Решение заданий В$_8$ ЕГЭ по математике

Производная

Функция	Производная
y=C	y´=0
y=x	y´=1
y=kx	y´=k
y=kx+m	y´=k
$y=x^m$	$y'=mx^{m-1}$
$y=k\,x^m$	$y'=kmx^{m-1}$
$y=\frac{1}{x}$	$y'=-\frac{1}{x^2}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
y=sin x	y´=cos x
y=cos x	y´= - si1n x
y=tg x	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$
y=ctg x	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

Найти производную функции:

А) $y=2{,}5$

Б) $y=-3{,}2x + 3$

В) $y=7{,}5x$

Г) $y=-10x$

Д) $y=x^2$

Е) $y=2x^5$

Ж) $y=2{,}4x^4$

З) $y=-x^2$

И) $y=2x + \cos x$

К) $y=3x^2 + 4x$

Л) $y=\sin x$

М) $y=2\cos x$

Н) $y=3\sin x$

О) $y= 2/x$

П) $y=4\sin 2x$

Р) $y= \operatorname{tg} x +1$

Задача

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 3t - 29$ (где x —расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 3$ с.

Решение.

Найдем закон изменения скорости: $v(t) = x'(t) = 2t - 3$

Тогда находим: $v(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 3$ м/с.

Ответ: 3.

Задача

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t + 13$ (где *x* — расстояние от точки отсчета в метрах, *t* — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени *t* = 3 с.

Задача

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t + 13$ (где *x* — расстояние от точки отсчета в метрах, *t* — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени *t* = 3 с.

Ответ: 8

Задача

Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$.

Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = 7x - 5$

их угловые коэффициенты равны. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения : $y' = 7$

$$(x^2 + 6x - 8)' = 7 \Leftrightarrow 2x + 6 = 7 \Leftrightarrow x = 0,5$$

Ответ: 0,5.

Задача

Прямая $y=-4x-11$ является касательной к графику функции $y=x^3+7x^2+7x-6$

Найдите абсциссу точки касания.

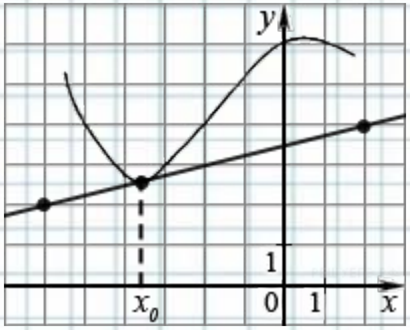
Задача

Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$

Найдите абсциссу точки касания.

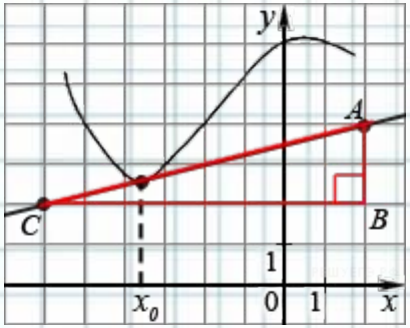
Ответ: -1

Задача



На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.

Решение.



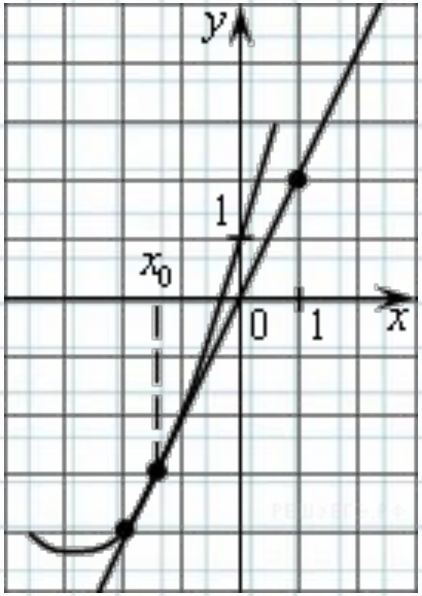
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (2; 4), B (2; 2), C (−6; 2). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ACB. Поэтому

