Высшая математика

Специальность 25.03.01

Непрерывность функций. Точки разрыва

Лекция

Непрерывность

Функция *f(x),* определенная на множестве *X,*

называется ***непрерывной*** *в точке* x_0 , если

1)она определена в этой точке, $x_0 \in X$

2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Равенство 3) можно также записать в виде:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$$

Говорят: «если функция непрерывна в точке x_0, то знак предела и функцию можно поменять местами».

Условие непрерывности

Существование $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ равносильно тому,

что существуют равные друг другу левосторонний и правосторонний пределы функции при $x \to x_0$, равные к тому же и значению функции в точке, то есть

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Непрерывность на множестве

Говорят, что функция ***непрерывна на множестве X,*** если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[x_0 ; x_0 + \delta)$ (на промежутке $(x_0 - \delta; x_0]$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция f(x) называется **непрерывной в точке x_0 справа (слева)**, если справедливо равенство

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \right)$$

Очевидно, что f(x) непрерывна в точке x_0 $\Leftrightarrow$ f(x) непрерывна в точке x_0 справа и слева.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция f(x) называется **непрерывной на интервале** (a; b) если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция f(x) **называется непрерывной на отрезке** [a; b] если она непрерывна на интервале (a; b) и имеет одностороннюю непрерывность в граничных точках (т.е. непрерывна в точке a справа, в точке b – слева).

Непрерывность

Теперь переформулируем определение непрерывности в других терминах. Обозначим $x - x_0 = \Delta x$

и назовем его ***приращением аргумента*** в точке x_0,

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = \Delta y$$

будем называть ***приращением функции*** в точке .

Непрерывность

Теорема. Функция непрерывна в точке тогда и только тогда, когда бесконечно ***малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции*** в этой точке, то есть если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

- Задание. Используя эту теорему, исследовать на непрерывность функцию y=sinx.

Теоремы о непрерывных функциях

Теорема.

Пусть заданные на одном и том же множестве X функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0.
Тогда функции

$$f(x) \pm g(x) \qquad f(x) \cdot g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)}$$

непрерывны в точке x_0, если знаменатель не равен нулю в этой точке:

$$g(x_0) \neq 0$$

Теоремы о непрерывных функциях

Теорема (о непрерывности сложной функции). Пусть функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $z = f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$.

Тогда сложная функция

$z = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Теоремы о непрерывных функциях следуют из свойств пределов функций.

Непрерывность элементарных функций

Всевозможные арифметические комбинации простейших элементарных функций, которые рассматривают в школьном курсе алгебры и начал анализа, мы будем называть ***элементарными функциями.*** Например,

$$y = \sqrt{x^2 + 1} - \sin^2 x$$

является элементарной.

Все элементарные функции непрерывны в области определения

Разрывы функций

Дадим теперь ***классификацию точек разрыва функций.*** Возможны следующие случаи.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ существуют и конечны, но не равны друг другу, то точку x_0 называют ***точкой разрыва первого рода.*** При этом величину $[f(x_0+0)-f(x_0-0)]$ называют скачком функции в точке x_0.

Если односторонние пределы совпадают, то ***точка разрыва первого рода*** называется ***точкой устранимого разрыва*** *(см. ниже)*

Пример

Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} x^2, если \quad x \le 0 \\ x+1, если \quad x > 0 \end{cases}$$

Эта функция может претерпевать разрыв только в точке 0, где происходит переход от одного аналитического выражения к другому, а в остальных точках области определения функция непрерывна.

Пример

Из условия непрерывности следует:

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0} x^2 = 0,$$

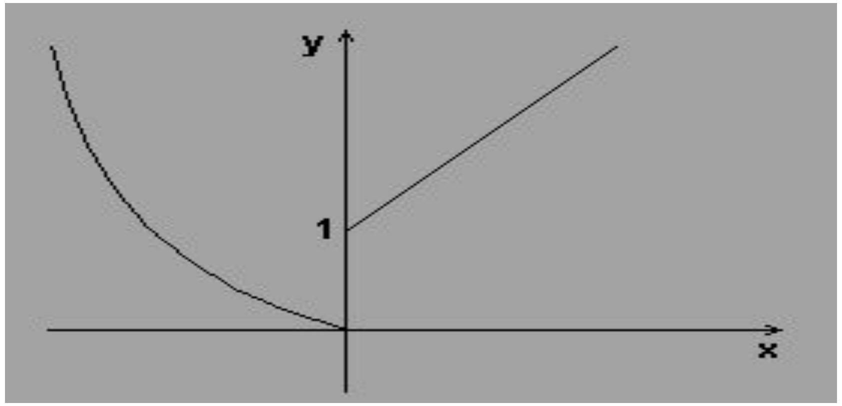
$$f(0) = 0,$$

$$\lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0} (x+1) = 1.$$

Таким образом, в точке 0 функция претерпевает разрыв 1-го рода со скачком 1.

График функции

На рисунке изображена функция, имеющая разрыв 1-го рода в начале координат.



Разрывы функций

2.Если в точке x_0 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$

но в точке x_0 функция либо не определена, либо $f(x_0) \neq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

, то эта точка разрыва первого рода является ***точкой устранимого разрыва.*** Последнее объясняется тем, что если в этом случае ***доопределить*** или ***видоизменить*** функцию , положив $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$,

то получится непрерывная в точке функция.

