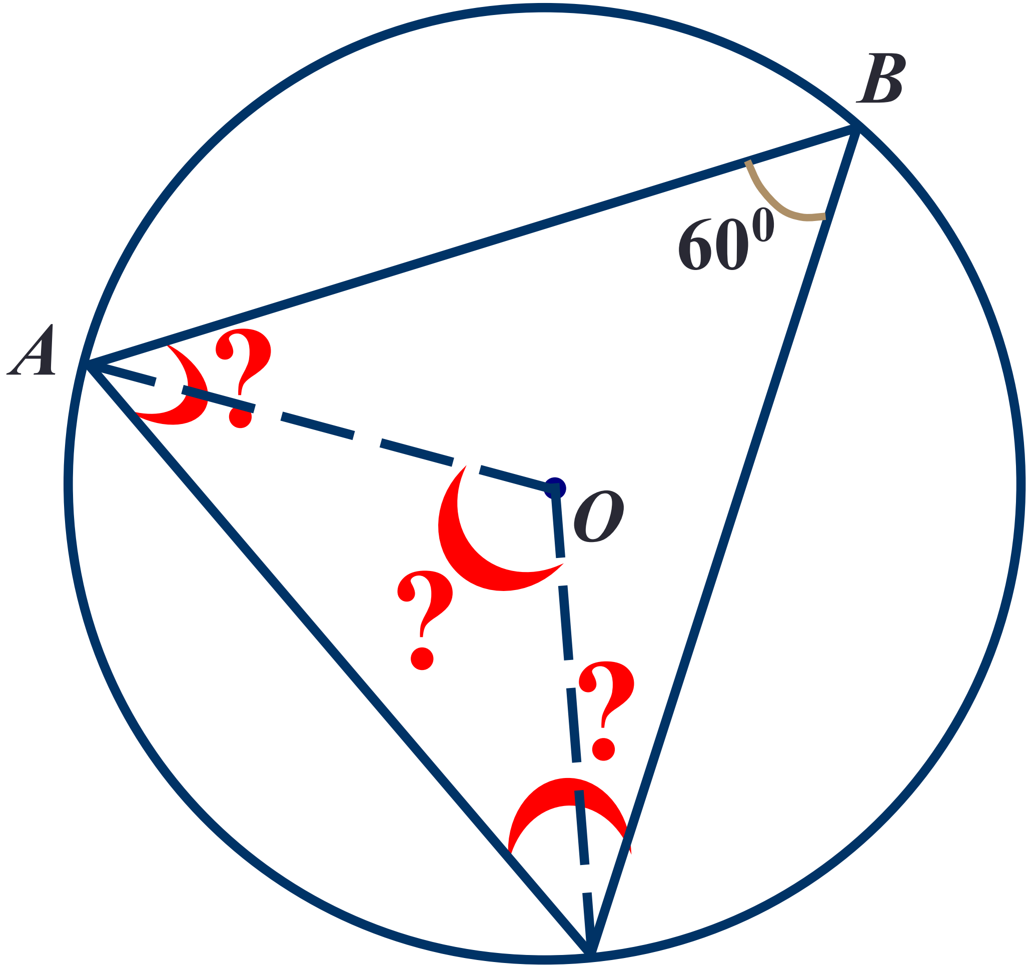
Задача



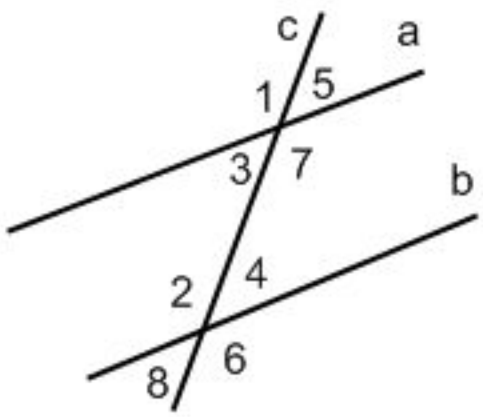
Задача



Задача



Параллельные прямые



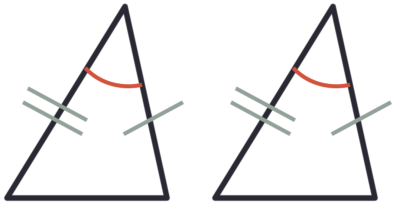
a||b, c - секущая

При пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, образуются восемь углов, которые попарно называются:

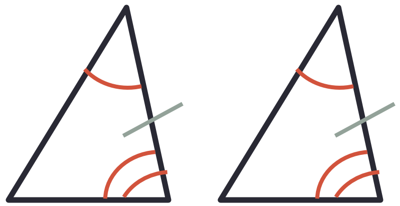
- ***соответственные** углы* (4 и *5; 6* и 7*; 1* и 2*; 3* и *8*): попарно равны
- ***внутренние накрест лежащие** углы* (2 и 7*; 3* и 4): попарно равны
- ***внешние накрест лежащие** углы* (*1* и 6; *5* и 6): попарно равны
- ***внутренние односторонние** углы* (2 и 3*; 4* и 7): их сумма равна 180°
(2 + 3 = 180°; *4* + 7 = 180°)
- ***внешние односторонние** углы* (1 и 8*; 5* и 6); их сумма равна 180°
(*1* + *7* = 180°; *2* + *8* = 180°)

Треугольники

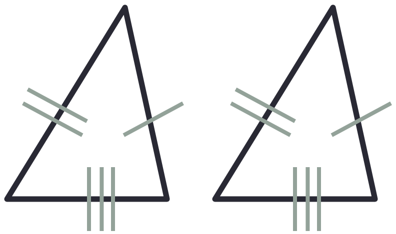
- **Первый признак равенства треугольников**
  Если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны



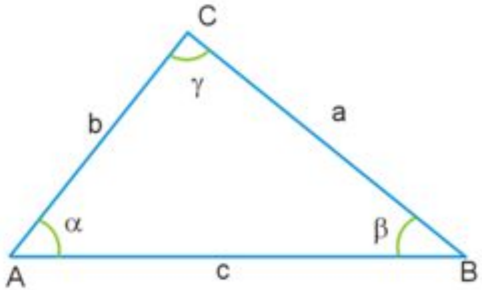
- **Второй признак равенства треугольников**
  Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны



- **Третий признак равенства треугольников**
  Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны



Треугольники



Сумма углов треугольника равна 180°

Неравенство треугольника:

$$a < b + c, \qquad b < a + c, \qquad c < a + b$$

Теорема синусов: $\dfrac{a}{sin\alpha} = \dfrac{b}{sin\beta} = \dfrac{c}{sin\gamma} = 2R$, где R – радиус описанной окружности

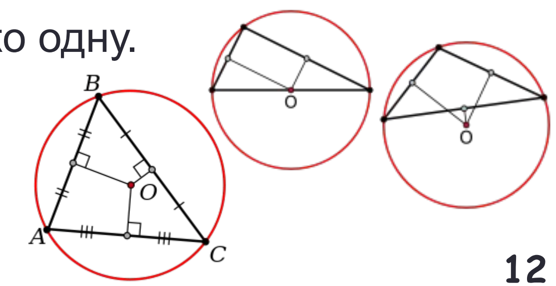
Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot sin\alpha$

Центр вписанной окружности равноудалён от всех сторон и является точкой пересечения биссектрис треугольника

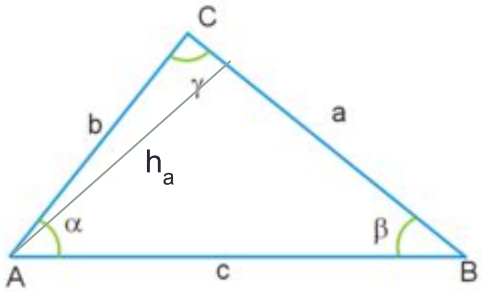
$$r = \frac{S}{p}$$

Около треугольника можно описать окружность, притом только одну. Её центром будет являться точка пересечения серединных перпендикуляров.

$$R = \frac{abc}{4S} \qquad R = \frac{a}{2sin\alpha} = \frac{b}{2sin\beta} = \frac{c}{2sin\gamma}$$