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{4-2}{2+6} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

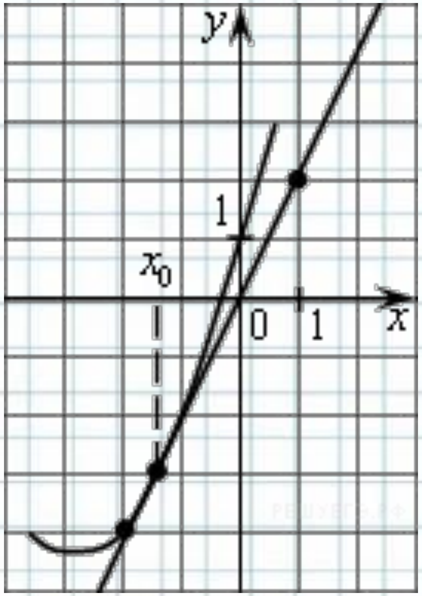
Задача

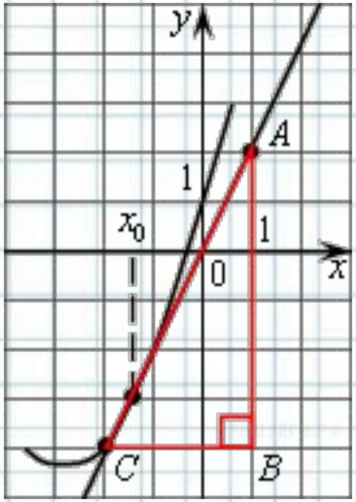
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Задача

