به نام خدا

الکترومغناطیس

حسین نوری

دانشگاه ولیعصر(عج) رفسنجان

ادامه‌ی فصل سوم: قانون گاوس

Gauss’s law

شار $\psi \propto Q \Rightarrow \psi = kQ \Rightarrow \psi = Q$

چگالی شار
چگالی خطوط روی کره‌ای

$\vec{D} = \dfrac{\psi}{4\pi R^2}\hat{r} \Rightarrow \vec{D} = \dfrac{Q}{4\pi R^2}\hat{r}$

در خلا $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$

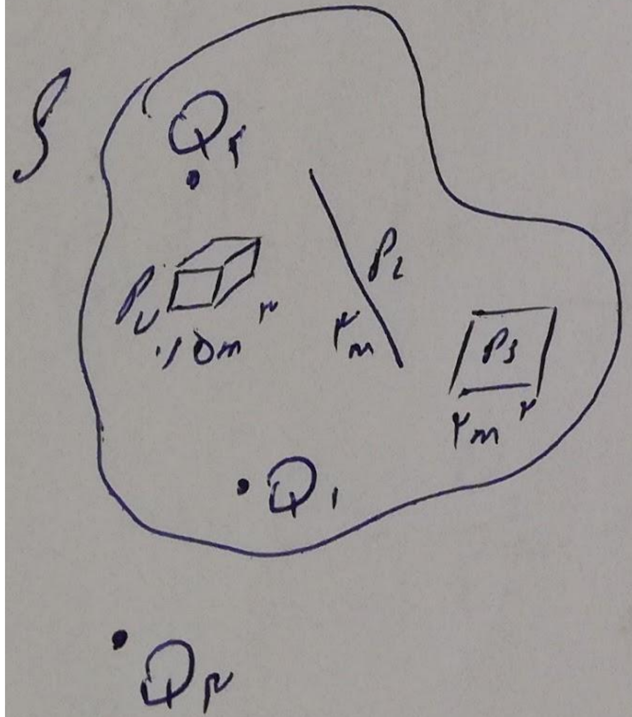
$\psi = \int \vec{D} \cdot \vec{ds}$

قانون گاوس: کل شار الکتریکی که از یک سطح بسته عبور می‌کند، برابر است با کل بار الکتریکی داخل آن سطح بسته.

$\psi = \oint \bar{D}.d\bar{s} = Q$ برای همه‌ی مواد

$\oint \bar{E}.d\bar{s} = \dfrac{Q}{\epsilon_0}$ در خلاء

مثال: شار الکتریکی گذرنده از سطح S را حساب کنید



$$\oint D \cdot ds = \psi = Q_1 + Q_2 + 0.5\rho_v + 3\rho_l + 2\rho_s$$

کاربردهای قانون گاوس

ویژگی‌های سطح قانون گاوس

۱- سطحی بیابیم که $\overline{D}$ بر آن مماس یا عمود باشد.

مماس $\overline{D}.\overline{ds} = 0$

عمود $\overline{D}.\overline{ds} = \overline{D}\overline{ds}$

۲- جایی که $\overline{D}.\overline{ds}$ مخالف صفر است، $\overline{D}$ ثابت باشد و بتوان آن را از انتگرال خارج کنیم.

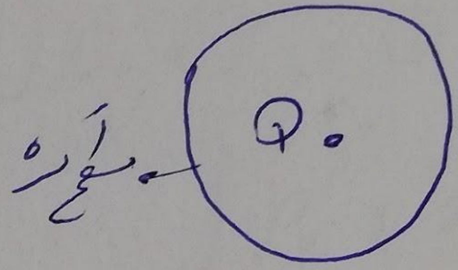
- سطحی که این ویژگی‌ها را داشته باشد، سطح گاوسی می‌نامیم.

انتخاب سطح گاوسی به توزیع بار و تقارن آن و هندسه‌ی مساله بستگی دارد.