Площадь треугольника



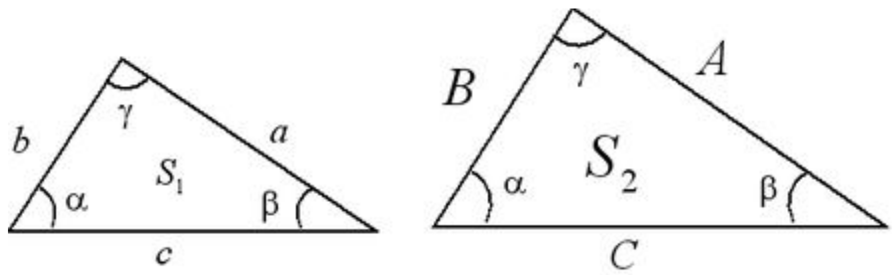
$$S = \frac{1}{2} a h_a$$

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot sin\gamma$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ – формула Герона

Подобие треугольников



$$\alpha = \beta = \gamma$$

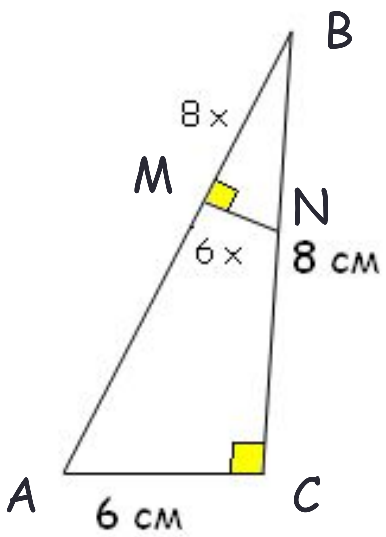
$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = k$$

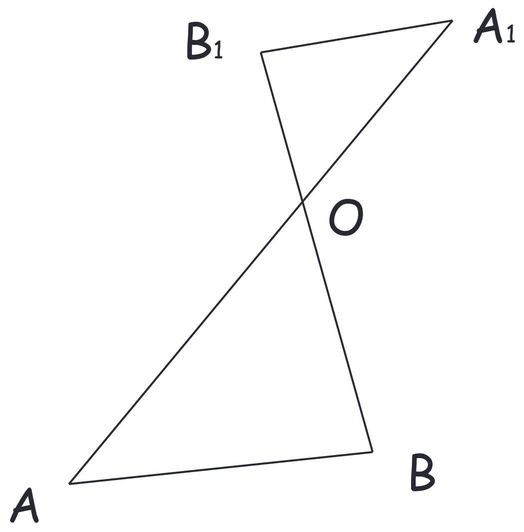
I признак подобия треугольников. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то эти треугольники подобны

II признак подобия треугольников. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны

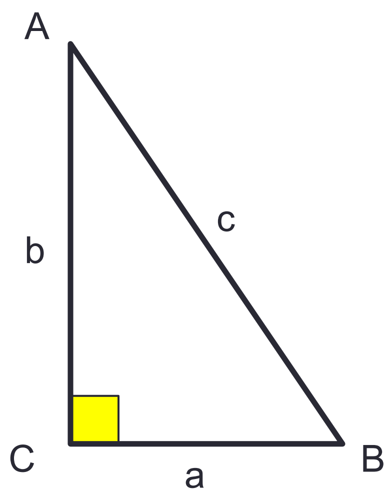
III признак подобия треугольников. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны

Подобие треугольников





Прямоугольный треугольник



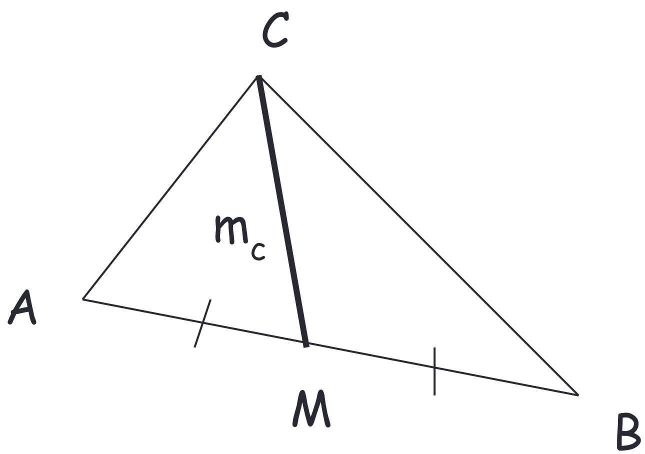
$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2} \text{ – Теорема Пифогора}$$

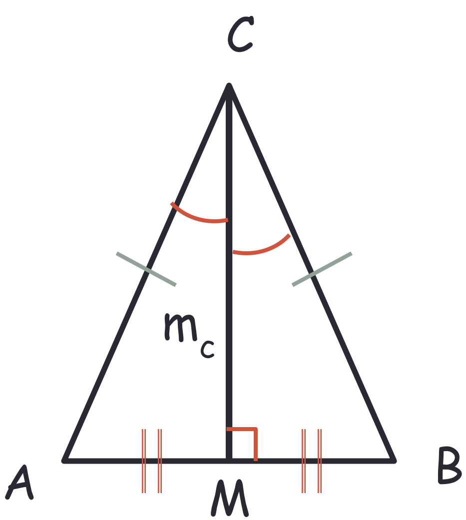
$$sinA = \frac{a}{c}, \qquad \text{cosA} = \frac{b}{c}, \qquad tgA = \frac{c}{b}$$

$$c = \frac{a}{sinA} = \frac{b}{cosA} = \frac{a}{cosB} = \frac{b}{sinB}$$

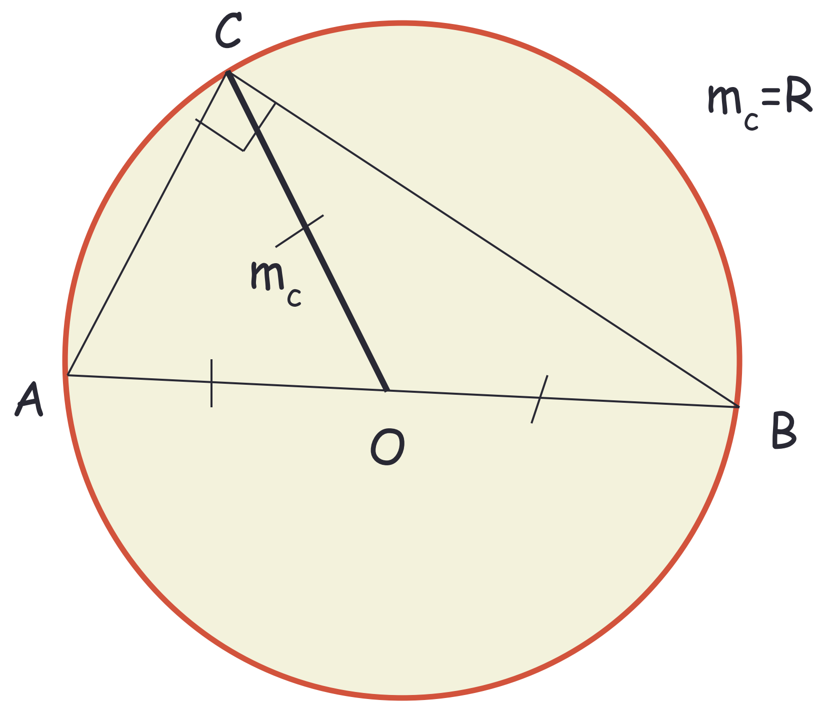
Против угла в 30° лежит катет, равный половине гипотенузы