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

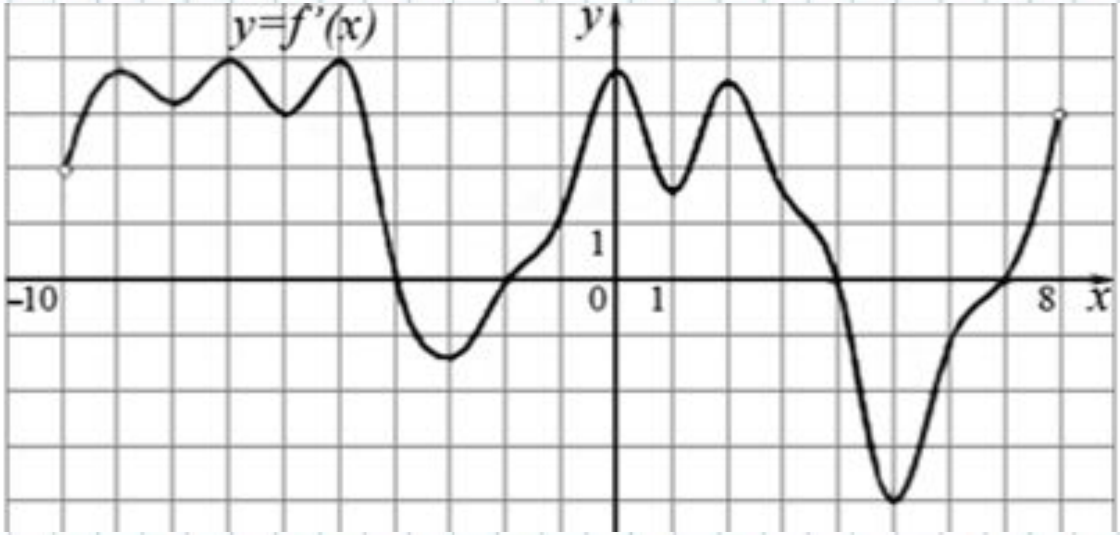




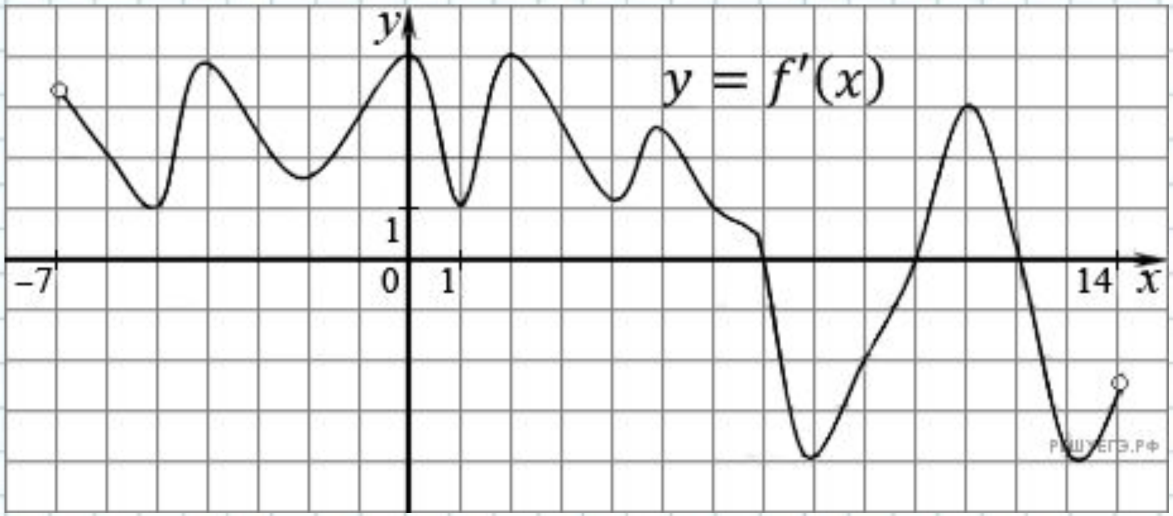
$$y'(x_0) = \mathrm{tg}\angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2+4}{1+2} = 2.$$

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−10; 8). Найдите количество точек максимума функции *f(x)* на отрезке [−9;6].

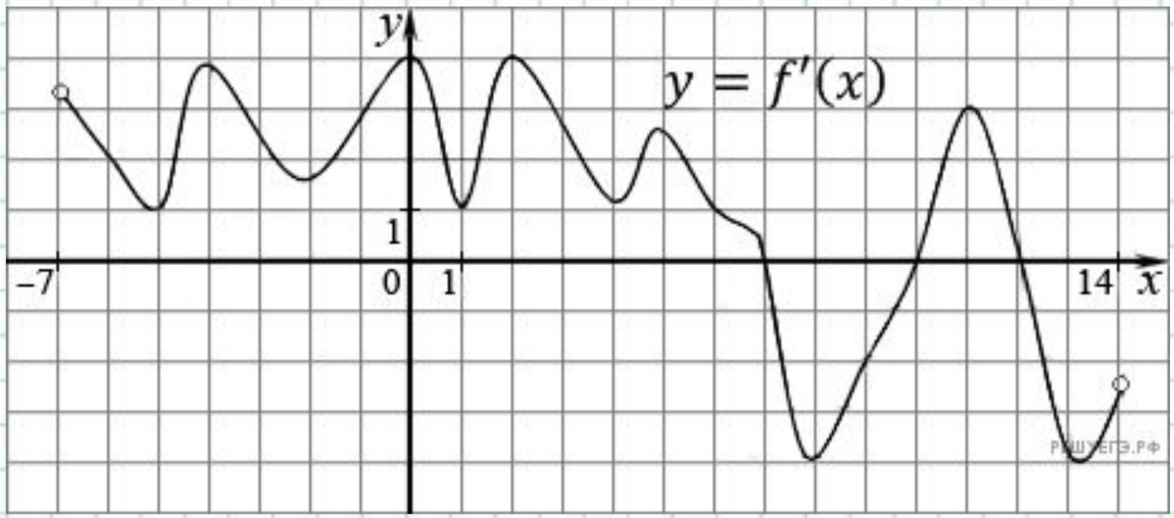
- **Решение.**
  Точки максимума соответствуют точкам смены знака производной с плюса на минус. На отрезке [−9;6] функция имеет две точки максимума $x = -4$ и $x = 4$.
  Ответ: 2.



