ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\hat{Y}_i = b_1 + b_2 X_i$$

$$b_2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

Предположим, что единицы измерения Y или X изменены. Как это повлияет на результаты регрессии? Интуитивно мы ожидаем, что ничего существенного не произойдет. Так оно и есть.

ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\hat{Y}_i = b_1 + b_2 X_i$$

$$b_2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

Мы продемонстрируем это для оценок коэффициентов регрессии. Начнем с предположения, что истинная и расчетная модели приведены выше.

ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\hat{Y}_i = b_1 + b_2 X_i$$

$$b_2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$Y_i^* = \lambda_1 + \lambda_2 Y_i$$

$$\hat{Y}_i^* = b_1^* + b_2^* X_i$$

Предположим теперь, что единицы измерения Y изменяются, причем новая мера *Y, является линейной функцией старой.**

ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\hat{Y}_i = b_1 + b_2 X_i$$

$$b_2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$Y_i^* = \lambda_1 + \lambda_2 Y_i$$

$$\hat{Y}_i^* = b_1^* + b_2^* X_i$$

Как правило, изменение единицы измерения включает в себя простое мультипликативное масштабирование, например, когда мы конвертируем фунты в граммы.

ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\hat{Y}_i = b_1 + b_2 X_i$$

$$b_2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

$$Y_i^* = \lambda_1 + \lambda_2 Y_i$$

$$\hat{Y}_i^* = b_1^* + b_2^* X_i$$

Иногда происходит линейное преобразование. Примером может служить конверсия температур от градусов Цельсия до градусов Фаренгейта.

ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\hat{Y}_i = b_1 + b_2 X_i$$

$$b_2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$Y_i^* = \lambda_1 + \lambda_2 Y_i$$

$$\hat{Y}_i^* = b_1^* + b_2^* X_i$$

$$b_2^* = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i^* - \overline{Y}^*)}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

Показан новый коэффициент наклона b_2^*.

ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\hat{Y}_i = b_1 + b_2 X_i$$

$$b_2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$Y_i^* = \lambda_1 + \lambda_2 Y_i$$

$$\hat{Y}_i^* = b_1^* + b_2^* X_i$$

$$b_2^* = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i^* - \overline{Y}^*)}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sum (X_i - \overline{X})([\lambda_1 + \lambda_2 Y_i] - [\lambda_1 + \lambda_2 \overline{Y}])}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

Подставим *Y**.**

ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\hat{Y}_i = b_1 + b_2 X_i$$

$$b_2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$Y_i^* = \lambda_1 + \lambda_2 Y_i$$

$$\hat{Y}_i^* = b_1^* + b_2^* X_i$$

$$b_2^* = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i^* - \overline{Y}^*)}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sum (X_i - \overline{X})([\lambda_1 + \lambda_2 Y_i] - [\lambda_1 + \lambda_2 \overline{Y}])}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$= \frac{\sum (X_i - \overline{X})(\lambda_2 Y_i - \lambda_2 \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = \frac{\lambda_2 \sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

Остается только λ_2.

ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\hat{Y}_i = b_1 + b_2 X_i$$

$$b_2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

$$Y_i^* = \lambda_1 + \lambda_2 Y_i$$

$$\hat{Y}_i^* = b_1^* + b_2^* X_i$$

$$b_2^* = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i^* - \bar{Y}^*)}{\sum (X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})([\lambda_1 + \lambda_2 Y_i] - [\lambda_1 + \lambda_2 \bar{Y}])}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

$$= \frac{\sum (X_i - \bar{X})(\lambda_2 Y_i - \lambda_2 \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} = \frac{\lambda_2 \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} = \lambda_2 b_2$$

Мы находим, что новый коэффициент наклона равен исходному, умноженному на λ_2.

ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\hat{Y}_i = b_1 + b_2 X_i$$

$$b_2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$Y_i^* = \lambda_1 + \lambda_2 Y_i$$

$$\hat{Y}_i^* = b_1^* + b_2^* X_i$$

$$b_2^* = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i^* - \overline{Y}^*)}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sum (X_i - \overline{X})([\lambda_1 + \lambda_2 Y_i] - [\lambda_1 + \lambda_2 \overline{Y}])}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$= \frac{\sum (X_i - \overline{X})(\lambda_2 Y_i - \lambda_2 \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = \frac{\lambda_2 \sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = \lambda_2 b_2$$

Это логично. Единичное изменение в Y такое же, как изменение λ_2 единиц в *Y. Согласно уравнению регрессии, единичное изменение X приводит к изменению b_2 единиц в *Y*, поэтому это должно привести к изменению $\lambda_2 b_2$ единиц в *Y**.**

ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\hat{Y}_i = b_1 + b_2 X_i$$

$$b_2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$Y_i^* = \lambda_1 + \lambda_2 Y_i$$

$$\hat{Y}_i^* = b_1^* + b_2^* X_i$$

$$b_2^* = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i^* - \overline{Y}^*)}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sum (X_i - \overline{X})([\lambda_1 + \lambda_2 Y_i] - [\lambda_1 + \lambda_2 \overline{Y}])}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$= \frac{\sum (X_i - \overline{X})(\lambda_2 Y_i - \lambda_2 \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = \frac{\lambda_2 \sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = \lambda_2 b_2$$

Эффект изменения единиц измерения X оставлен в качестве упражнения.

ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ

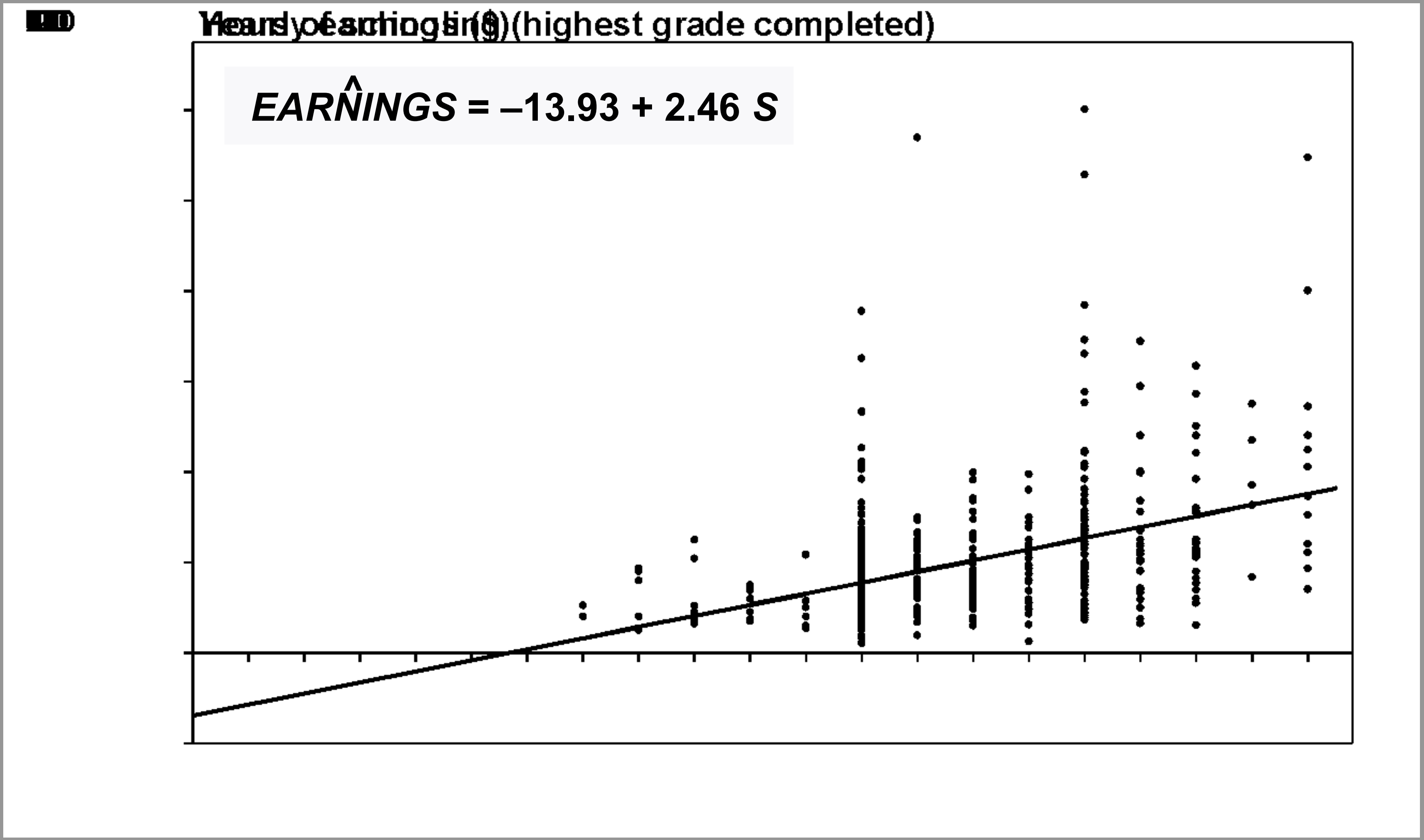
$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\hat{Y}_i = b_1 + b_2 X_i$$