Медиана треугольника

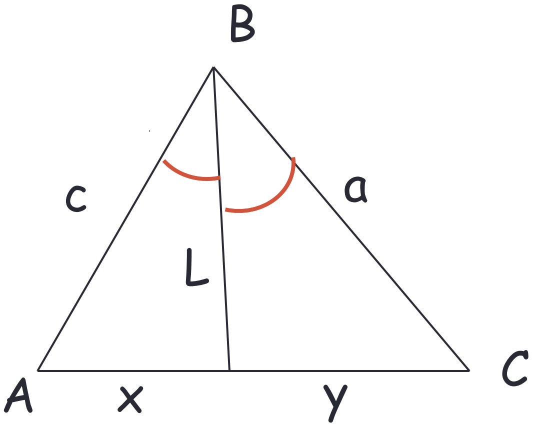


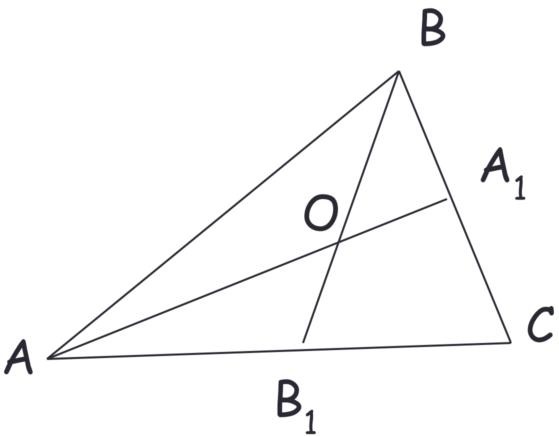


m_c- медиана, биссектриса и высота



Биссектриса треугольника



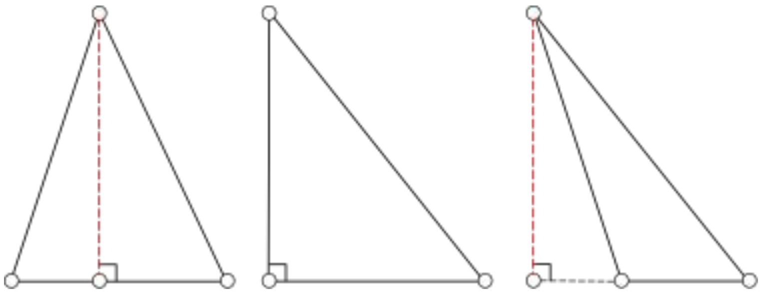


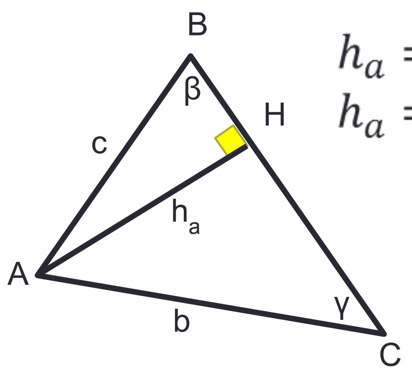
$$\frac{c}{x} = \frac{a}{y}$$

$$L = \sqrt{ac - xy}$$

$$\frac{BO}{OB_1} = \frac{AB + BC}{AC}$$

Высота треугольника

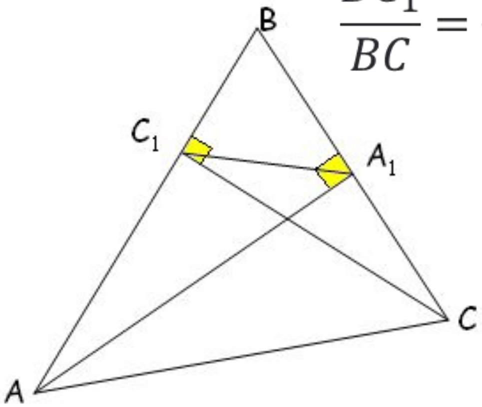




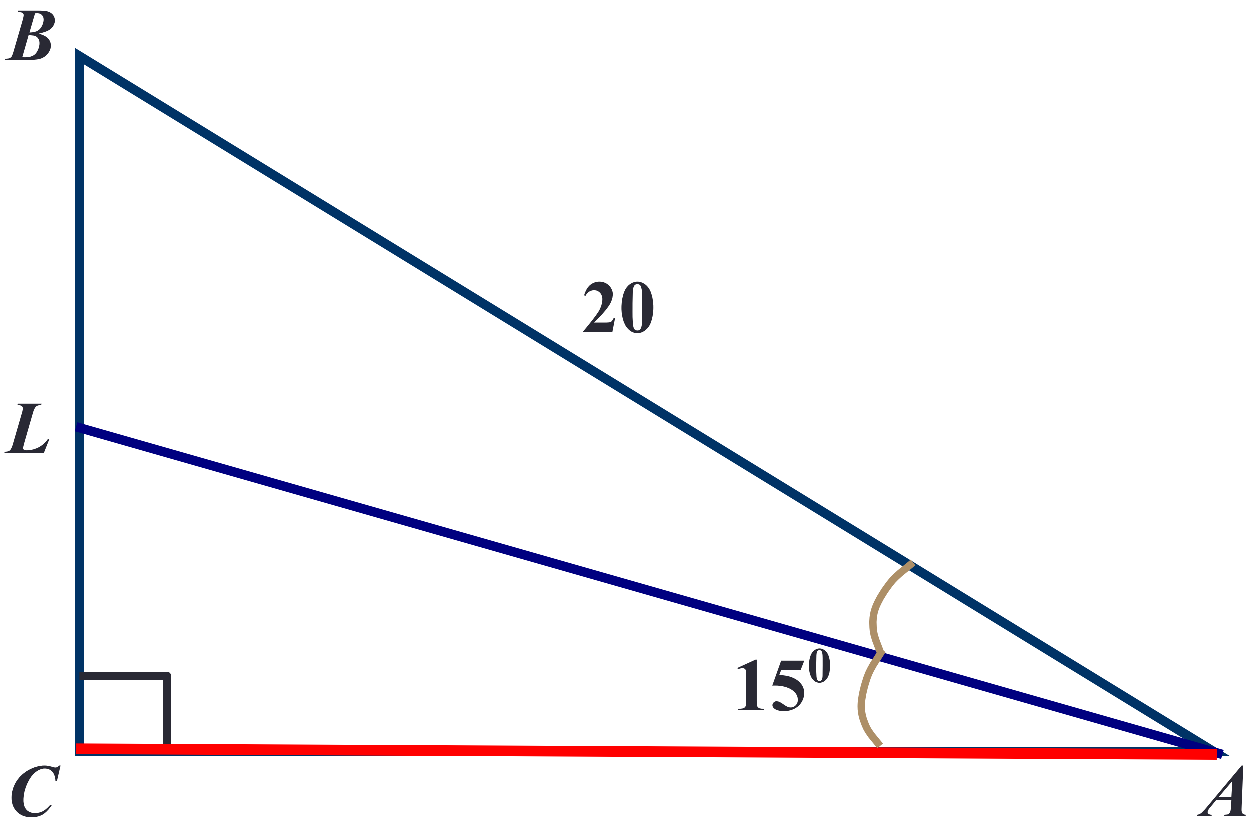
$$h_a = AB\sin B = c \cdot \sin\beta$$
$$h_a = AC\sin C = b \cdot \sin\gamma$$