Разрывы функций

3. Точка разрыва функции, не являющаяся точкой разрыва первого рода, в частности, точкой устранимого разрыва, является ***точкой разрыва второго рода.***

Очевидно, что точки разрыва второго рода - это точки, в которых хотя бы один из односторонних пределов не существует, например, функция стремится к бесконечности справа или слева. Например, $y=\frac{1}{x-1}$ в точке x=1 имеет разрыв 2-го рода.

Пример

Исследуем функцию $f(x)=3^{\frac{1}{1-x}}$. Как элементарная функция она всюду непрерывна, кроме точки x=1.

$$\lim_{x\to 1-0} 3^{\frac{1}{1-x}} = 3^{\frac{1}{1-1+0}} \overset{,}{=} 3^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0} 3^{\frac{1}{1-x}} = 3^{\frac{1}{1-1-0}} = 3^{\frac{1}{-0}} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{+\infty}} = 0$$

Имеем разрыв 2-го рода с бесконечным скачком.

(запись в вычислениях с точки зрения математики не совсем верная, но позволяет лучше понять смысл)

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Первая теорема Больцано-Коши об обращении функции в нуль. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке [a, b] и на концах этого отрезка принимает значения различных знаков, т. е. $f(a) \cdot f(b) < 0.$

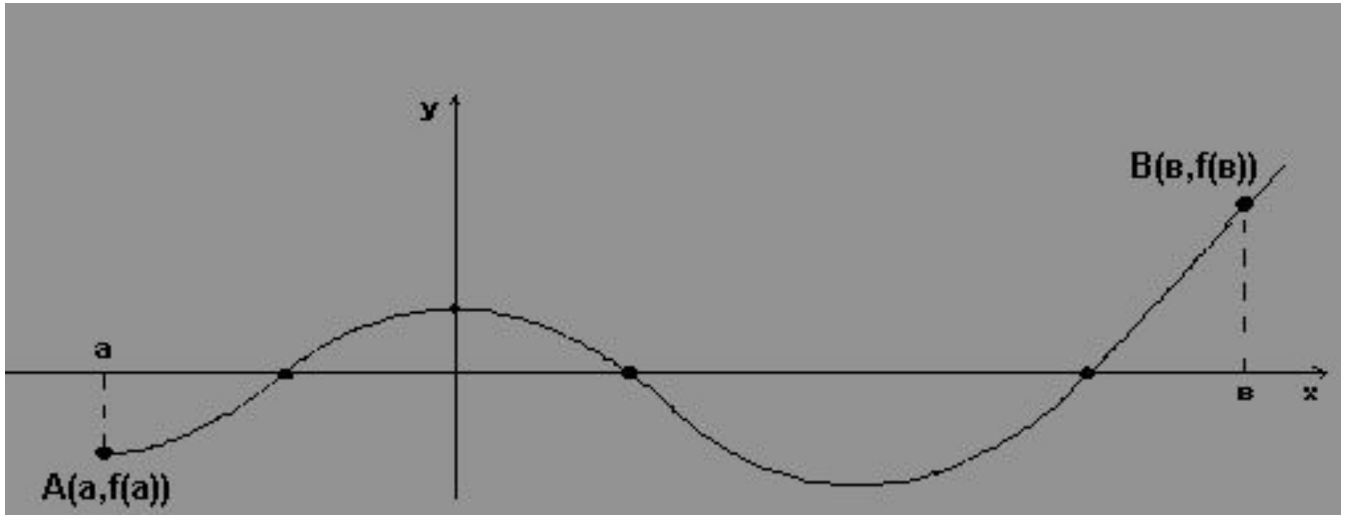
Тогда существует точка $c \in (a, b)$

такая, что $f(c) = 0.$

Свойства функций,

Проиллюстрируем теорему.

Из рисунка видно, что функция имеет три нуля, то есть три точки, в которых она обращается в нуль.



Свойства функций, непрерывных на

Вторая теорема Больцано-Коши о промежуточном значении функции. Пусть функция определена и непрерывна на отрезке [*a*, *b*] и на концах этого отрезка принимает неравные значения $f(a) \neq f(b)$. Тогда, каково бы ни было число μ между числами $f(a)$ и $f(b)$, найдется точка $c \in (a,b)$ такая, что $f(c) = \mu$.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема Вейерштрасса

Пусть функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$. *Тогда*

1) $f(x)$ – *ограничена на* $[a; b]$;

2) $f(x)$ *принимает на* $[a; b]$ *свое наибольшее и наименьшее значения.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Значение функции $m = f(x_1)$ *называется* ***наименьшим,*** *если*

$$m \le f(x), \quad \forall x \in D(f).$$

Значение функции $M = f(x_2)$ *называется* ***наибольшим,*** *если*

$$M \ge f(x), \quad \forall x \in D(f).$$

Замечание. Наименьшее (наибольшее) значение функция может принимать в нескольких точках отрезка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a,b]$,

называется ограниченной на этом отрезке, если существуют числа m и M такие, что

$m \le f(x) \le M$ для любого $x \in [a,b]$.