A vertical decorative bar on the left side of the page, featuring a repeating sequence of colorful geometric shapes: yellow triangles, red triangles, blue cubes, green circles, and yellow triangles.

Решение заданий В₈ ЕГЭ по математике

Производная

Функция	Производная
$y=C$	$y'=0$
$y=x$	$y'=1$
$y=kx$	$y'=k$
$y=kx+m$	$y'=k$
$y=x^m$	$y'=mx^{m-1}$
$y=kx^m$	$y'=kmx^{m-1}$
$y=\frac{1}{x}$	$y'=-\frac{1}{x^2}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=\operatorname{tg} x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$
$y=\operatorname{ctg} x$	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

Найти производную функции:

A) $y=2,5$

Б) $y=-3,2x + 3$

В) $y=7,5x$

Г) $y=-10x$

Д) $y=x^2$

Е) $y=2x^5$

Ж) $y=2,4x^4$

З) $y=-x^2$

И) $y=2x + \cos x$

К) $y=3x^2 + 4x$

Л) $y=\sin x$

М) $y=2\cos x$

Н) $y=3\sin x$

О) $y=2/x$

П) $y=4\sin 2x$

Р) $y= \operatorname{tg} x + 1$

Задача

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 3t - 29$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 3$ с.

Решение.

Найдем закон изменения скорости: $v(t) = x'(t) = 2t - 3$

Тогда находим: $v(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 3$
м/с.

Ответ: 3.

Задача

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t + 13$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 3$ с.



Задача

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t + 13$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 3$ с.



Ответ: 8

Задача

Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$.

Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = 7x - 5$

их угловые коэффициенты равны. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения : $y' = 7$

$$(x^2 + 6x - 8)' = 7 \Leftrightarrow 2x + 6 = 7 \Leftrightarrow x = 0,5$$

Ответ: 0,5.

Задача

Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$

Найдите абсциссу точки касания.



Задача

Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$.
Найдите абсциссу точки касания.



Ответ: -1

Задача

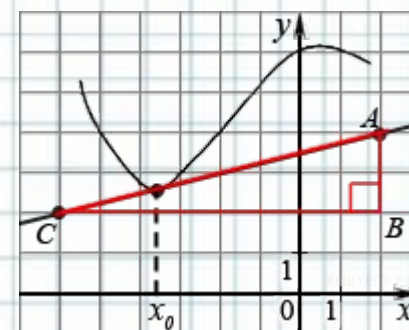
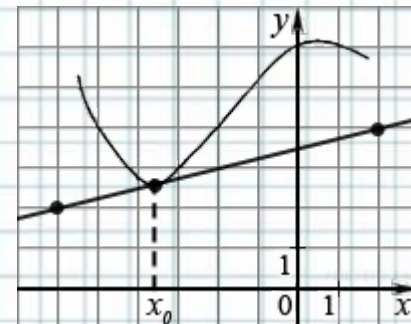
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(2; 4)$, $B(2; 2)$, $C(-6; 2)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ACB . Поэтому

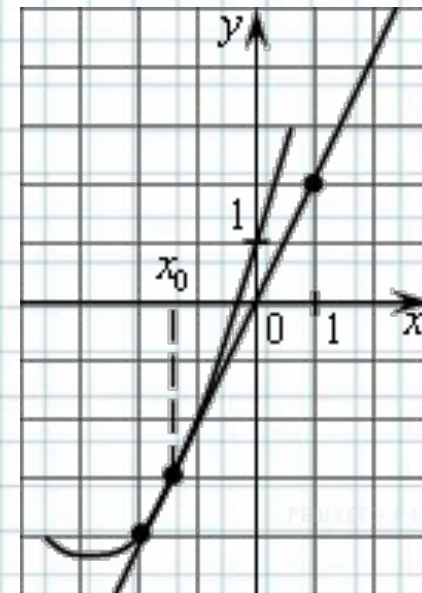
$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{4 - 2}{2 + 6} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.



