Основы тригонометрии

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в 1 радиан.

$$1\text{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ, \quad \alpha\,\text{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\alpha\right)^\circ,$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\,\text{рад}, \quad \alpha^\circ = \frac{\pi}{180}\cdot\alpha\,\text{рад}.$$

Угол в α радиан стягивает дуга, длина которой l вычисляется по формуле $l = \alpha R$, где R — радиус окружности.

1. Найти радианную меру угла, выраженного в градусах:
1) $6°$; 2) $162°$.

Решение.

1) Если $180°$ соответствует π рад, то $6°$ соответствует x рад, следовательно, $x = \dfrac{\pi \cdot 6°}{180°} = \dfrac{\pi}{30}$ рад.

2) $180°$ — π рад, $162°$ — x рад,

$$x = \frac{162° \cdot \pi}{180°} = \frac{9\pi}{10} = 0{,}9\pi \text{ рад}.$$

Ответ. 1) $\dfrac{\pi}{30}$; 2) $0{,}9\pi$.

2. Найти градусную меру угла, выраженного в радианах: 1) $0{,}4\pi$; 2) $1{,}75\pi$; 3) 3 рад (с точностью до $0{,}01°$).

Решение.

1) Если π рад соответствует $180°$, то $0{,}4\pi$ рад соответствует $x°$, следовательно, $x = \dfrac{0{,}4\pi \cdot 180°}{\pi} = 0{,}4 \cdot 180° = 72°$.

2) π — $180°$, $1{,}75\pi$ — $x°$,

$$x° = \frac{1{,}75\pi \cdot 180°}{\pi} = 1{,}75 \cdot 180° = 315°.$$

3) π рад — $180°$, 3 рад — $x°$,

$$x° = \frac{3 \cdot 180°}{\pi} \approx 171{,}97°.$$

Ответ. 1) $72°$; 2) $315°$; 3) $171{,}97°$.

3. Найти длину l дуги окружности, стягивающей угол в 5 рад, если радиус R окружности равен: 1) 3; 2) 1.

Решение.

1) $l = \alpha R$, $l = 5 \cdot 3 = 15$; 2) $l = \alpha R$, $l = 5 \cdot 1 = 5$.

Ответ. 1) 15; 2) 5.

Каждому действительному числу α соответствует единственная точка M окружности, получаемая поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α радиан. Одной и той же точке M единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел вида $\alpha + 2\pi k$, где k — целое число.

1. Указать четверть, в которой расположена точка P_α, полученная поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол α радиан, если:

1) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; 2) $\alpha = \frac{4\pi}{3}$; 3) $\alpha = -\frac{\pi}{12}$; 4) $\alpha = 1{,}7$.

Решение.

1) Поскольку $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} < \pi$, точка P_α расположена во II четверти.

2) В III четверти: $\pi < \frac{4\pi}{3} < \frac{3\pi}{2}$.

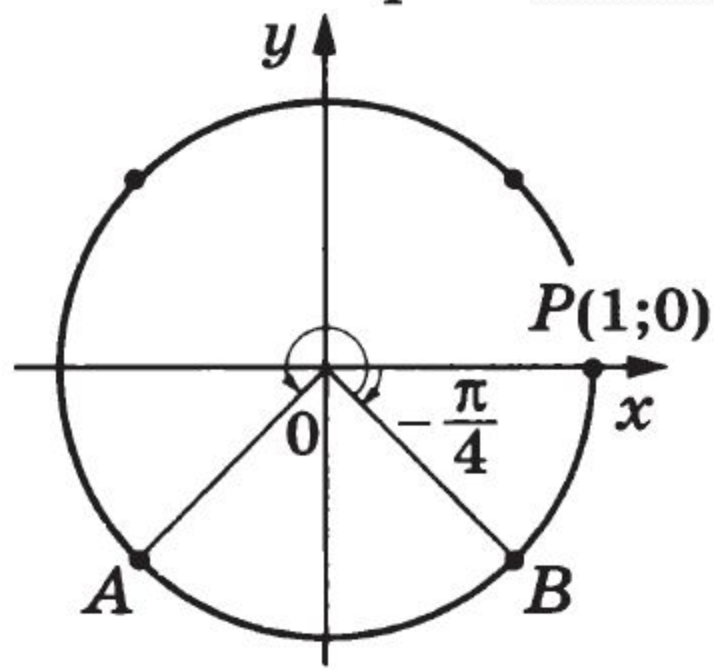
3) В IV четверти: $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{12} < 0$.

4) Во II четверти: $\frac{\pi}{2} < 1{,}7 < \pi$.