$$b_2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

Мы рассмотрим частный случай изменения единиц измерения X. Часто свободный член в уравнении регрессии не имеет разумной интерпретации, потому что X = 0 расположен далеко от диапазона данных.

ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ



Предыдущая презентация является примером, поскольку свободный член является отрицательным.

ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ

```
. reg EARNINGS S

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     540
-------------+------------------------------           F(  1,   538) =  112.15
       Model |  19321.5589     1  19321.5589           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  92688.6722   538  172.283777           R-squared     =  0.1725
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.1710
       Total |  112010.231   539  207.811189           Root MSE      =  13.126

------------------------------------------------------------------------------
    EARNINGS |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           S |   2.455321   .2318512    10.59   0.000     1.999876    2.910765
       _cons |  -13.93347   3.219851    -4.33   0.000    -20.25849   -7.608444
------------------------------------------------------------------------------
```

Вот результат построения регрессии.

ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ

```
. reg EARNINGS S

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     540
-------------+------------------------------           F(  1,   538) =  112.15
       Model |  19321.5589     1  19321.5589           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  92688.6722   538  172.283777           R-squared     =  0.1725
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.1710
       Total |  112010.231   539  207.811189           Root MSE      =  13.126

------------------------------------------------------------------------------
    EARNINGS |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           S |   2.455321   .2318512    10.59   0.000     1.999876    2.910765
       _cons |  -13.93347   3.219851    -4.33   0.000    -20.25849   -7.608444
------------------------------------------------------------------------------
```

Предыдущая презентация.

ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\hat{Y}_i = b_1 + b_2 X_i$$

$$b_2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$X_i^* = X_i - \overline{X}$$

$$\hat{Y}_i = b_1^* + b_2^* X_i^*$$

Можно справиться с этой проблемой, определив *X как отклонение *X* от его среднего значения.**

ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\hat{Y}_i = b_1 + b_2 X_i$$

$$b_2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$X_i^* = X_i - \overline{X}$$

$$\hat{Y}_i = b_1^* + b_2^* X_i^*$$

$$\sum X_i^* = \sum (X_i - \overline{X})$$

$$= \sum X_i - n\overline{X}$$

$$= n\overline{X} - n\overline{X} = 0$$

$$\overline{X}^* = \frac{1}{n} \sum X_i^* = 0$$

Заметим, что по определению сумма X_i^* равна 0, и, следовательно, среднее значение X^* равно 0.

ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\hat{Y}_i = b_1 + b_2 X_i$$

$$b_2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$X_i^* = X_i - \overline{X}$$

$$\hat{Y}_i = b_1^* + b_2^* X_i^*$$

$$b_2^* = \frac{\sum (X_i^* - \overline{X}^*)(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i^* - \overline{X}^*)^2} = \frac{\sum X_i^* (Y_i - \overline{Y})}{\sum X_i^{*2}}$$

$$= \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = b_2$$

$$\overline{X}^* = 0$$

Если мы ищем уравнение регрессии Y от *X место *X,* то коэффициент наклона не изменяется.**

ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\hat{Y}_i = b_1 + b_2 X_i$$

$$b_2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

$$X_i^* = X_i - \bar{X}$$

$$\hat{Y}_i = b_1^* + b_2^* X_i^*$$

$$b_2^* = \frac{\sum (X_i^* - \bar{X}^*)(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i^* - \bar{X}^*)^2} = \frac{\sum X_i^* (Y_i - \bar{Y})}{\sum X_i^{*2}}$$

$$= \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} = b_2$$

$$\bar{X}^* = 0$$

$$b_1^* = \bar{Y} - b_2^* \bar{X}^* = \bar{Y}$$

Теперь свободный член представляет собой среднее значение Y при среднем значении X.

ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ

```
----------------------------------------------------------------------------
. sum S
    Variable |       Obs        Mean    Std. Dev.       Min        Max
-------------+--------------------------------------------------------
           S |       540    13.67222    2.438476          7         20

. gen SDEV = S - 13.67
```

Мы находим среднее значение выборки (в Stata мы используем команду «sum»). Мы находим, что среднее составляет 13.67 лет, и мы определяем новую переменную SDEV путем вычитания 13.67 из S.

ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ

```
. reg EARNINGS SDEV

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     540
-------------+------------------------------           F(  1,   538) =  112.15
       Model |  19321.5587     1  19321.5587           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  92688.6723   538  172.283778           R-squared     =  0.1725
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.1710
       Total |  112010.231   539  207.811189           Root MSE      =  13.126

------------------------------------------------------------------------------
    EARNINGS |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
        SDEV |   2.455321   .2318512    10.59   0.000     1.999876    2.910765
       _cons |   19.63077   .5648401    34.75   0.000      18.5212    20.74033
------------------------------------------------------------------------------
```

Вот результат с использованием SDEV вместо S. Свободный член = 19.63, теперь дает прогнозируемый доход тех, кто имеет среднее образование.