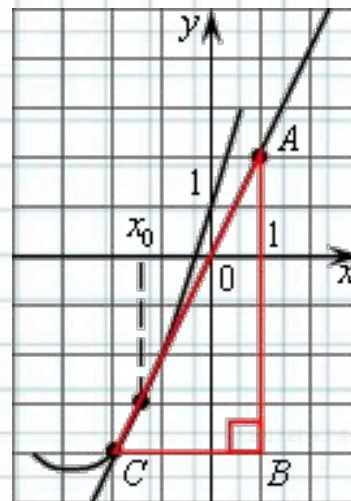
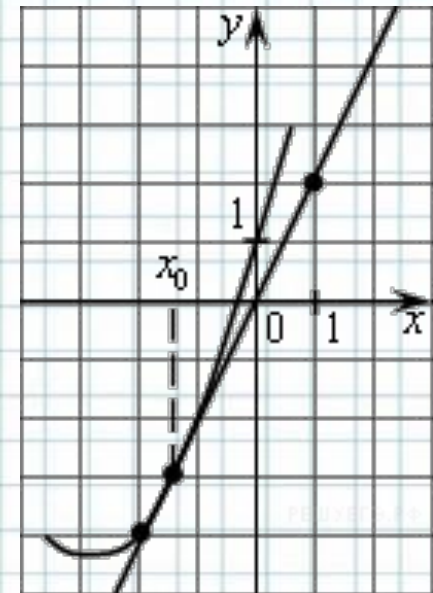
Задача

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Задача

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



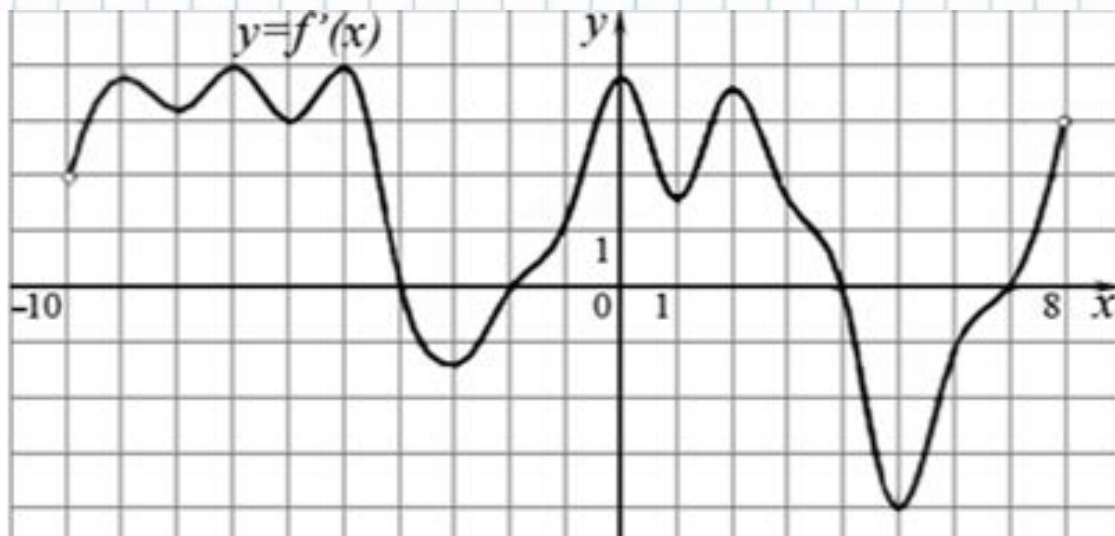
$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2 + 4}{1 + 2} = 2.$$

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-9; 6]$.