مثال: میدان الکتریکی حاصل از یک بار نقطه‌ای Q را بیابید.

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r}$$

$$\oint D \cdot dS = Q \qquad \bar{D} = D_r \hat{r}$$

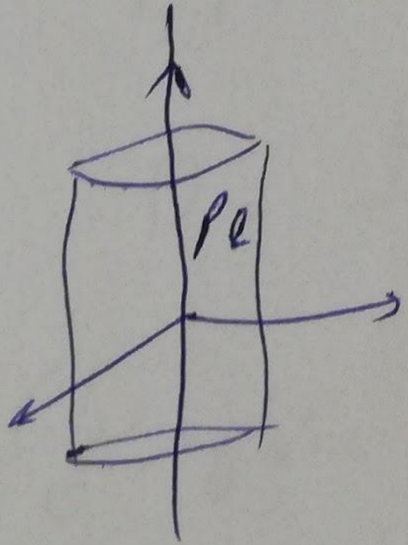


$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} D_r\, r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = Q$$

$$D_r\, r^2 \times 2\pi \times \underbrace{\left(-\cos\theta \Big|_0^{\pi}\right)}_{2} = 4\pi r^2 D_r \Rightarrow D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}$$

مثال: بار خطی بی نهایت با چگالی ρ_l



$$\oint D \cdot dS = Q$$

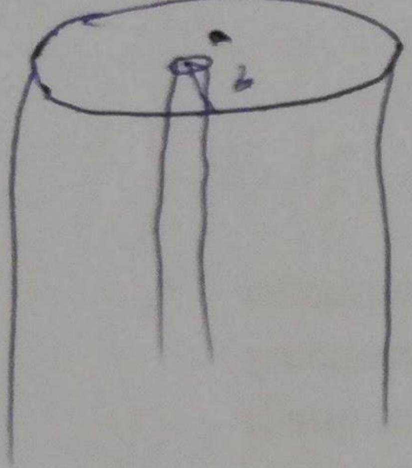
$$Q = \int \rho_l \, dl = \int \rho_l \, dz = \rho_l z$$

$$\int D_\rho \, \rho \, d\varphi \, dz = D_\rho \times \rho \times 2\pi \times z = \rho_l z$$

$$D_\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\rho}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 \rho} \hat{\rho}$$

۸) مثال: کابل کواکسیال زیر را در نظر بگیرید. بار $+Q$ روی واحد سطح رسانای داخلی و بار $-Q$ روی واحد سطح رسانای خارجی توزیع شده است. میدان را در تمام نقاط فضا محاسبه کنید.



$$\rho_{s_{\text{داخلی}}} = \frac{Q}{2\pi a \times 1} \quad \text{طول واحد}$$

$$\rho_{s_{\text{خارجی}}} = \frac{-Q}{2\pi a \times 1} \quad \text{طول واحد}$$

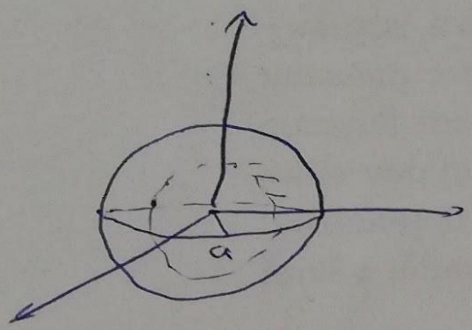
$$\oint D \cdot ds = Q \qquad \text{if } \rho < a \quad \oint D \cdot ds = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$\text{if } a < \rho < b \quad \oint D \cdot ds = Q \qquad D \times 2\pi\rho \times 1 = Q$$

$$D = \frac{Q}{2\pi\rho}\hat{\rho}$$

$$\text{if } \rho > b \quad \oint D \cdot ds = +Q - Q = 0 \Rightarrow D = 0$$

مثال: بار الکتریکی حجمی با چگالی ρ_v در داخل کره ای فرضی به شعاع a توزیع شده است میدان را در تمام نقاط فضا بدست آورید.