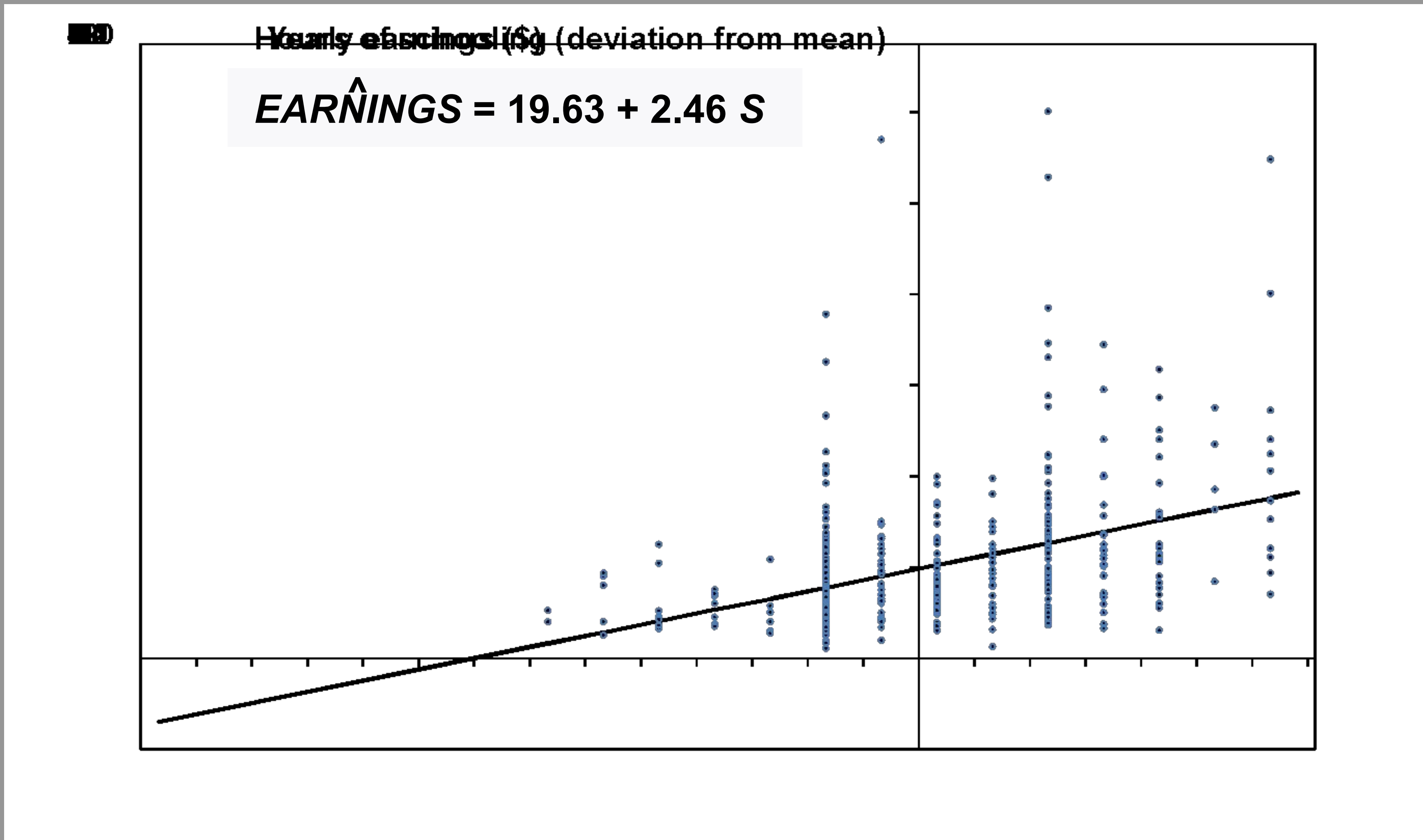
ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ

```
. reg EARNINGS SDEV
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     540
-------------+------------------------------           F(  1,   538) =  112.15
       Model |  19321.5587     1  19321.5587           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  92688.6723   538  172.283778           R-squared     =  0.1725
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.1710
       Total |  112010.231   539  207.811189           Root MSE      =  13.126
------------------------------------------------------------------------------
    EARNINGS |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
        SDEV |   2.455321   .2318512    10.59   0.000     1.999876    2.910765
       _cons |   19.63077   .5648401    34.75   0.000      18.5212    20.74033
------------------------------------------------------------------------------
```

```
. reg EARNINGS S
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     540
-------------+------------------------------           F(  1,   538) =  112.15
       Model |  19321.5589     1  19321.5589           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  92688.6722   538  172.283777           R-squared     =  0.1725
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.1710
       Total |  112010.231   539  207.811189           Root MSE      =  13.126
------------------------------------------------------------------------------
    EARNINGS |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
           S |   2.455321   .2318512    10.59   0.000     1.999876    2.910765
       _cons |  -13.93347   3.219851    -4.33   0.000    -20.25849   -7.608444
------------------------------------------------------------------------------
```

Сравнивая новый результат с оригиналом, мы видим, что помимо стандартной ошибки и t статистики свободного члена ничего больше не изменилось.

ИЗМЕНЕНИЯ В ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ



Единственным эффектом изменения S является перемещение вертикальной оси до точки, которая раньше была 13.67. Как следствие, свободный член становится 19.63. В остальном линия регрессии не изменяется