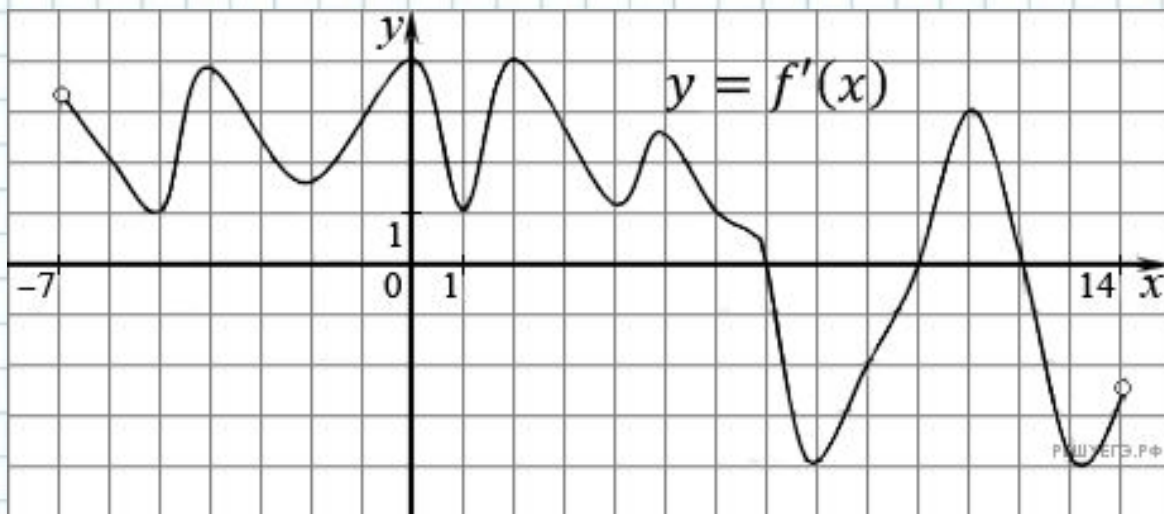
• **Решение.**

Точки максимума соответствуют точкам смены знака производной с плюса на минус. На отрезке $[-9; 6]$ функция имеет две точки максимума $x = -4$ и $x = 4$.

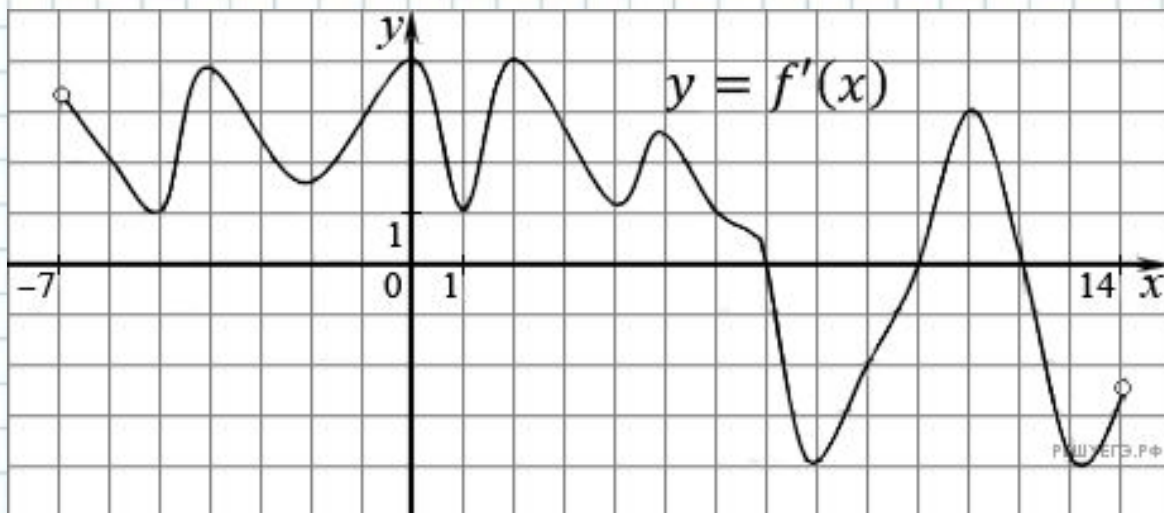
Ответ: 2.



На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-6; 9]$.



На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-6; 9]$.



Решение.

Точки максимума соответствуют точкам смены знака производной с положительного на отрицательный. На отрезке $[-6; 9]$ функция имеет одну точку максимума $x = 7$.

Ответ: 1.