На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−7; 14). Найдите количество точек максимума функции *f(x)* на отрезке [−6; 9].



На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−7; 14). Найдите количество точек максимума функции *f(x)* на отрезке [−6; 9].



Решение.

Точки максимума соответствуют точкам смены знака производной с положительного на отрицательный. На отрезке [−6; 9] функция имеет одну точку максимума $x = 7$.

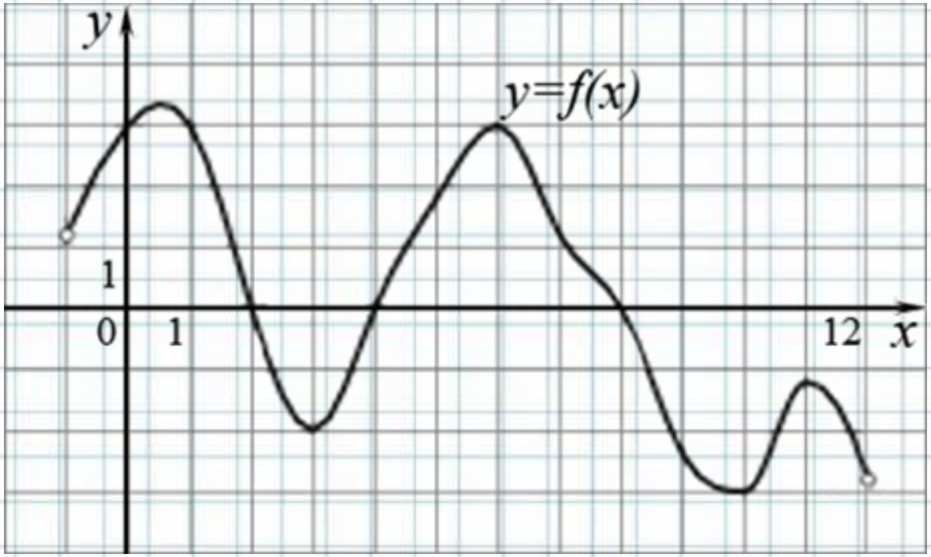
Ответ: 1.

На рисунке изображен график функции y=f(x), определенной на интервале (−1; 12). Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

- **Решение.**

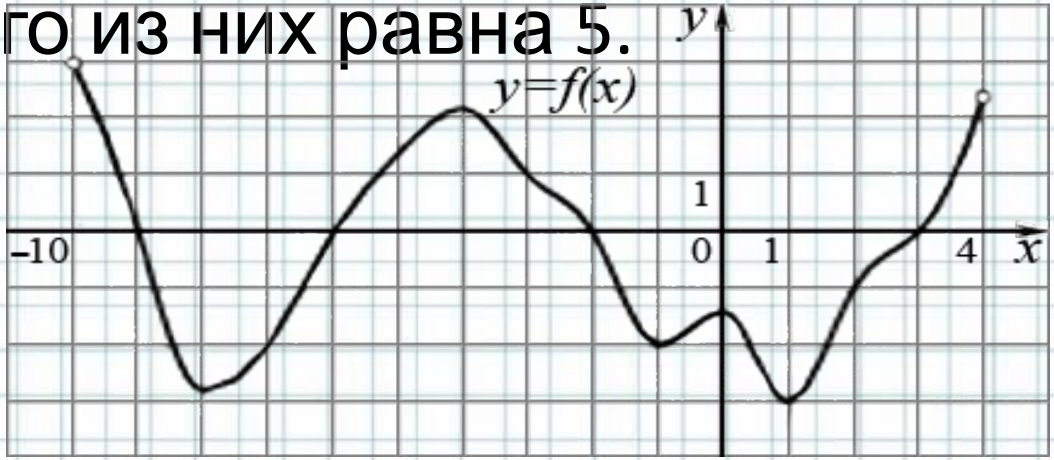
Производная функции отрицательна на тех интервалах, на которых функция убывает, т. е. на интервалах (0,5; 3), (6; 10) и (11; 12). В них содержатся целые точки 1, 2, 7, 8 и 9. Всего 5 точек.