ABC подобен A_1BC_1

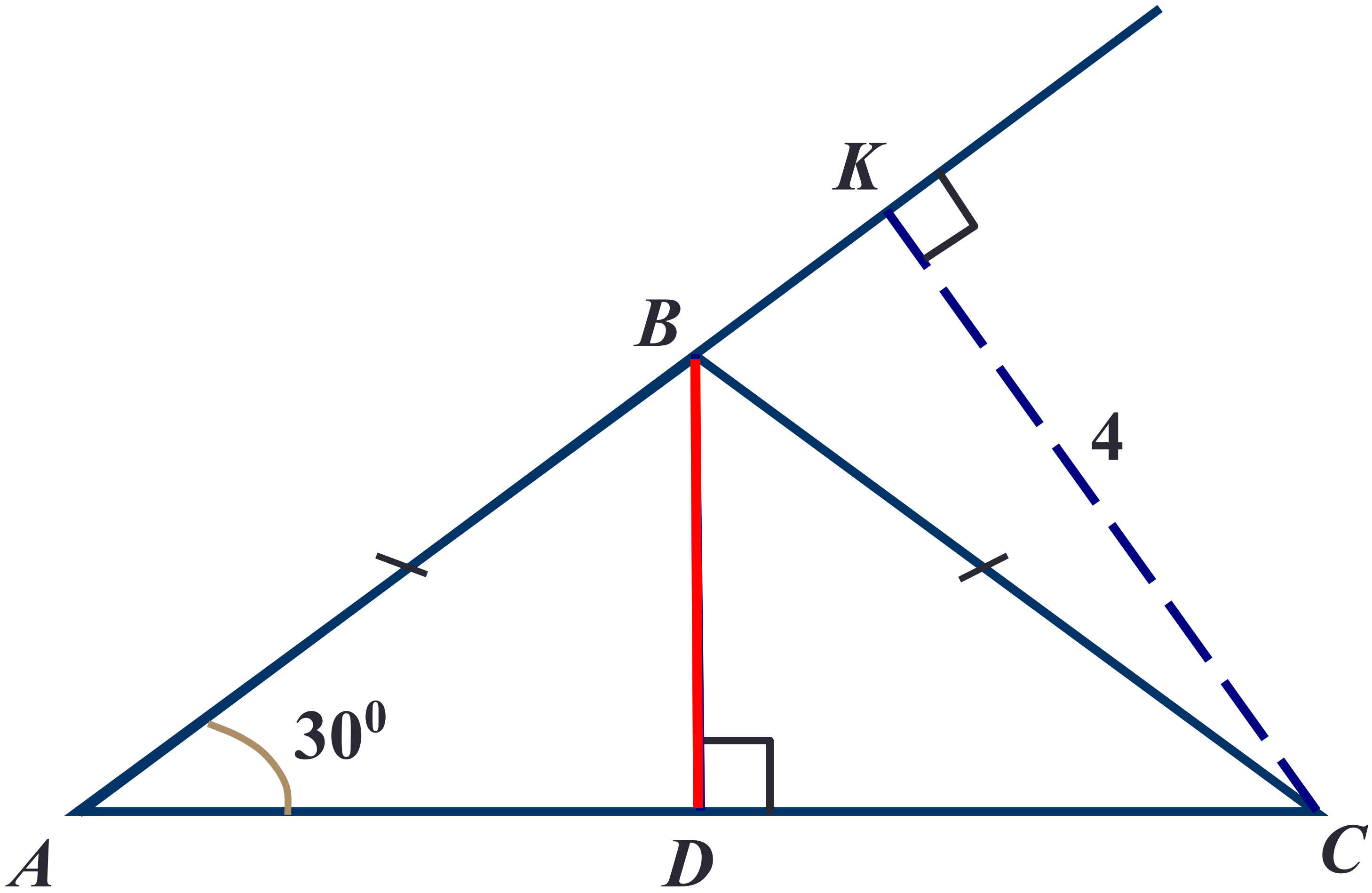
$$\frac{BC_1}{BC} = \frac{BA_1}{BA} = \frac{A_1C_1}{AC} = \cos\beta$$