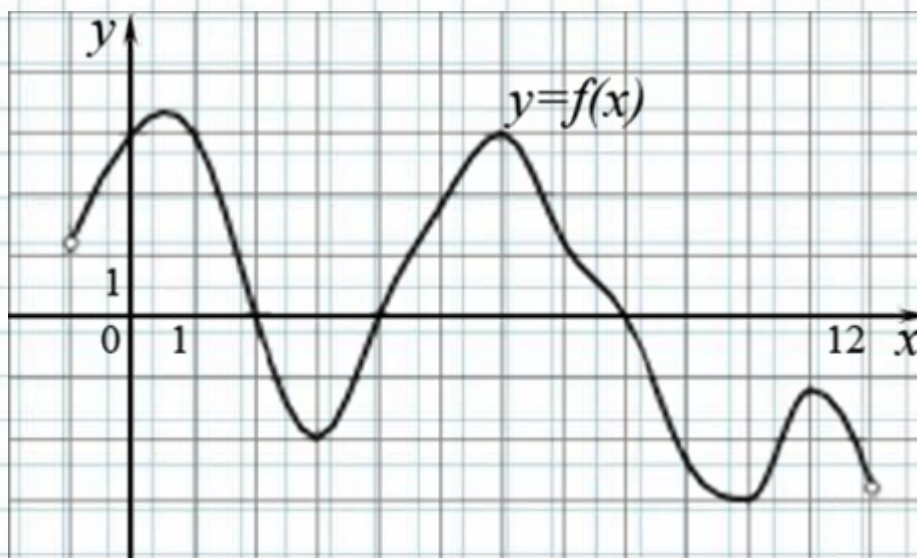


На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-1; 12)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

• Решение.

Производная функции отрицательна на тех интервалах, на которых функция убывает, т. е. на интервалах $(0,5; 3)$, $(6; 10)$ и $(11; 12)$. В них содержатся целые точки 1, 2, 7, 8 и 9. Всего 5 точек.

Ответ: 5.

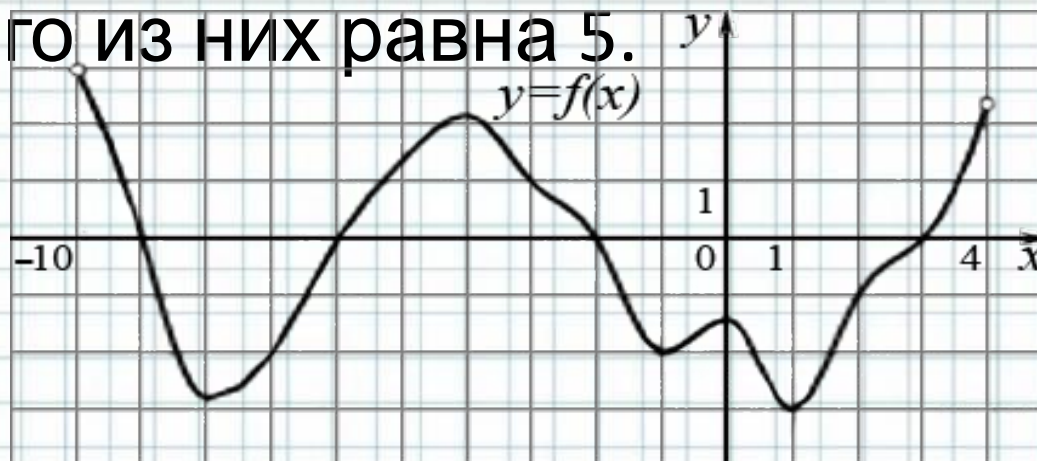


На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 4)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

• **Решение.**

Промежутки убывания функции $f(x)$ соответствуют промежуткам, на которых производная функции отрицательна, то есть интервалу $(-9; -6)$ длиной 3 и интервалу $(-2; 3)$ длиной 5. Длина наибольшего из них равна 5.

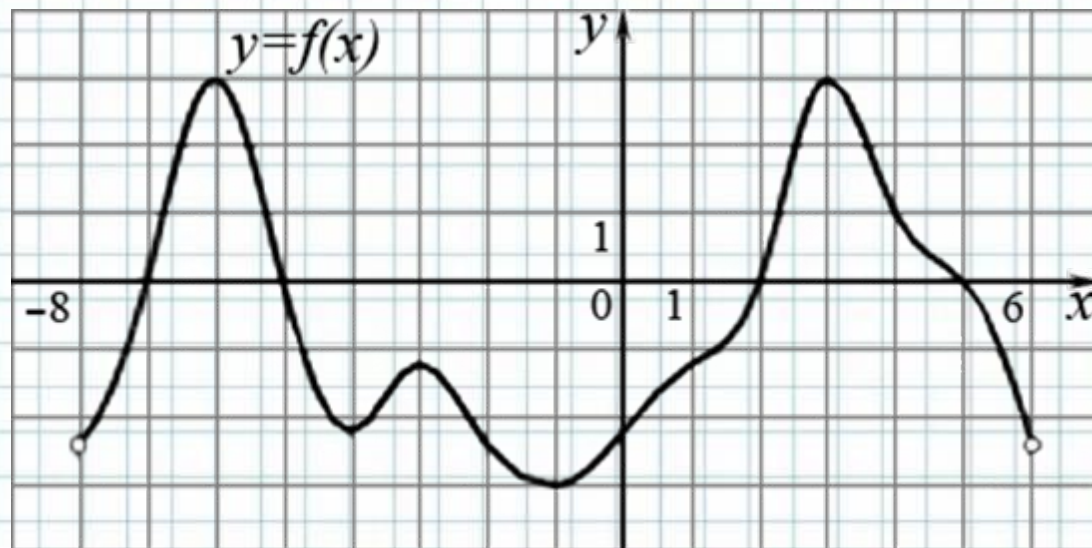
Ответ: 5.



