

به نام خدا

الکترومغناطیس

حسین نوری

دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان

$$\psi \propto Q \Rightarrow \psi = kQ \Rightarrow \psi = \phi$$

$$\vec{D} = \frac{\psi}{4\pi R^2} \hat{r} \Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{4\pi R^2} \hat{r}$$

حاصل است،
حاصل خطوط روی آن است

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

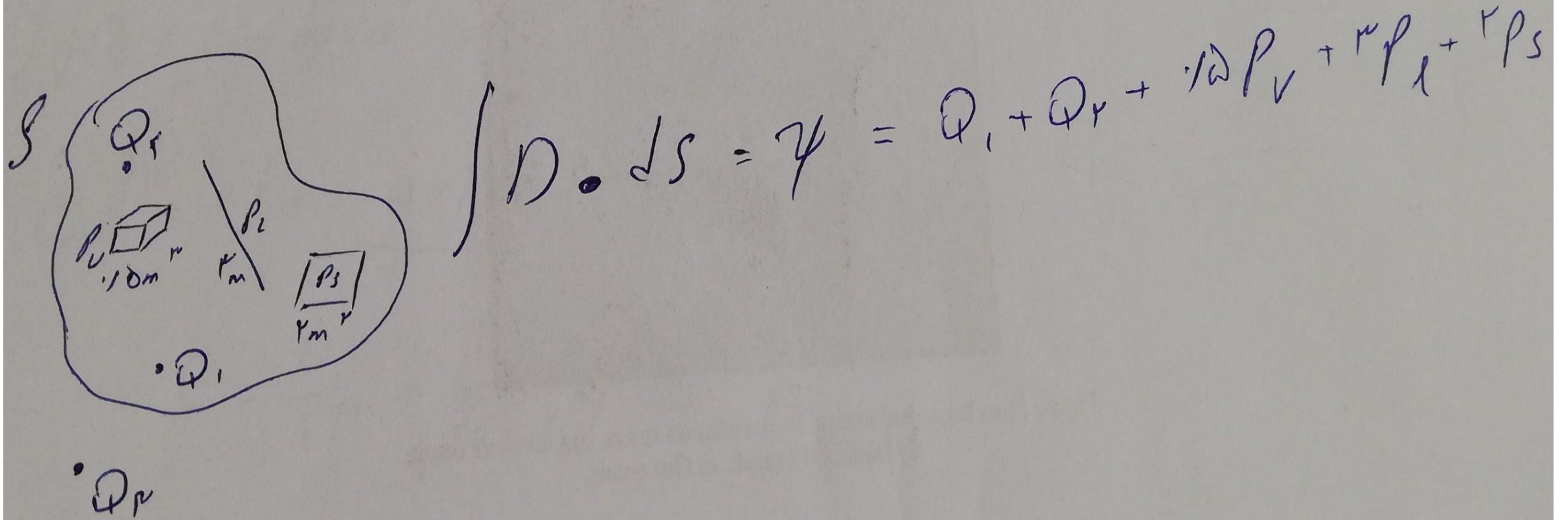
$$\psi = \int \vec{D} \cdot d\vec{s}$$

در خلاء

قانون گاوس: کل شار الکتریکی که از یک سطح بسته عبور می‌کند، برابر است با کل بار الکتریکی داخل آن سطح بسته.

$$\psi = \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \quad \text{برای همه‌ی مواد} \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{در خلاء}$$

مثال: در آنتی‌تالیته از سطح در حساب کنید



$$\int D \cdot dS = \psi = Q_1 + Q_2 + 10\rho_v + 2\rho_l + 2\rho_s$$

کاربردهای قانون گاوس

ویژگی‌های سطح قانون گاوس

۱- سطحی بیابیم که \bar{D} بر آن مماس یا عمود باشد.

$$\bar{D} \cdot \overline{ds} = 0$$

مماس

$$\bar{D} \cdot \overline{ds} = \bar{D} \overline{ds}$$

عمود

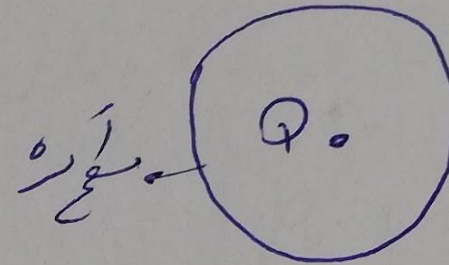
۲- جایی که $\bar{D} \cdot \overline{ds}$ مخالف صفر است، \bar{D} ثابت باشد و بتوان آن را از انتگرال خارج کنیم.