if $r<a$

$$\oint D\cdot dS = Q = \int \rho_v \, dv = \int \rho_v r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr$$

$$\int D_r r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \int \rho_v r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr$$

$$D_r \, r^2 \times 4\pi = \frac{4\pi}{3} r^3 \times \rho_v$$

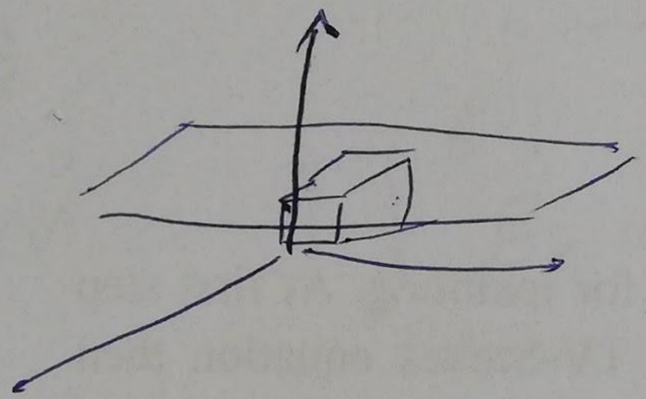
$$D_r = \frac{\rho_v}{3} r \, \hat{r} \Rightarrow E = \frac{\rho_v}{3\varepsilon_0} r \, \hat{r}$$

if $r>a$

$$\oint D\cdot dS = Q = \int \rho \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$D \times 4\pi r^2 = \rho \times \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$D = \frac{\rho a^3}{3 r^2} \hat{r} \qquad E = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$$



$$\int D \cdot dS = Q$$

۲ سطح + ٤ سطح جانبی

بالا و پایین

$$\int_{\text{٤ سطح جانبی}} D \cdot dS = 0$$

$$\int_{\text{بالا}} D \cdot dS + \int_{\text{پایین}} D \cdot dS = Q = \int \rho_s \, dS$$

$$D \times S + D \times S = \rho_s \times S$$

$$\Rightarrow 2DS = \rho_s \times S \Rightarrow D = \frac{\rho_s}{2} \Rightarrow E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}\hat{z}$$