Задача

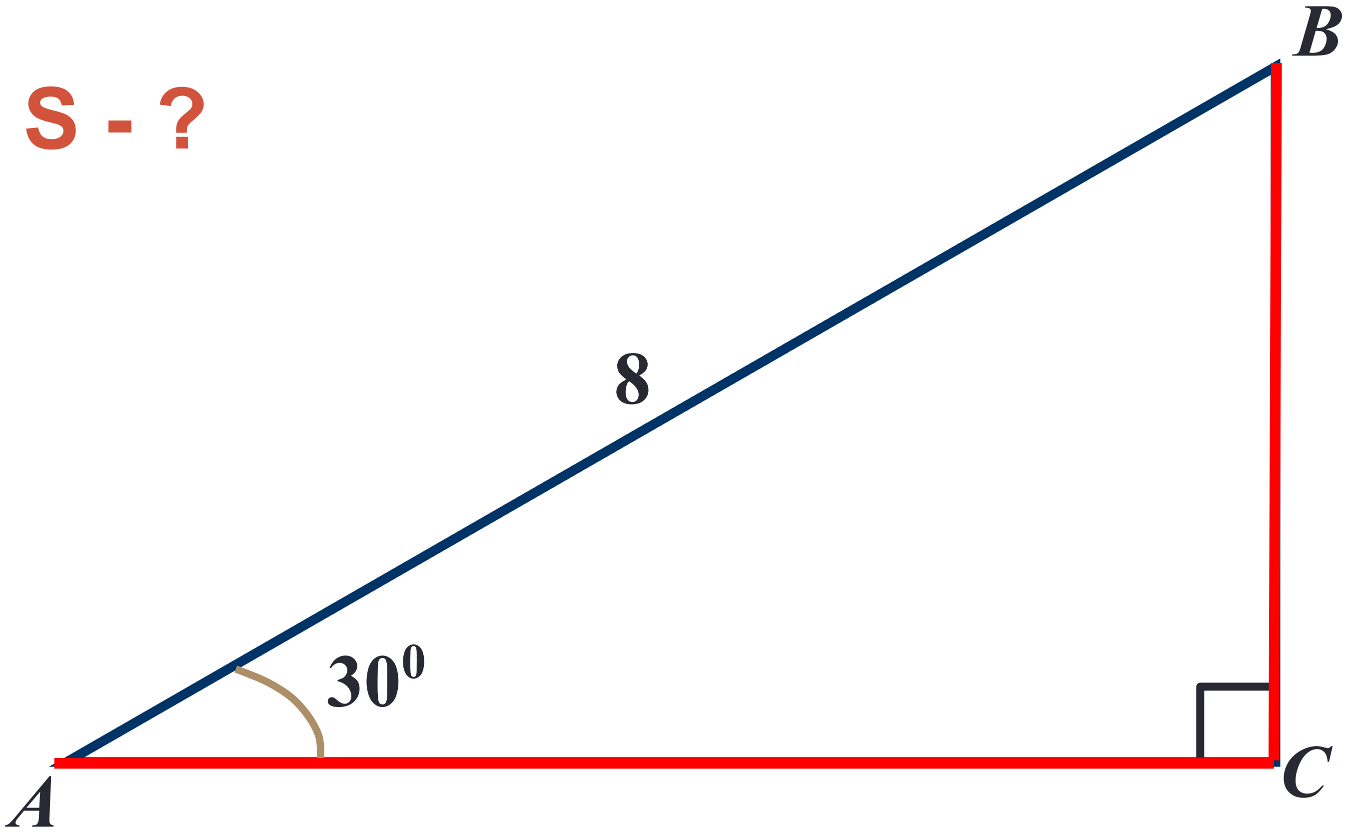


Задача

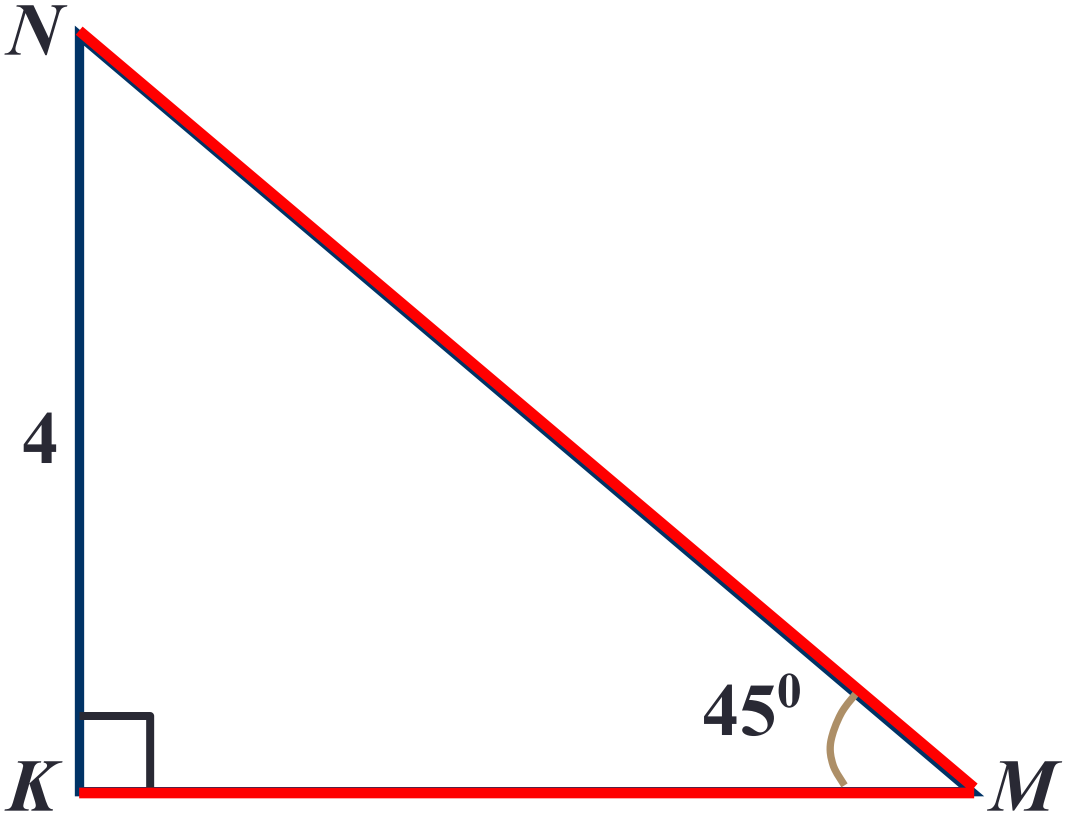


Задача

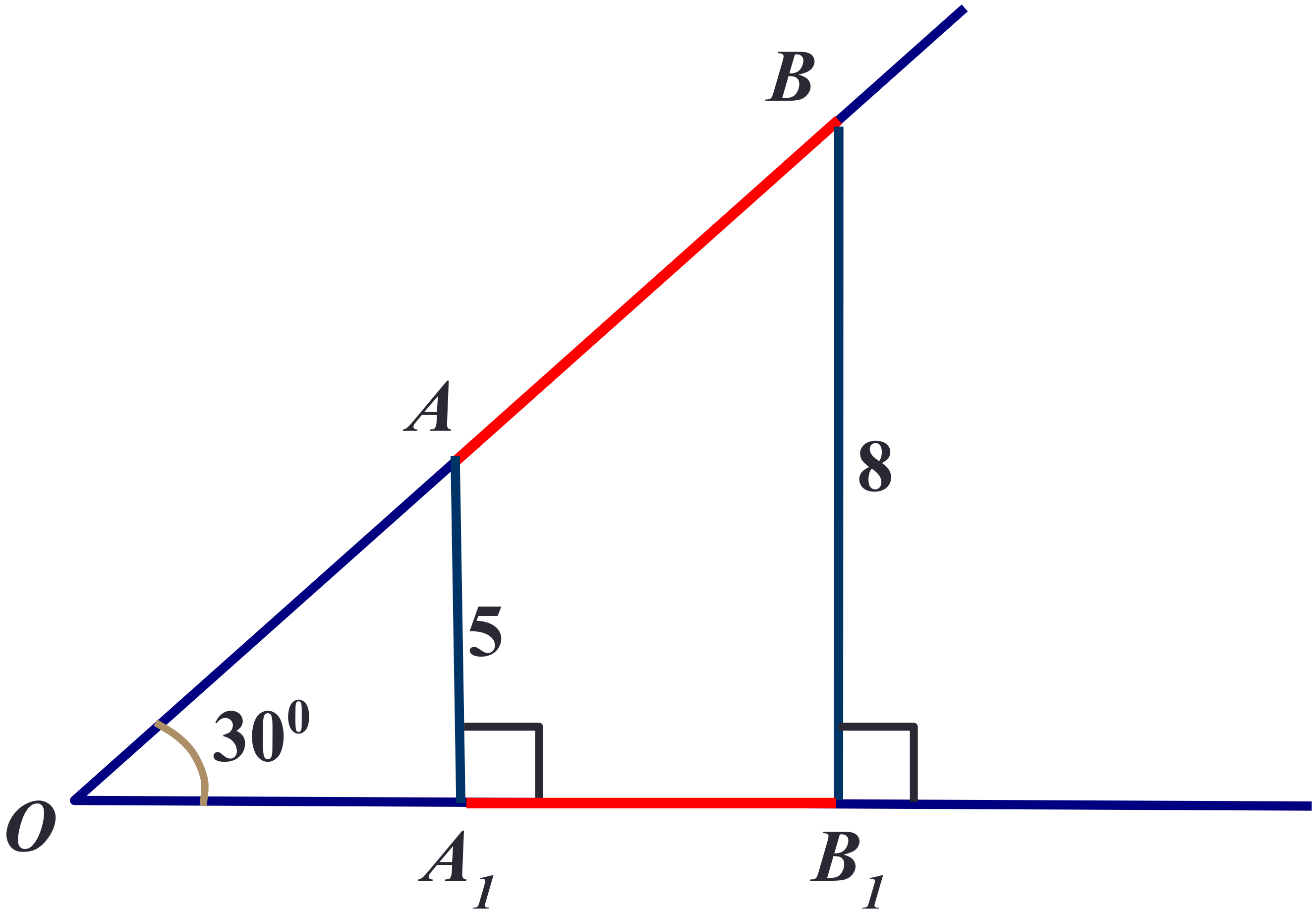
S - ?