Ответ: 5.



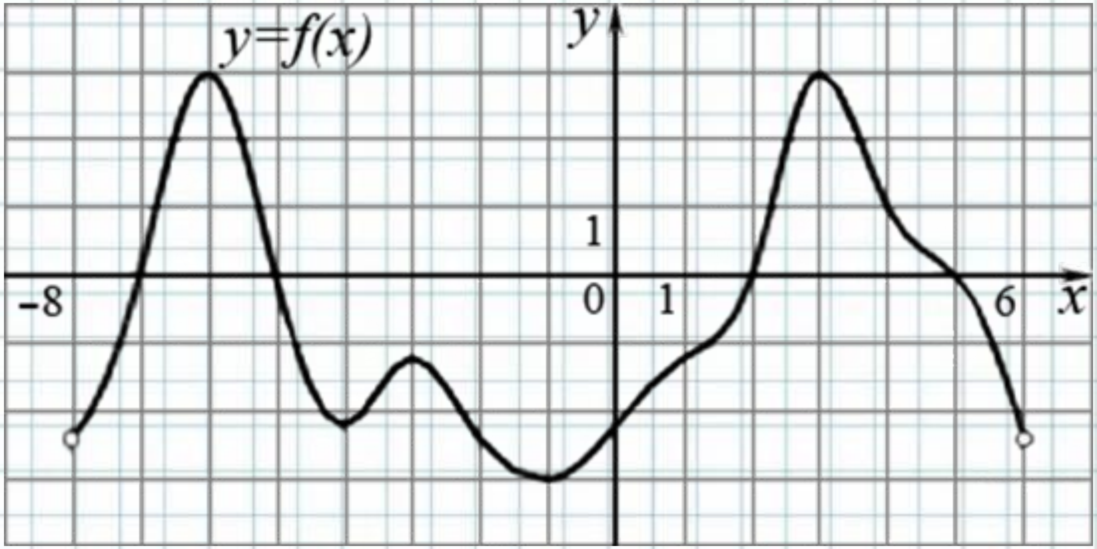
На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (−10; 4). Найдите промежутки убывания функции f(x). В ответе укажите длину наибольшего из них.

- **Решение.**
  Промежутки убывания функции *f(x)* соответствуют промежуткам, на которых производная функции отрицательна, то есть интервалу (−9; −6) длиной 3 и интервалу (−2; 3) длиной 5. Длина наибольшего из них равна 5.
  Ответ: 5.
-