$$E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}(-\hat{z})$$

شکل نقطه‌ای قانون گاوس

$$\oint_{s} \overline{D}.\overline{ds} = Q = \int_{v} \rho_v dv$$

$$\oint_{\Delta s} \overline{D}.\overline{ds} = Q = \int_{\Delta v} \rho_v dv$$

$$\oint_{\Delta v} \nabla.Ddv = Q = \int_{\Delta v} \rho_v dv$$

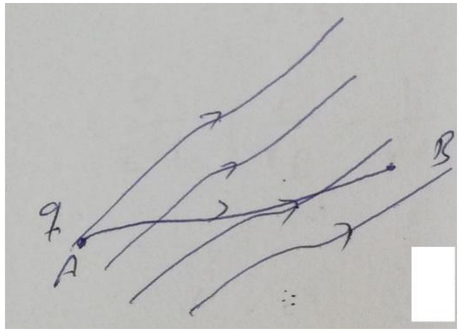
$$\nabla.D = \rho_v$$

$$\nabla.E = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

انرژی و پتانسیل الکتریکی

$$\bar{F} = \bar{E}\, q$$

$$W = \bar{F} . d$$



$$W = q \int_A^B \bar{E} . d\bar{l}$$

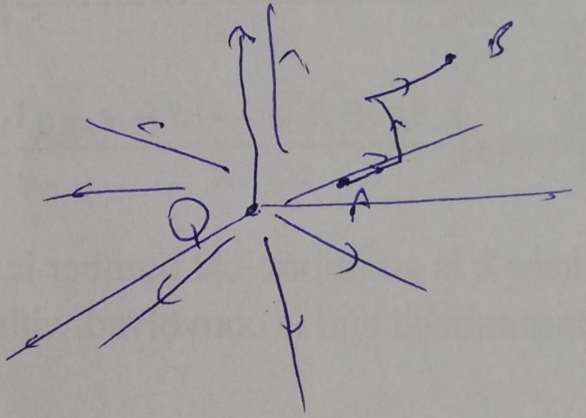
$$W = -q \int_A^B \bar{E} . d\bar{l}$$

$$v_{AB} = \frac{W}{q} = -\int_{first}^{end} \bar{E} . d\bar{l}$$

$$V_{AB} = \frac{W}{q} = -\int_{\text{ابتدا}}^{\text{انتها}} E . dl$$

پتانسیل بار نقطه‌ای

پتانسیل بار نقطه‌ای: نقاط A و B را در میدان بار نقطه‌ای Q در نظر بگیرید. میدان برابر $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$ است و بردار عنصر طول در دستگاه کروی برابر $\vec{dl} = dr\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$ است داریم



از A به B

$$V_{AB} = -\int_A^B E\cdot dl = -\int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot dr\,\hat{r}$$

$$= +\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}\Big|_A^B =$$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right) \Rightarrow$$

اختلاف پتانسیل به مسیر وابسته نیست و فقط به نقاط ابتدا و انتها وابسته است.

مرجع پتانسیل

مرجع پتانسیل: جایی که پتتانسیل در آن ۰ می شود ($v = 0$).

۱- جایی به ما داده شود.

۲- نقطه‌ای در ∞ در نظر می‌گیریم.

۳- انتخاب یک نقطه‌ی دلخواه.

if $r_A \to \infty \Rightarrow V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_B}$ $\quad V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

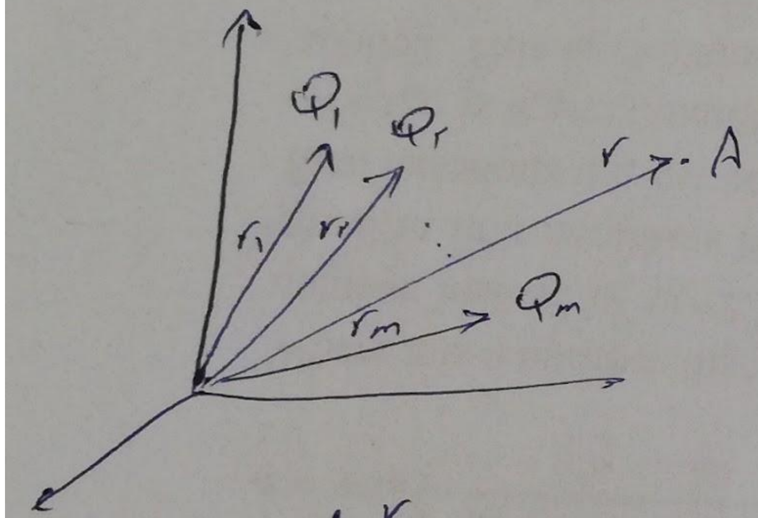
$r_B = r$

سطوح همپتانسیل: $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = C \longrightarrow r = Cte \Rightarrow$ کره هایی با شعاع های ثابت

پتانسیل چند بار نقطه‌ای

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r}$$

پتانسیل چند بار نقطه‌ای:



$$V_A = -\int_{\infty}^{r} E \cdot dl = -\int_{\infty}^{r} (E_1 + E_2 + \dots + E_m) \cdot dl$$

$$= -\int_{\infty}^{r} E_1 \cdot dl - \int_{\infty}^{r} E_2 \cdot dl \ \cdots - \int_{-\infty}^{r} E_m \cdot dl = -\sum \int_{-\infty}^{r} E_i \cdot dl$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 |r - r_i|}$$