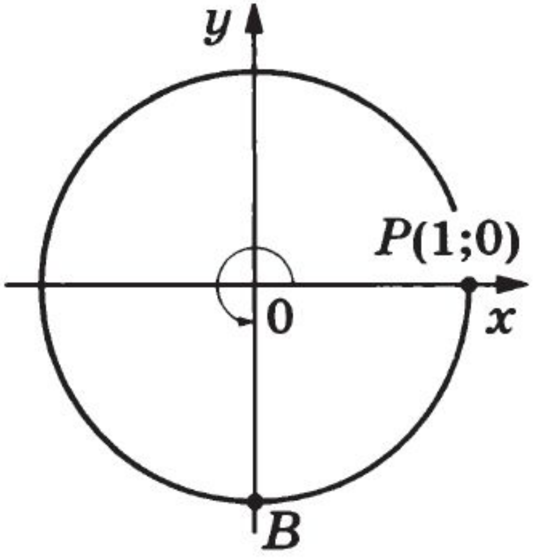
2. На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол α, если:

$$1)\ \alpha = -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2};\ \ 2)\ \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Решение. 1) Повернём точку $P(1;\ 0)$ на угол $\frac{\pi}{4}$ по часовой стрелке, попадём в точку B; затем полученную точку повернём 3 раза на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки. Точка A — искомая



2) Повернём точку $P(1;\ 0)$ на угол $\frac{3\pi}{2}$ против часовой стрелки, попадём в точку $B(0;\ -1)$. При каждом следующем повороте на угол 2π (независимо от направления поворота) будем попадать в точку B. Точка B — искомая



3. Установить четверть, в которой расположена точка P_α, полученная поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол α радиан, если:

1) $\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta,\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;   2) $\alpha = \frac{3\pi}{2} - \beta,\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Решение. 1) Поскольку $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, то точка P_α расположена во II четверти $\left(\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \beta < \pi\right)$.

2) Поскольку $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, то точка P_α расположена в III четверти $\left(\pi < \frac{3\pi}{2} - \beta < \frac{3\pi}{2}\right)$.

4. Установить четверть, в которой расположена точка P_α, полученная поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол α, если:

1) $15\pi < \alpha < \frac{31\pi}{2}$; 2) $-\frac{9\pi}{2} < \alpha < -4\pi$; 3) $1170^\circ < \alpha < 1260^\circ$.

Решение. 1) Представим границы интервалов в виде $2\pi k + \beta$:

1) $15\pi = 14\pi + \pi = 2\pi \cdot 7 + \pi$; $\frac{31\pi}{2} = 14\pi + \frac{3\pi}{2} = 2\pi \cdot 7 + \frac{3\pi}{2}$.

Точка P_α расположена в III четверти.

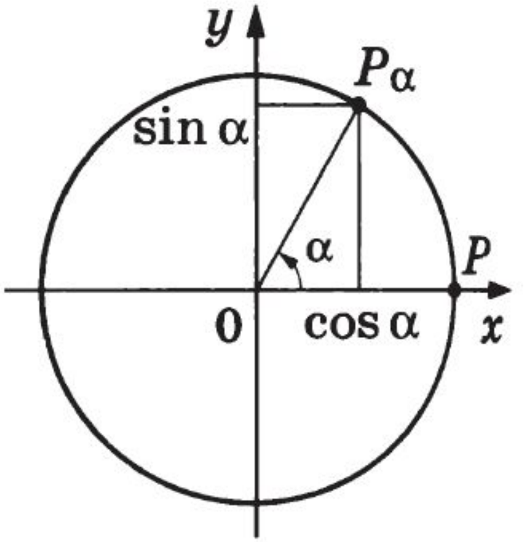
2) $-\frac{9\pi}{2} = 2\pi \cdot (-2) - \frac{\pi}{2}$; $-4\pi = 2\pi \cdot (-2) + 0$. Точка P_α расположена в IV четверти.

3) $1170^\circ = 360^\circ \cdot 3 + 90^\circ$, $1260^\circ = 360^\circ \cdot 3 + 180^\circ$. Точка P_α расположена во II четверти.

Определения

Синус угла α (обозначается $\sin\alpha$) — ордината точки P_α, полученной поворотом точки $P(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол α (рис. 39).