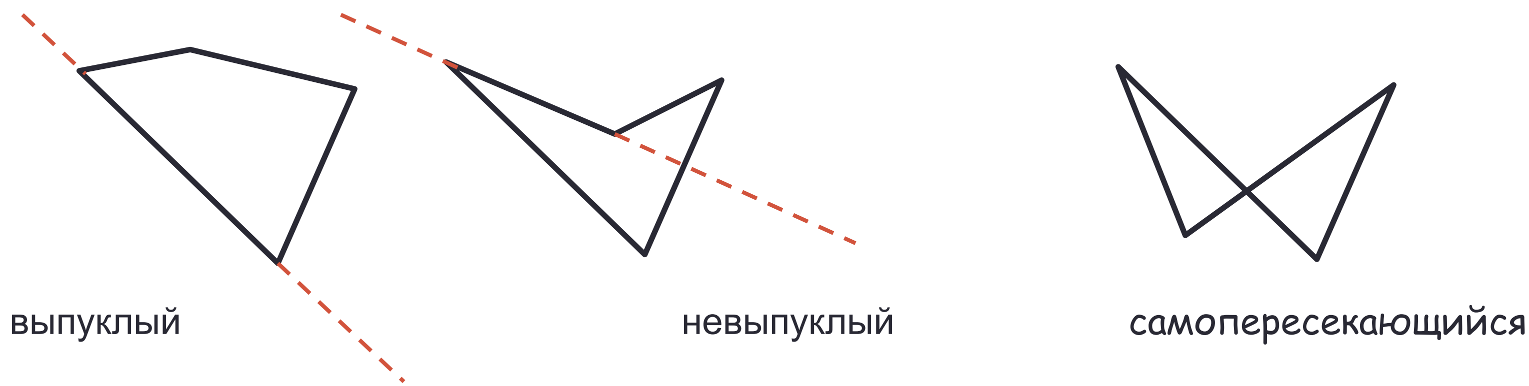
Задача



Задача

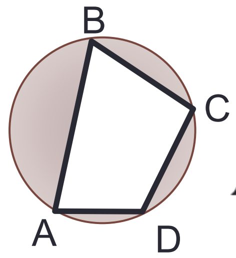


Четырехугольники



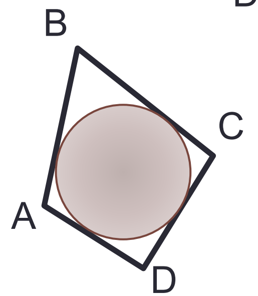
Сумма углов четырехугольника равна 360°

Около четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов равна 180°



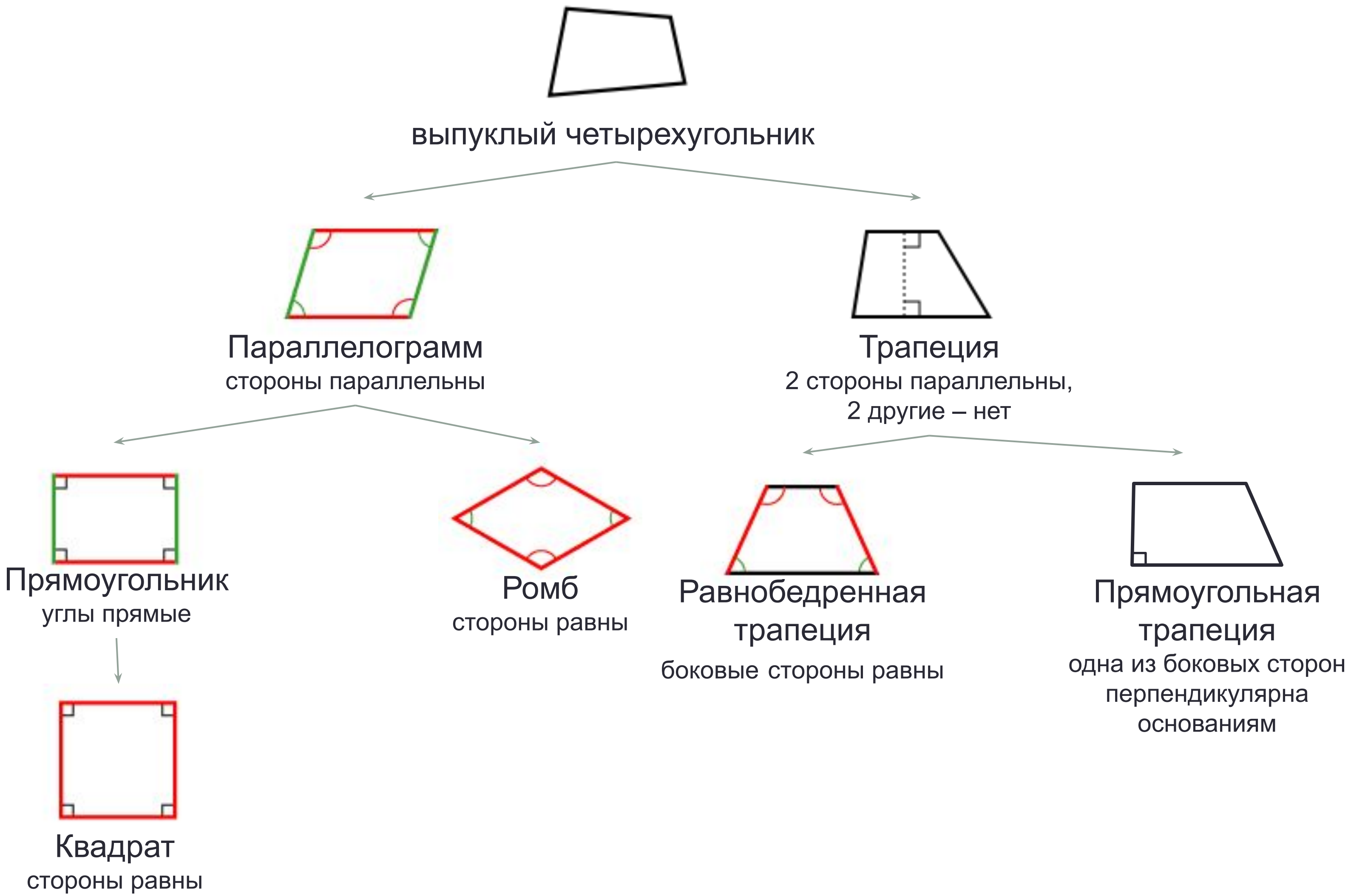
$$A + C = B + D = 180°$$

Выпуклый четырёхугольник является описанным около окружности тогда и только тогда, когда суммы длин противоположных сторон равны

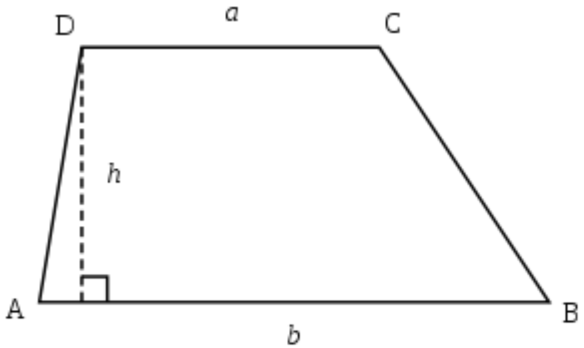


$$AB + CD = BC + AD$$

Выпуклые четырехугольники



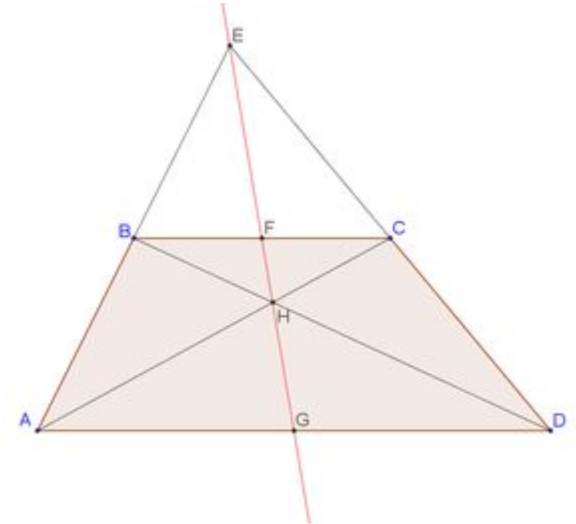
Трапеция



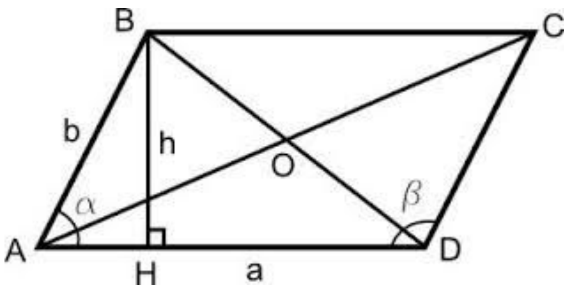
Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме

$$S_{\text{тр}} = \frac{a+b}{2}h$$

Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений её боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой



Параллелограмм



Противоположные стороны параллелограмма равны

Противоположные углы параллелограмма равны

Диагонали параллелограмма пересекаются, и точка пересечения делит их пополам

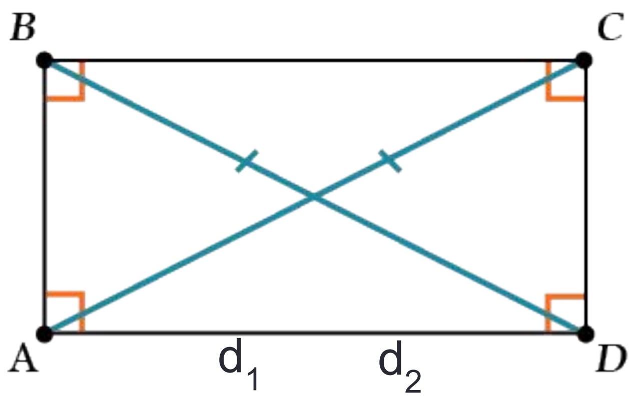
Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°

$$S = ah_a$$

$S = ab \cdot sin\alpha,$ где a и b - стороны, а α - угол между сторонами a и b

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 sin\alpha,$ где d_1 и d_2 - диагонали, α - острый угол при их пересечении

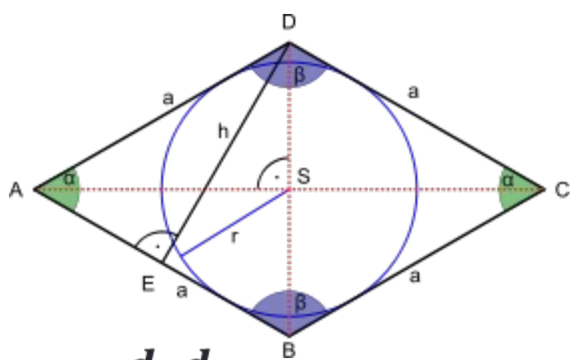
Прямоугольник и ромб



Диагонали прямоугольника равны $d_1 = d_2$

Около любого прямоугольника можно описать окружность, причем диагональ прямоугольника равна диаметру описанной окружности

$$S = ab$$



Диагонали ромба пересекаются под прямым углом ($AC \perp BD$) и в точке пересечения делятся пополам