На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

• **Решение.**

Промежутки возрастания функции $f(x)$ соответствуют промежуткам, на которых производная функции положительна, то есть интервалам $(-7; -5)$, $(2; 5)$. Наибольший из них — интервал $(2; 5)$, длина которого 3.

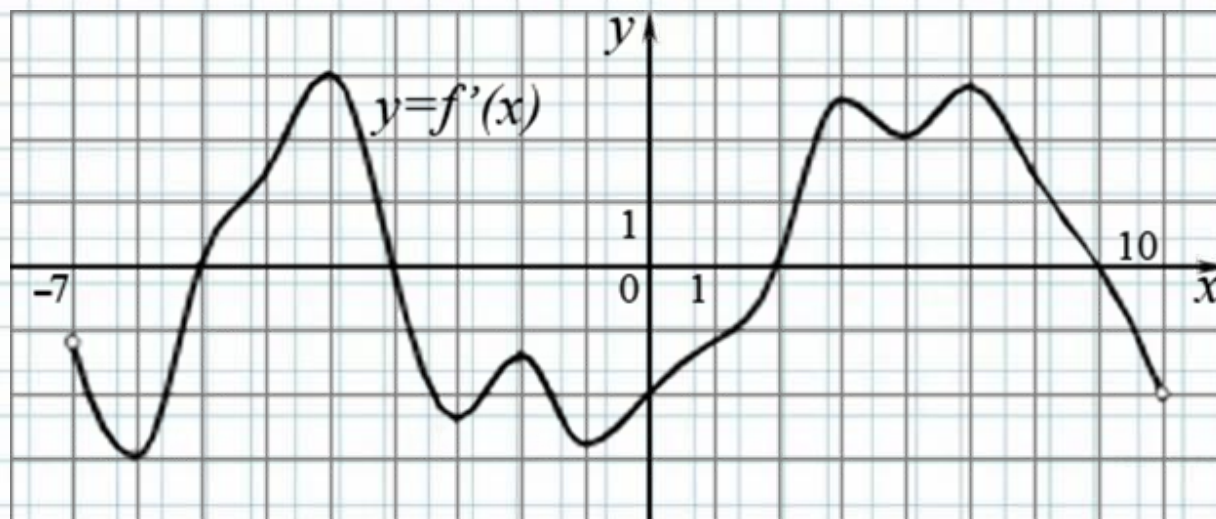


На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 10)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-3; 8]$.

• **Решение.**

Точки минимума соответствуют точкам смены знака производной с минуса на плюс. На отрезке $[-3; 8]$ функция имеет одну точку минимума $x = 4$.

Ответ: 1.