Косинус угла α (обозначается $\cos\alpha$) — абсцисса точки P_α, полученной поворотом точки $P(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол α



Тангенс угла α (обозначается $\operatorname{tg}\alpha$) — отношение синуса угла α к его косинусу, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Котангенс угла α (обозначается $\operatorname{ctg}\alpha$) — отношение косинуса угла α к его синусу, т. е. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

$\sin x = 1,\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$ $\quad$ $\sin x = -1,\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$

$\cos x = 1,\ x = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$ $\quad$ $\cos x = -1,\ x = \pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$

$\sin x = 0,\ x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$ $\quad$ $\cos x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

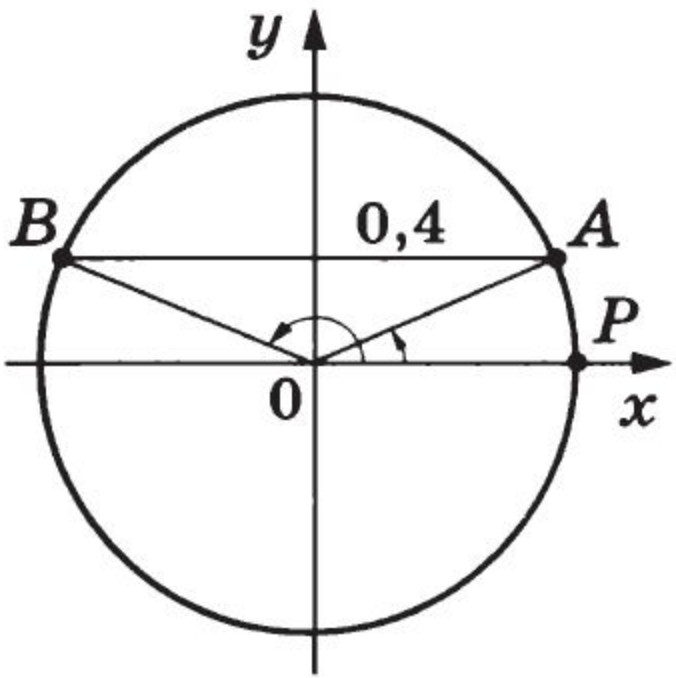
1. Изобразить на единичной окружности точки, полученные поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол α $(0 < \alpha < 2\pi)$, если:

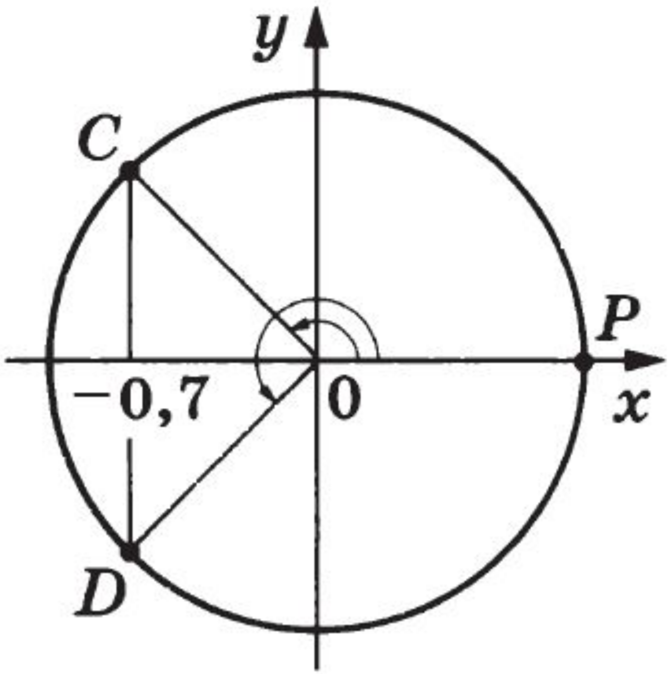
1) $\sin\alpha = 0{,}4$; 2) $\cos\alpha = -0{,}7$.

Решение.

1) Ординаты искомых точек A и B равны 0,4

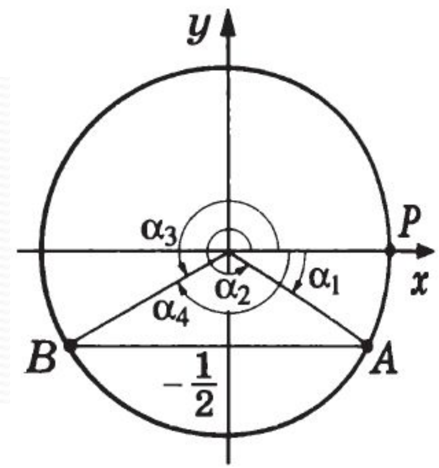
2) Абсциссы искомых точек C и D равны –0,7





2. Найти все углы из промежутка $[-2\pi;\ 2\pi]$, на которые нужно повернуть точку $P(1;\ 0)$, чтобы получить точку P_α, если:

1) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$; 2) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

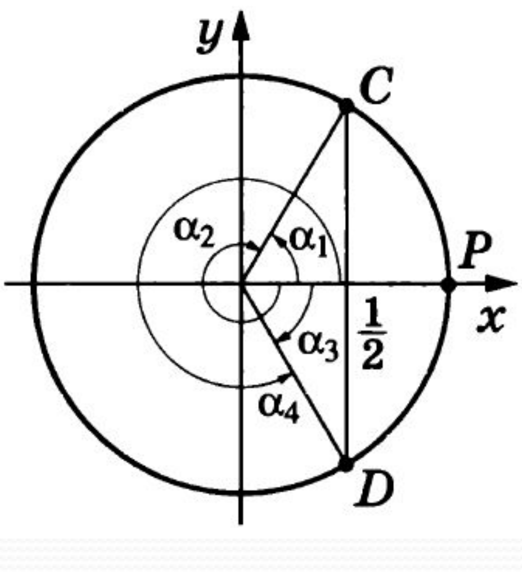


Решение.

1) Ординату, равную $-\frac{1}{2}$, имеют точка A, полученная из точки P поворотом на угол $\alpha_1 = -\frac{\pi}{6}$ или на угол $\alpha_2 = \alpha_1 + 2\pi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11}{6}\pi$, а также точка B, полученная из точки P поворотом на угол $\alpha_3 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ или на угол $\alpha_4 = \alpha_3 - 2\pi = \frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$.

2) Абсциссу, равную $\frac{1}{2}$, имеют

точка C, полученная из точки P поворотом на угол $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ или на угол $\alpha_2 = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$, а также точка D, полученная из точки P поворотом на угол $\alpha_3 = -\frac{\pi}{3}$ или на угол $\alpha_4 = \alpha_3 + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$.



Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если:

1) $\alpha = -5\pi$; 2) $\alpha = \frac{9\pi}{2}$; 3) $\alpha = 2070°$; 4) $\alpha = -1800°$.

Решение.

1) Представив число α в виде $\alpha = 2\pi k + \beta$, где $|\beta| < 2\pi$ и $k \in Z$, получим $\alpha = 2\pi(-2) - \pi$. Точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол -5π, совпадает с точкой, полученной поворотом на угол $-\pi$, а её координаты равны $(-1; 0)$, значит, $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = -1$.

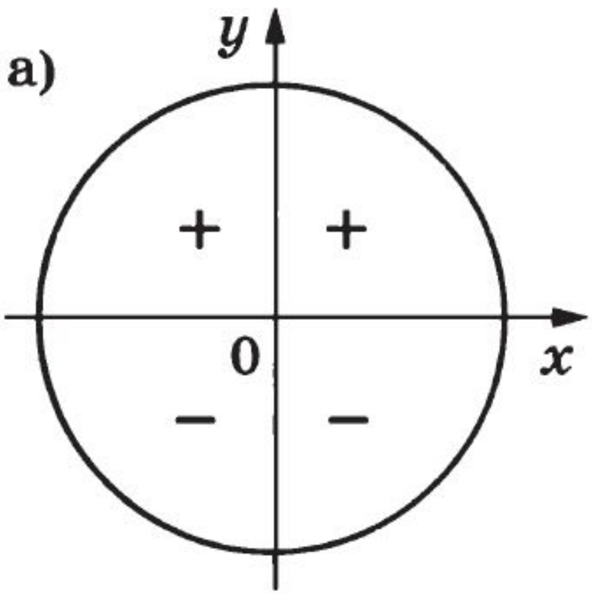
2) $\alpha = \frac{9\pi}{2} = 2\pi \cdot 2 + \frac{\pi}{2}$. Точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{9\pi}{2}$, совпадает с точкой, полученной поворотом на $\frac{\pi}{2}$. Координаты этой точки $(0; 1)$, следовательно, $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$.

3) $\alpha = 360° \cdot 5 + 270°$. Координаты точки, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на $270°$, равны $(0; -1)$, следовательно, $\sin\alpha = -1$, $\cos\alpha = 0$.

4) $\alpha = -1800° = 360° \cdot (-5)$. Точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на $-1800°$, совпадает с этой точкой, следовательно, $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$.