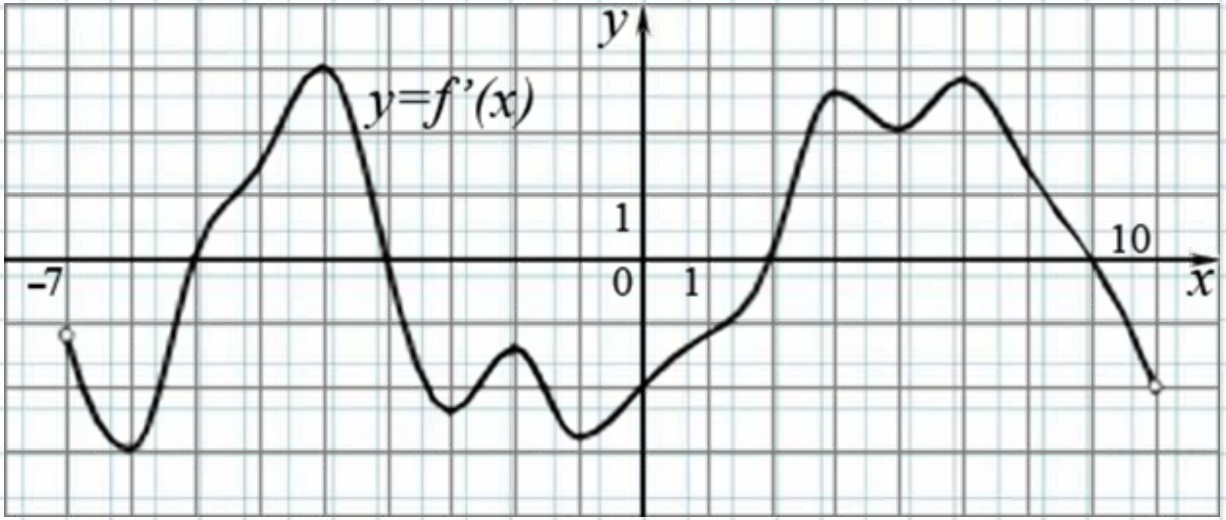
На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (−8; 6). Найдите промежутки возрастания функции f(x). В ответе укажите длину наибольшего из них.

- **Решение.**
  Промежутки возрастания функции *f(x)* соответствуют промежуткам, на которых производная функции положительна, то есть интервалам (−7; −5), (2; 5). Наибольший из них — интервал (2; 5), длина которого 3.



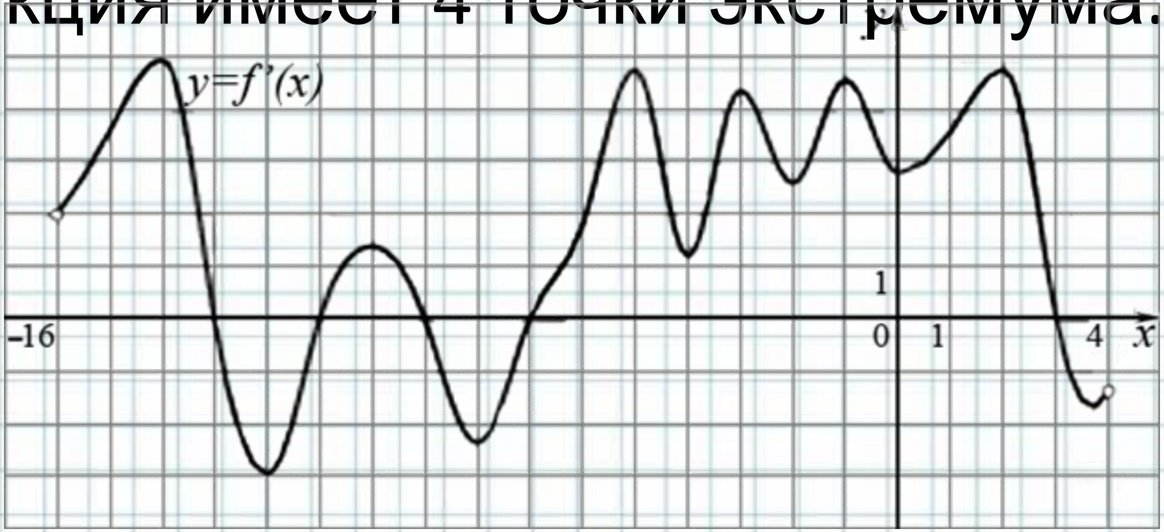
На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−7; 10). Найдите количество точек минимума функции *f(x)* на отрезке [−3; 8].

- **Решение.**
  Точки минимума соответствуют точкам смены знака производной с минуса на плюс. На отрезке [−3; 8] функция имеет одну точку минимума *x* = 4.
  Ответ: 1.