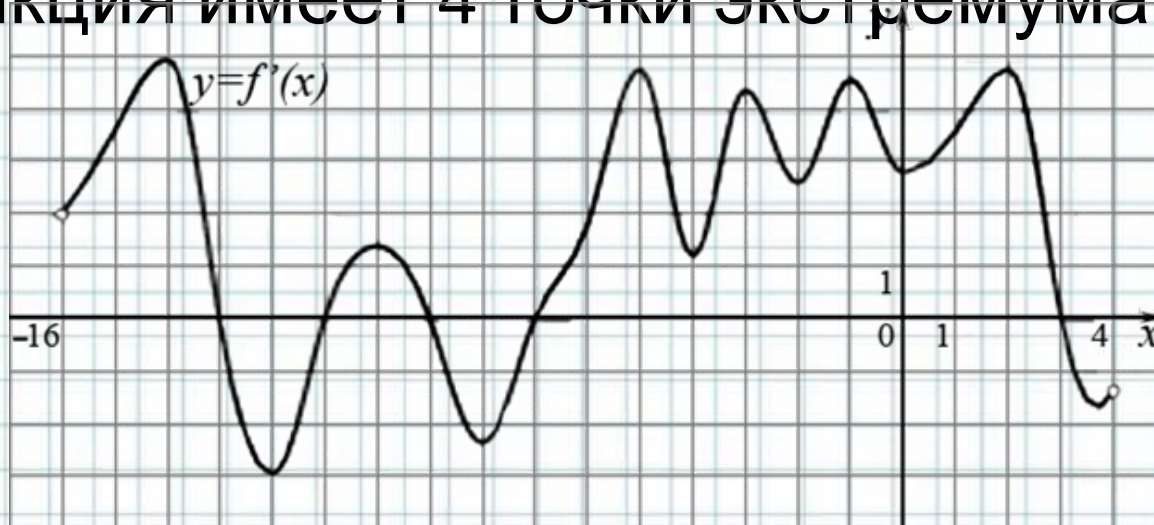


На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-16; 4)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-14; 2]$.

• **Решение.**

Точки экстремума соответствуют точкам смены знака производной — изображенным на графике нулям производной. Производная обращается в нуль в точках $-13, -11, -9, -7$. На отрезке $[-14; 2]$ функция имеет 4 точки экстремума.

Ответ: 4.

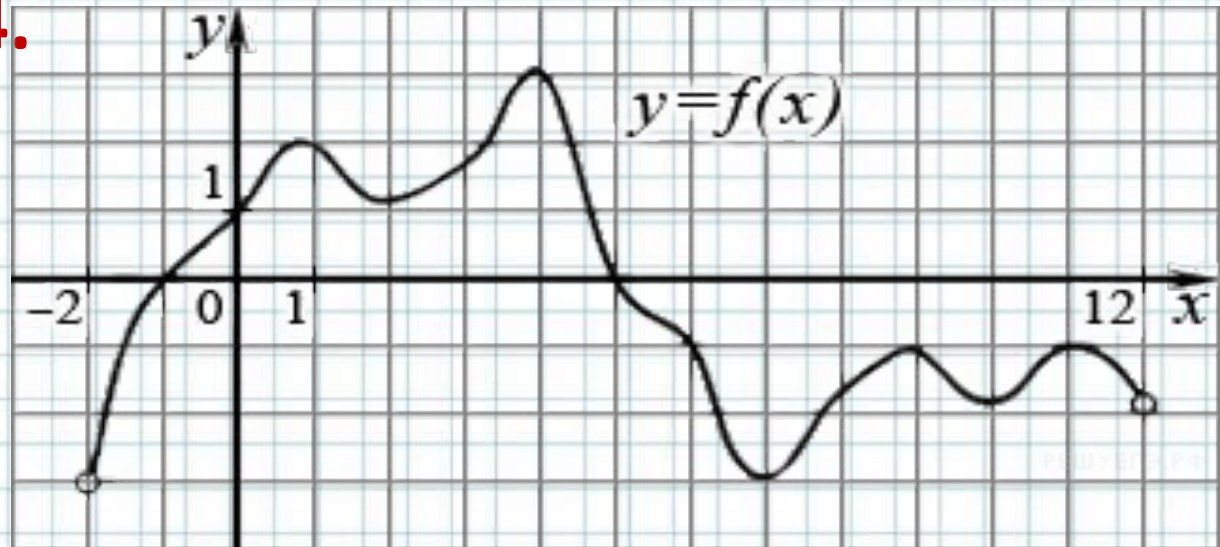


На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-2; 12)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

• **Решение.**

Заданная функция имеет максимумы в точках 1, 4, 9, 11 и минимумы в точках 2, 7, 10. Поэтому сумма точек экстремума равна $1 + 4 + 9 + 11 + 2 + 7 + 10 = 44$.

Ответ: 44.