Диагонали ромба являются биссектрисами его углов ($\angle DCA = \angle BCA$, $\angle ABD = \angle CBD$ и т. д.).

$$S = \frac{d_1 d_2}{2}$$

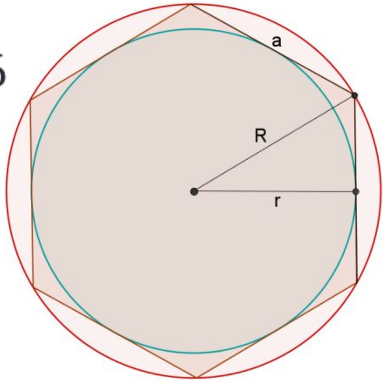
$S = a^2 \sin\alpha$, где α - угол между смежными сторонами

$$S = \frac{4r^2}{\sin\alpha}$$

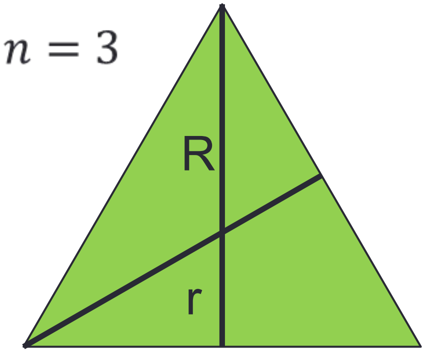
Правильные многоугольники

$$r = R \cdot cos\frac{\pi}{n} \qquad a = 2R \cdot sin\frac{\pi}{n} \qquad S = \frac{1}{2}Pr$$

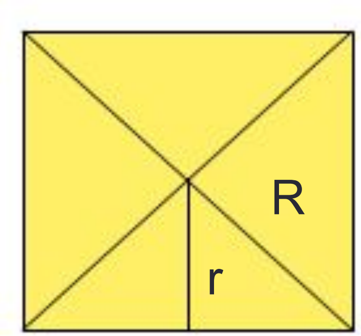
$n = 6$



$n = 3$



$n = 4$



$R = a$

$r = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2 = 2\sqrt{3}r^2$

$R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

$r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$

$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 = 3\sqrt{3}r^2$

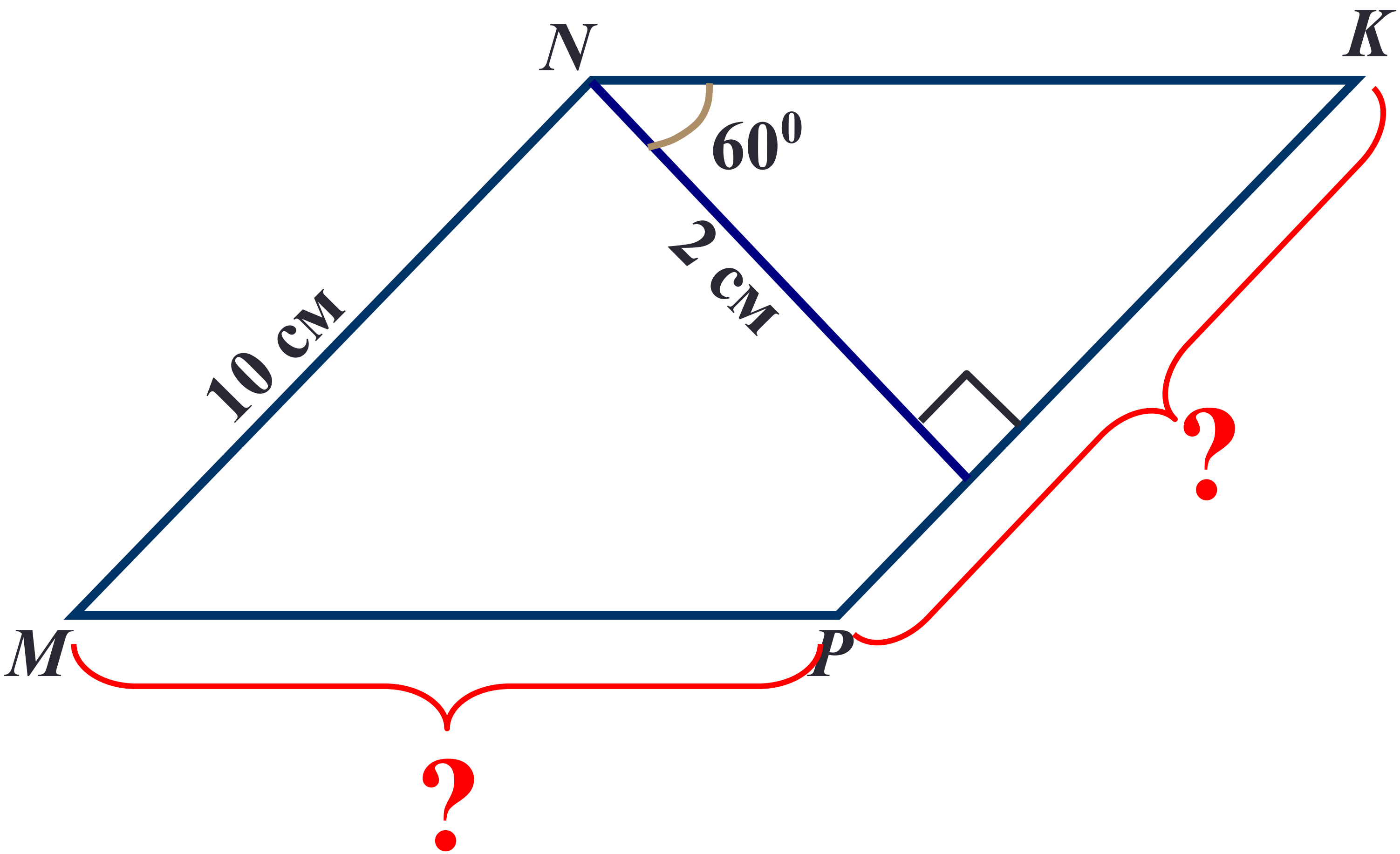
$R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