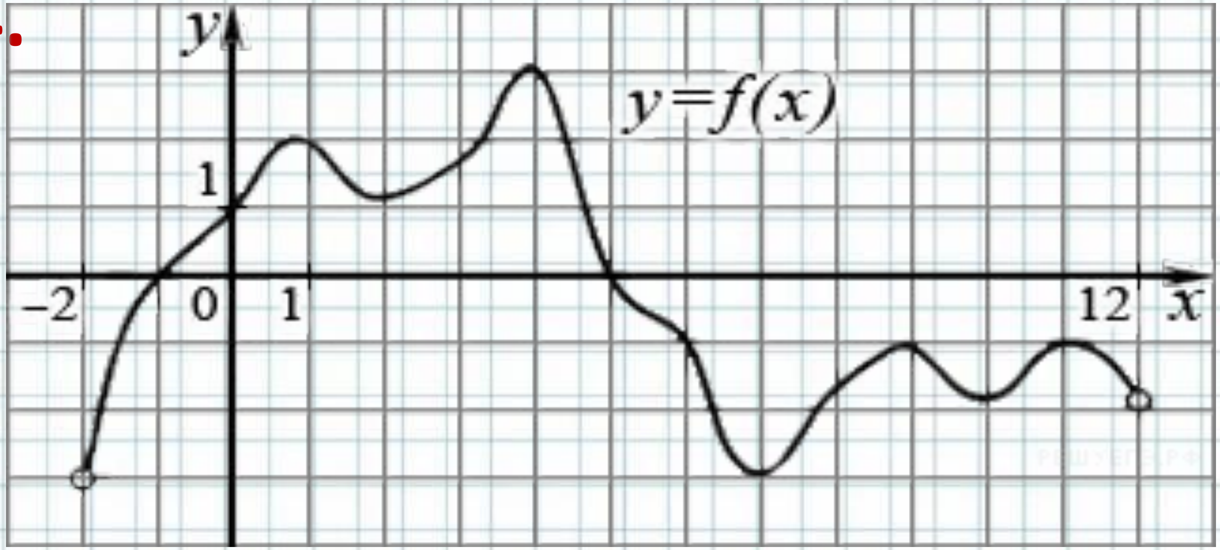
На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−16; 4). Найдите количество точек экстремума функции *f(x)* на отрезке [−14; 2].

- **Решение.**
Точки экстремума соответствуют точкам смены знака производной — изображенным на графике нулям производной. Производная обращается в нуль в точках −13, −11, −9, −7. На отрезке [−14; 2] функция имеет 4 точки экстремума.
Ответ: 4.



На рисунке изображен график функции *y=f(x)*, определенной на интервале (−2; 12). Найдите сумму точек экстремума функции *f(x)*.

- **Решение.**
  Заданная функция имеет максимумы в точках 1, 4, 9, 11 и минимумы в точках 2, 7, 10. Поэтому сумма точек экстремума равна 1 + 4 + 9 + 11 + 2 + 7 + 10 = 44.
  Ответ: 44.