پتانسیل برای توزیع‌های پیوسته

$$\Delta V = \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta Q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r} - \bar{r}_j|}$$

$$V(\bar{r}) = \int_{l'} \frac{\rho_l(\bar{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r} - \bar{r}'|} \, dl'$$

توزیع خطی

$$V(\bar{r}) = \int_{s'} \frac{\rho_s(\bar{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r} - \bar{r}'|} \, ds'$$

توزیع سطحی

$$V(\bar{r}) = \int_{v'} \frac{\rho_v(\bar{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r} - \bar{r}'|} \, dv'$$

پتانسیل بار نقطه‌ای در فاصله‌ی خیلی دور

مثال: بار نقطه‌ای Q در مکان $\vec{r}'$ واقع است. پتانسیل این بار را در نقطه‌ی $\vec{r}$ خیلی دور به صورت بسط سری حساب کنید.

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad |r-r'| = \left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}'\right)^{\frac{1}{2}} = r\left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r\cdot r'}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\Big(1 + \underbrace{\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r\cdot r'}{r^2}}_{t \ll 1}\Big)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(1+t)^n = 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2 + \cdots$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \frac{r\cdot r'}{r^2} + \frac{3}{4}\frac{4}{2}\frac{(r\cdot r')^2}{r^4} + \cdots - \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{2r^2 r\cdot r'}{r^4}\cdots\right)$$

با حذف جملات بالاتر

$$\Rightarrow V(r) \simeq \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q\, r\cdot r'}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r^5}\left[3(r\cdot r')^2 - r^2 r'^2\right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q r'\cos\gamma}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{Q r'^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\frac{3\cos^2\gamma - 1}{2}\right)$$

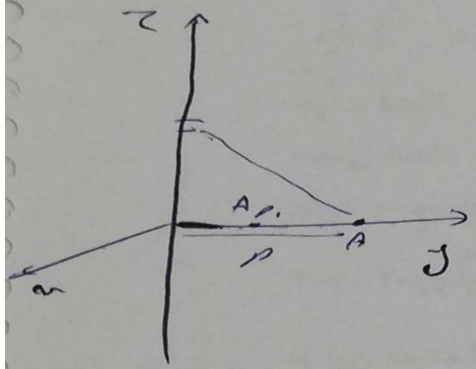
پتانسیل چند بار نقطه‌ای در فاصله‌ی خیلی دور

$$V(r) = \frac{\sum Q_j}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\sum Q_j\, \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'_j}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{\sum Q_j\left[3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_j)^2 - (r\, r_j)^2\right]}{8\pi\varepsilon_0 r^5} = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$V(r) = \frac{Q-Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q\frac{d}{2}\,\hat{r}\cdot\hat{z} - Q\frac{d}{2}\,(-\hat{r}\cdot\hat{z})}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \dots = \frac{Qd\,\hat{r}\cdot\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

برای دوقطبی

مثال (۴۳): پتانسیل حاصل از یک خط بار به طول ∞ با چگالی یکنواخت ρ_l را در نقطه‌ای به فاصله r بدست آورید.



$$r = \rho\hat{\rho}$$
$$r' = z'\hat{z}$$

$$V(\bar{r}) = \int_{l'} \frac{\rho_l(\bar{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r}-\bar{r}'|}\, dl'$$

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 (\rho^2+z'^2)^{\frac{1}{2}}}\, dz' = \frac{2\rho_l}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{dz'}{(\rho^2+z'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\sqrt{r^2+z'^2}+z'\right)\Big|_0^{\infty} = \ln \infty - \ln r = \infty$$ مبهم

$$V = \int_0^{\infty} \frac{\rho_l\, dz'}{4\pi\varepsilon_0 (\rho^2+z'^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 (\rho_0^2+z'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\left(\sqrt{\rho^2+z'^2}+z'\right) - \ln\left(\sqrt{\rho_0^2+z'^2}+z'\right)\right)\Big|_0^{\infty}$$

$$= \boxed{-\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0}}$$