- سطحی که این ویژگی‌ها را داشته باشد، سطح گاوسی می‌نامیم.

انتخاب سطح گاوسی به توزیع بار و تقارن آن و هندسه‌ی مساله بستگی دارد.

مثال: میدان الکتریکی حاصل از یک بار نقطه‌ای Q را بیابید.

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

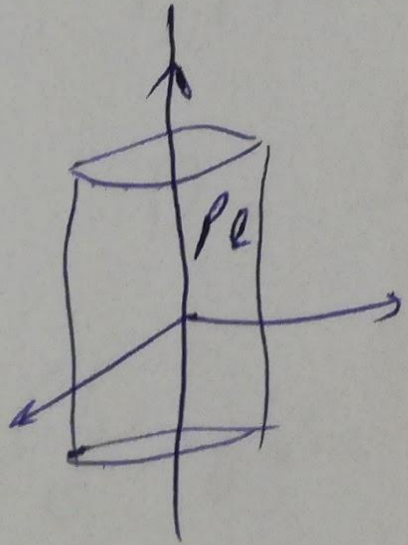


$$\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad \vec{D} = D_r \hat{r}$$
$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi D_r r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = Q$$

$$D_r r^2 \times 2\pi \times \underbrace{(-\cos\theta) \Big|_0^\pi}_{2} = \epsilon_0 2\pi r^2 D_r \quad \Rightarrow D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

مثلاً بار همگنی در فضای بی‌نهایت ρ_e



$$\int \rho_e \, dV = Q$$

$$Q = \int \rho_e \, dV = \int \rho_e \, dz = \rho_e z$$

$$\int D_\phi \, \rho \, d\phi \, dz = D_\rho \times \rho \times 2\pi \times z = \rho_e z$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho_e}{2\pi\epsilon_0 \rho} \hat{r}$$

$$D_\rho = \frac{\rho_e}{2\pi \rho}$$

مثال کا بل کو ایسا لے لیا اور تقریباً لے لیا۔ $+Q$ اور $-Q$ کے درمیان سطح پر مشتمل دانتوں پر $-Q$ ہے۔

دانتوں پر سطح پر مشتمل دانتوں پر $+Q$ ہے۔



$$P_s = \frac{Q}{2\pi a \times l} \quad \text{دانتوں پر}$$

$$P_s = \frac{-Q}{2\pi b \times l} \quad \text{دانتوں پر}$$

$$\int D \cdot dS = Q$$

$$\text{if } \rho < a \quad \int D \cdot dS = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$\text{if } a < \rho < b$$

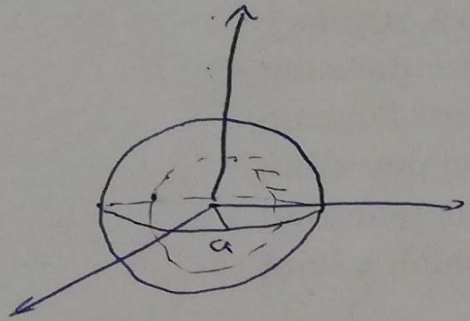
$$\int D \cdot dS = Q \quad D \times 2\pi \rho \times l = Q$$

$$D = \frac{Q}{2\pi \rho l}$$

$$\text{if } \rho > b$$

$$\int D \cdot dS = +Q - Q = 0 \Rightarrow D = 0$$

سوال: برائے کروی جسم کا پوتنل P_0 در داخل کرہ اور بیرونی سطح α کو ذریعہ شہادت سیدھا!
 در تمام نقاط مقصود ہے کہ



if $r < a$ $\int \rho_v dV = Q = \int \rho_v dV$
 $\int \rho_v r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \int \rho_v r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$