$r = \frac{a}{2}$

$S = a^2$

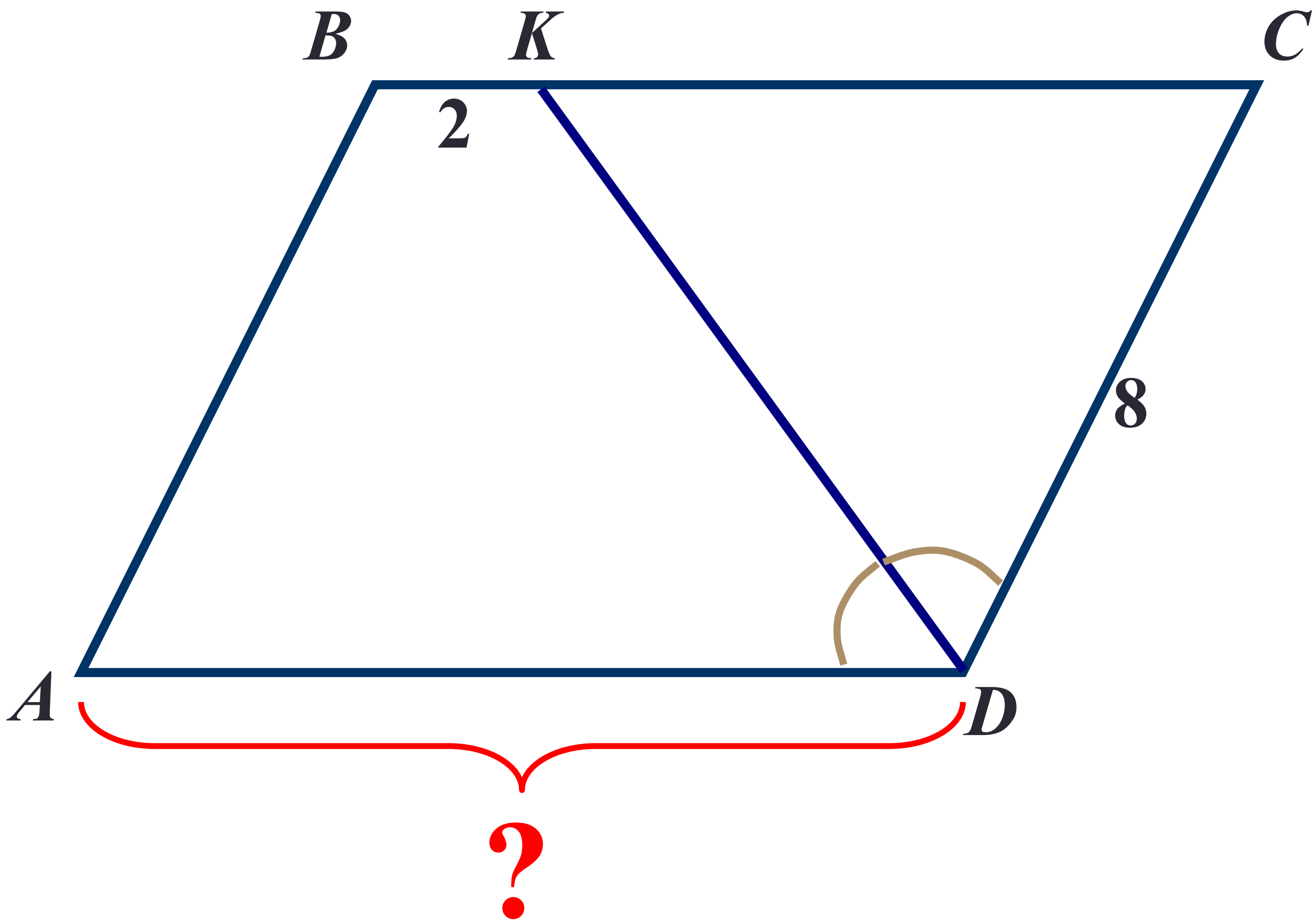
Задача

MNKP - параллелограмм

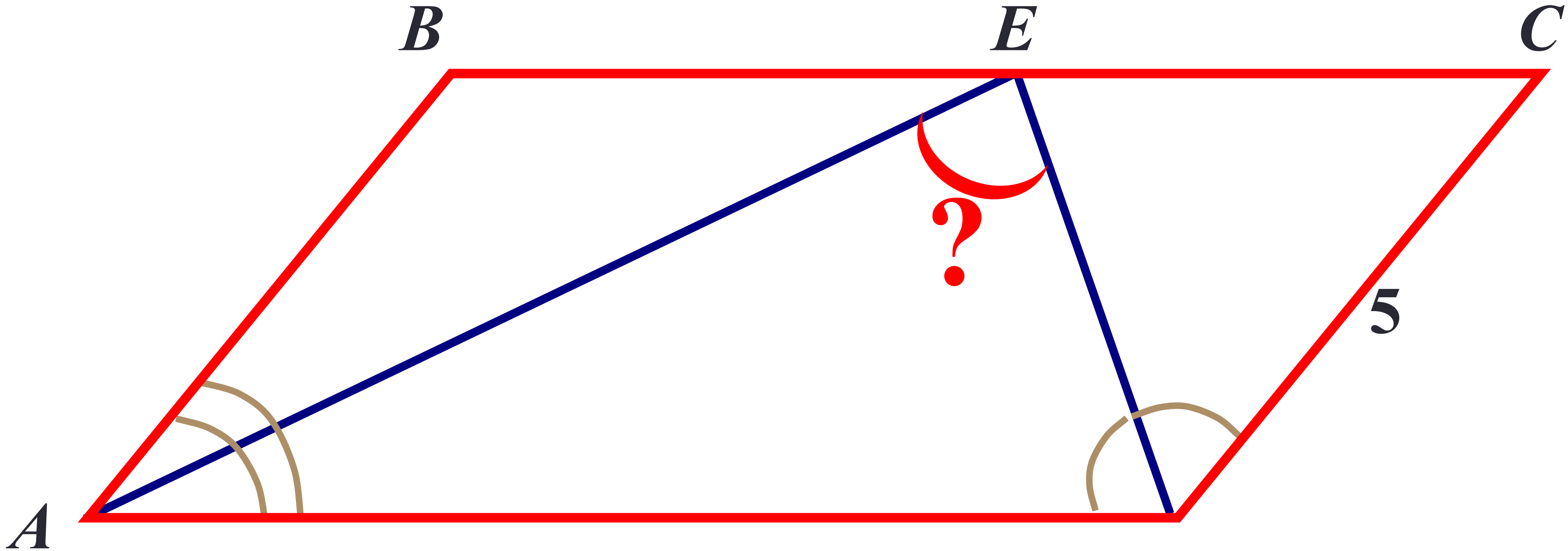


Задача

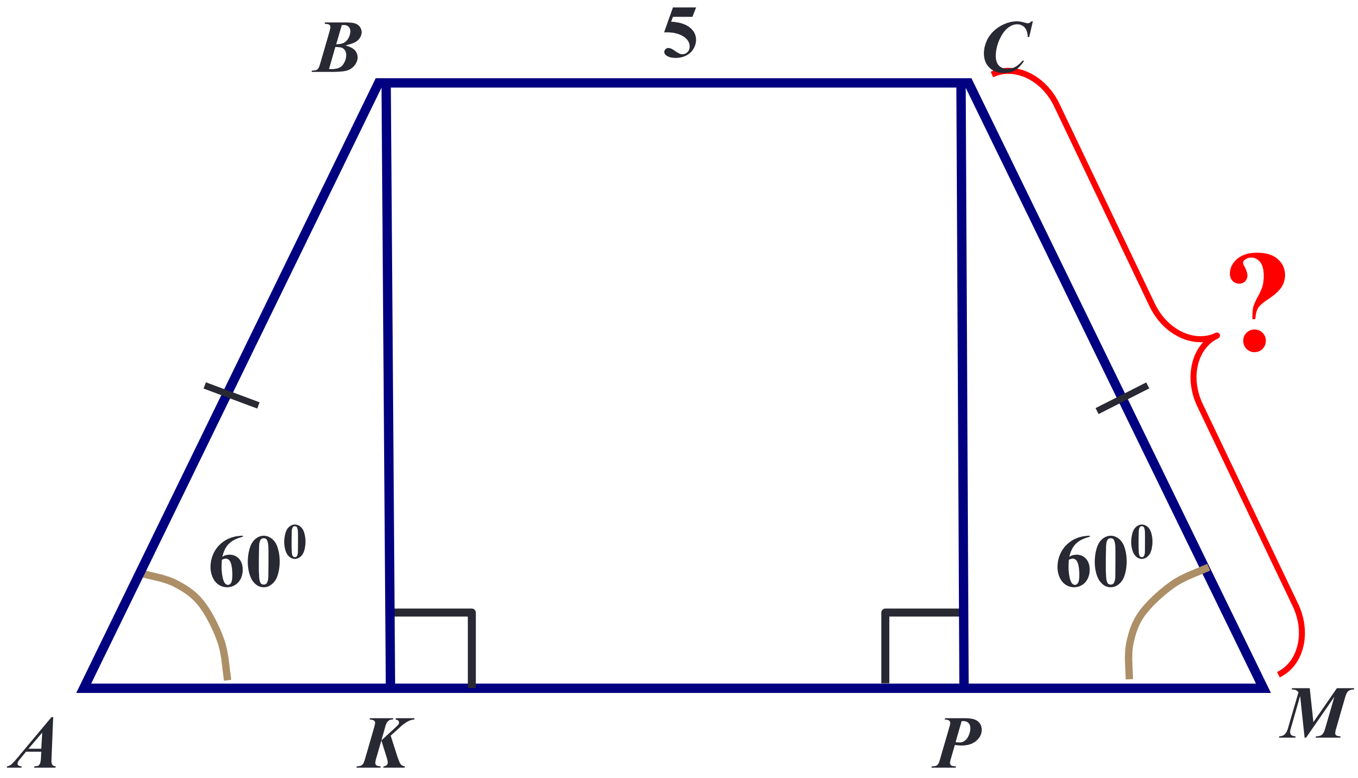
ABCD - параллелограмм



Задача



Задача



Задача

ABCD – трапеция, MN=6, $S_{ABCD} = 48$