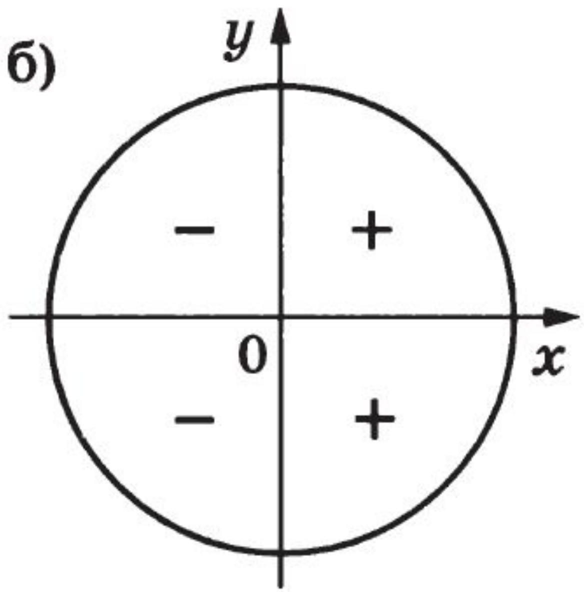
Справочные сведения

а)



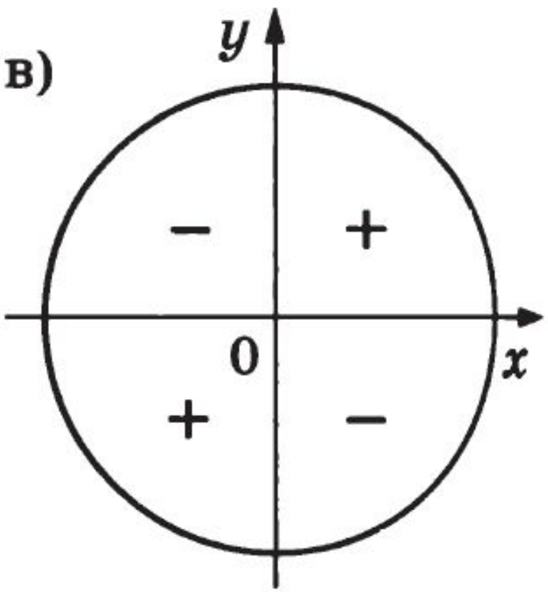
$\sin\alpha$

б)



$\cos\alpha$

в)



$\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$

1. Определить знаки $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{17\pi}{3}$; 2) $\alpha = -307°$.

Решение. 1) $\alpha = \frac{17\pi}{3} = 6\pi - \frac{\pi}{3}$, следовательно, угол α лежит в IV четверти и $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

2) $\alpha = -307° = -360° + 53°$, следовательно, угол α лежит в I четверти и $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$.

2. Сравнить числа: 1) $\sin 3$ и $\sin 4$; 2) $\cos 4$ и $\cos 5$; 3) $\sin 2$ и $\cos 2$.

Решение. 1) $\sin 3 > 0$, так как число $3 \in \left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$; $\sin 4 < 0$, так как $4 \in \left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$. Следовательно, $\sin 3 > \sin 4$.

2) $\cos 4 < 0$, так как $4 \in \left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$; $\cos 5 > 0$, так как $5 \in \left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$. Следовательно, $\cos 4 < \cos 5$.

3) Так как $2 \in \left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$, то $\sin 2 > 0$, а $\cos 2 < 0$. Следовательно, $\sin 2 > \cos 2$.

Справочные сведения

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{1}$$

Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом:

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1, \tag{2}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \tag{3}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \tag{4}$$

З а м е ч а н и е. Формулы (2) — (4) справедливы для тех значений аргументов, при которых их левые и правые части имеют смысл.

1. Вычислить $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. С помощью формулы (3) находим

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{16}{9}} = \frac{9}{25}.$$

Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\cos\alpha < 0$, $\sin\alpha > 0$. Поэтому $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$, а из равенства (1) следует, что $\sin\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$.

Ответ. $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

2. Упростить выражение $A = \frac{2\sin^2\alpha - 1}{\cos\alpha + \sin\alpha}$.

Решение. С помощью тождества (1) и формулы $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ получаем

$$A = \frac{2\sin^2\alpha - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \sin\alpha - \cos\alpha.$$

3. Существует ли угол α, такой, что $\sin\alpha = \frac{3}{7}$, $\cos\alpha = \frac{4}{7}$?

Решение. Так как для любого α справедливо равенство (1), а $\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{25}{49} \neq 1$, то ни при каком α равенства $\sin\alpha = \frac{3}{7}$ и $\cos\alpha = \frac{4}{7}$ не могут выполняться одновременно.

Ответ. Не существует.

4. Найти $\sin x \cos x$, если $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$.

Решение. Возводя обе части заданного равенства в квадрат, получаем $\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{9}$, или $1 + 2\sin x \cos x = \frac{1}{9}$, откуда $\sin x \cos x = -\frac{4}{9}$.