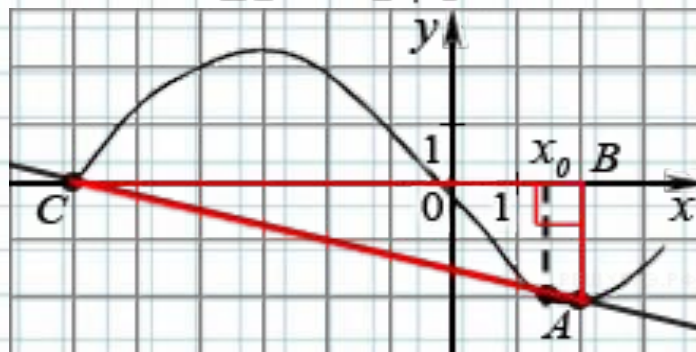
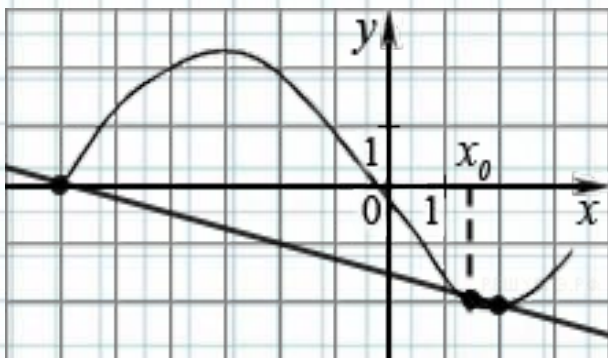


На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

• **Решение.**

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(2; -2)$, $B(2; 0)$, $C(-6; 0)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом $\angle ACB$.

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg}(\angle ACB) = -\frac{AB}{BC} = -\frac{2}{2+6} = -0,25$$

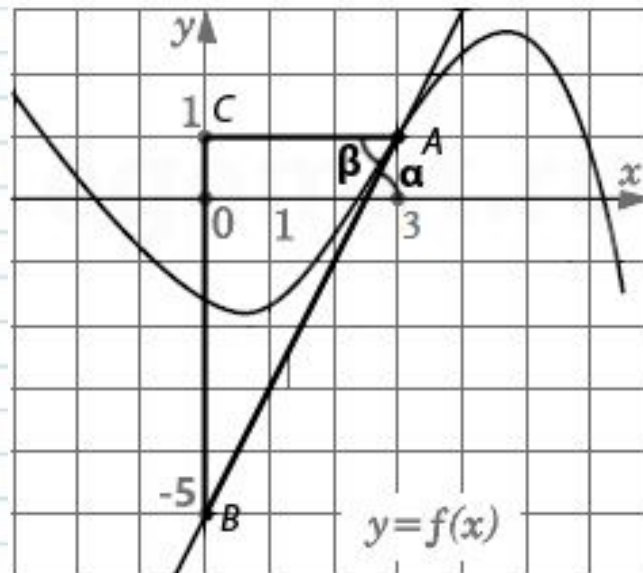
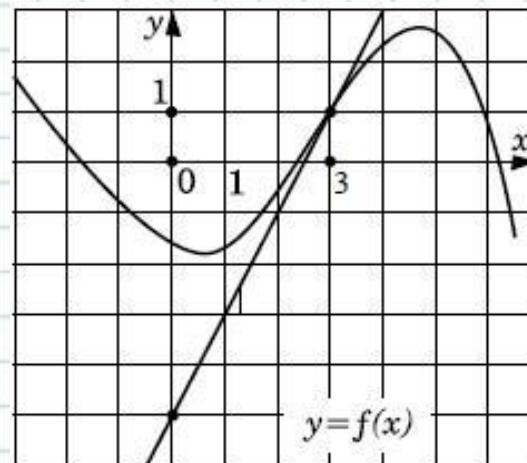


На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке абсциссой, равной 3. Найдите значение производной этой функции в точке $x = 3$.

Для решения используем геометрический смысл производной: значение производной функции в точке равняется угловому коэффициенту касательной к графику этой функции, проведенной в этой точке. Угловым коэффициентом касательной равен тангенсу угла между касательной и положительным направлением оси x ($\operatorname{tg} \alpha$). Угол $\alpha = \beta$, как накрест лежащие углы при параллельных прямых $y=0$, $y=1$ и секущей-касательной. Для треугольника ABC

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{3} = 2.$$

$$f'(3) = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = 2$$



ИСТОЧНИКИ

- <http://reshuege.ru/>
- <http://egemat.ru/prepare/B8.html>
- <http://bankege.ru/>