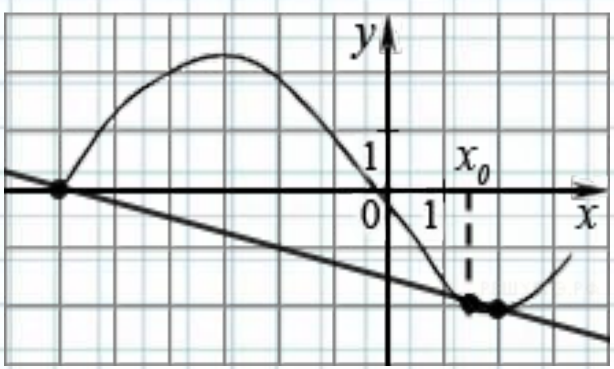


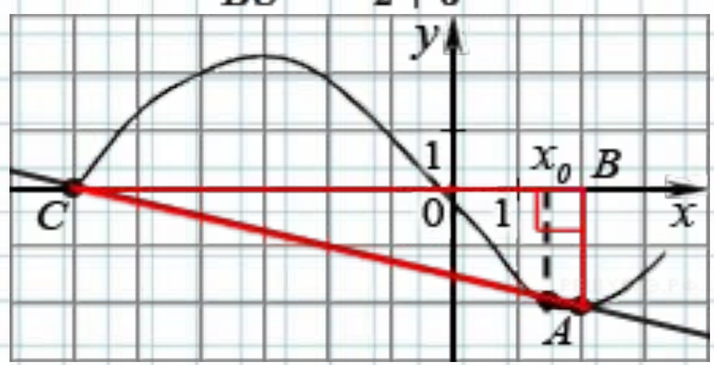
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.

- **Решение.**

  Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (2; −2), B (2; 0), C (−6; 0). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg}(\angle ACB) = -\frac{AB}{BC} = -\frac{2}{2+6} = -0,25$$



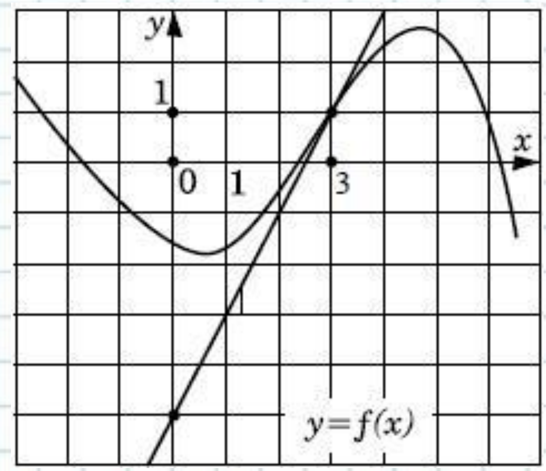


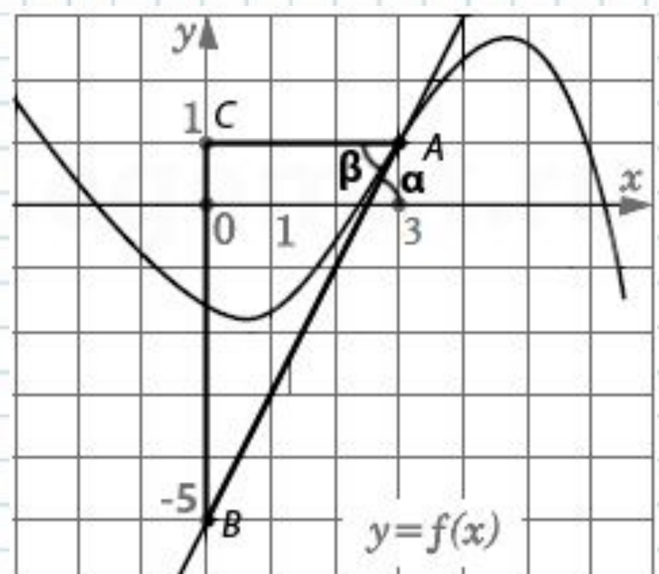
На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке абсциссой, равной 3. Найдите значение производной этой функции в точке $x = 3$.

Для решения используем геометрический смысл производной: значение производной функции в точке равняется угловому коэффициенту касательной к графику этой функции, проведенной в этой точке. Угловой коэффициент касательной равен тангенсу угла между касательной и положительным направлением оси x (tg α). Угол α = β, как накрест лежащие углы при параллельных прямых y=0, y=1 и секущей-касательной. Для треугольника ABC

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{3} = 2.$$

$$f'(3) = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = 2$$





Источники

- http://reshuege.ru/
- http://egemat.ru/prepare/B8.html
- http://bankege.ru/