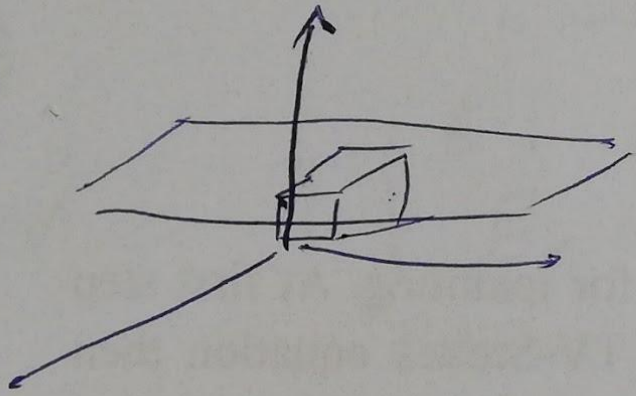
$$\nabla_r \cdot \vec{r} \times \vec{E} = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} \times \rho_v$$

$$\nabla_r = \frac{\rho_v}{\mu} r \hat{r} \Rightarrow E = \frac{\rho_v}{4\epsilon_0} r \hat{r}$$

if $r > a$ $\int \rho_v dV = Q = \int \rho_v r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

$$\nabla \cdot \vec{E} r^2 = \rho \times \frac{\vec{r}}{\mu \epsilon_0} a^3$$

$$D = \frac{\rho a^3}{\mu \epsilon_0 r^2} r \hat{r} \quad E = \frac{\rho a^3}{4\epsilon_0 r^2} r \hat{r}$$



$$\int D \cdot dS = Q$$

۲ سطح + ۴ سطح جانبی
بالا و پایین

$$\int D \cdot dS = 0$$

۴ سطح جانبی

$$\int_{\text{بالا}} D \cdot dS + \int_{\text{پایین}} D \cdot dS = Q = \int P_s dS$$

$$D \times S + D \times S = P_s \times S$$

$$2D \times S = P_s \times S$$

$$\Rightarrow D = \frac{P_s}{2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{P_s}{2\epsilon_0} \hat{z}$$

$$E = \frac{P_s}{2\epsilon_0} (-\hat{z})$$

شکل نقطه‌ای قانون گاوس

$$\oint_S \bar{D} \cdot \bar{ds} = Q = \int_V \rho_v dv$$

$$\oint_{\Delta s} \bar{D} \cdot \bar{ds} = Q = \int_{\Delta v} \rho_v dv$$

$$\oint_{\Delta v} \nabla \cdot D dv = Q = \int_{\Delta v} \rho_v dv$$

$$\nabla \cdot D = \rho_v$$

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

انرژی و پتانسیل الکتریکی

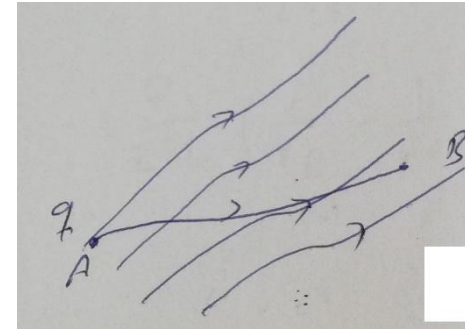
$$\bar{F} = \bar{E} q$$

$$W = \bar{F} \cdot d$$

$$W = q \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

$$W = -q \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

$$v_{AB} = \frac{W}{q} = - \int_{\text{first}}^{\text{end}} \bar{E} \cdot d\bar{l}$$



$$V_{AB} = \frac{W}{q} = - \int_{\text{ابتدا}}^{\text{انتهای}} \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

پتانسیل بار نقطه‌ای

پتانسیل بار نقطه‌ای: نقاط A و B در مسافت r_A و r_B به ترتیب از یک بار نقطه‌ای Q در فاصله r از بار.

برای $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$ است، بردار عنصر طول در مسافت r از بار $d\vec{l} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r^2 \sin\theta d\phi\hat{\phi}$

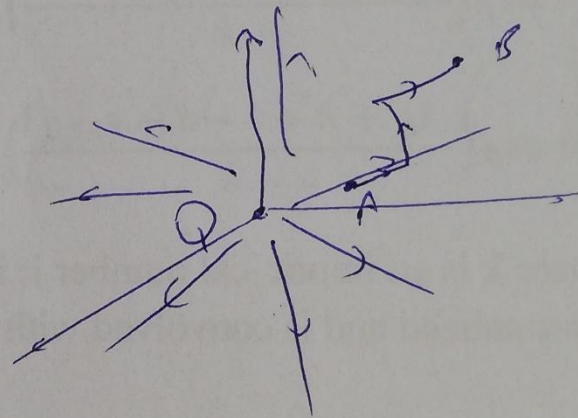
$$V_{AB} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l}$$

$$= + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_A^B =$$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

احتمالاً پتانسیل بسیار وابسته است و

فقط به تفاوت ابتدای و انتهای مسافت است.



است در هم

مرجع پتانسیل

مرجع پتانسیل: جایی که پتانسیل در آن می شود $(v = 0)$.

۱- جایی به ما داده شود.

۲- نقطه‌ای در ∞ در نظر می‌گیریم.

۳- انتخاب یک نقطه‌ی دلخواه.

$$\text{if } r_A \rightarrow \infty \Rightarrow V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_B} \quad V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ r_B = r$$

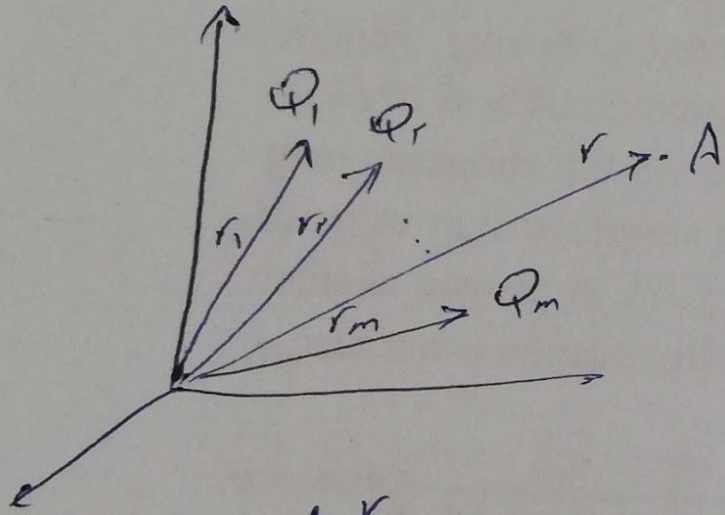
$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = C \Rightarrow r = C\epsilon_0 \Rightarrow \text{کره‌ها با شعاع ثابت}$$

شعاع پتانسیل:

پتانسیل چند بار نقطه‌ای

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

پتانسیل چند بار نقطه‌ای:



$$V_A = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^r (E_1 + E_2 + \dots + E_m) \cdot d\vec{l}$$

$$= - \int_{\infty}^r E_1 \cdot d\vec{l} - \int_{\infty}^r E_2 \cdot d\vec{l} \dots - \int_{\infty}^r E_m \cdot d\vec{l} = - \left[\int_{\infty}^r E_i \cdot d\vec{l} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^m \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 |r - r_i|}$$

پتانسیل برای توزیع‌های پیوسته

$$\Delta V = \sum_{j=1}^n \frac{\Delta Q_j}{4\pi\epsilon_0 |\bar{r} - \bar{r}_j|}$$

$$V(\bar{r}) = \int_{\ell'} \frac{\rho_{\ell}(\bar{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\bar{r} - \bar{r}'|} d\ell' \quad \text{توزیع خطی}$$
$$V(\bar{r}) = \int_{s'} \frac{\rho_v(\bar{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\bar{r} - \bar{r}'|} ds' \quad \text{توزیع سطحی}$$
$$V(\bar{r}) = \int_{\mathcal{V}'} \frac{\rho_v(\bar{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\bar{r} - \bar{r}'|} d\mathcal{V}'$$

پتانسیل بار نقطه‌ای در فاصله‌ی خیلی دور

سؤال: برتقلا این Φ در حال \vec{r}' واقع است پتانسیل این بار را در نقطه \vec{r} به صورت یک بار نقطه‌ای حساب کنید

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(r^2 + r'^2 - 2r \cdot r' \right)^{\frac{1}{2}} = r \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r \cdot r'}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r \cdot r'}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$r \ll r'$

$$(1+t)^n = 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2} t^2 + \dots$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{r \cdot r'}{r^2} - \frac{r^2 \frac{r'^2}{r^2} (r \cdot r')}{2} + \dots \right)$$

هدف عملی است

$$\Rightarrow V(r) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q r \cdot r'}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(r \cdot r')^2 - (r r')^2]$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q r' \cos\gamma}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{Q r'^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{3\cos^2\gamma - 1}{2} \right)$$

پتانسیل چند بار نقطه‌ای در فاصله‌ی خیلی دور

$$V(r) = \frac{\sum Q_j}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\sum Q_j r_j \hat{r}_j}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\sum Q_j [3(r \cdot \hat{r}_j)^2 - (r r_j)^2]}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$V(r) = \frac{Q - Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q \frac{1}{r} \hat{r} \cdot \hat{z} - Q \frac{d}{r} (-\hat{r} \cdot \hat{z})}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \dots = \frac{Q d \hat{r} \cdot \hat{z}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

برابر دوپل (دولت)

