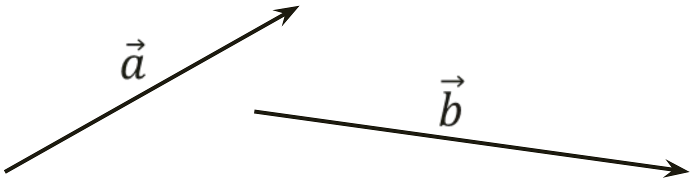
Скалярное произведение векторов

(проверка домашней работы на 22.05)

Определение. **Скалярным произведением** двух векторов называется <u>произведение</u> их *длин* на *косинус угла между ними*.



$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}}$$

а) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = \left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{B_1C_1}\right| \cdot \cos \widehat{\overrightarrow{AD}\ \overrightarrow{B_1C_1}} = a \cdot a \cdot \cos 0° = a \cdot a \cdot 1 = a^2$

б) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1A_1} = \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{C_1A_1}\right| \cdot \cos \widehat{\overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{C_1A_1}} = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 180° = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot (-1) = -2a^2$

в) $\overrightarrow{D_1B} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{D_1B}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos \widehat{\overrightarrow{D_1B}\ \overrightarrow{AC}} = a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 90° = a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot 0 = 0$

г) $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = \left|\overrightarrow{BA_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC_1}\right| \cdot \cos \widehat{\overrightarrow{BA_1}\ \overrightarrow{BC_1}} = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 60° = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = a^2$

д) $\overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = \left|\overrightarrow{A_1O_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1C_1}\right| \cdot \cos \widehat{\overrightarrow{A_1O_1}\ \overrightarrow{A_1C_1}} = a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 0° = a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = a^2$

е) $\overrightarrow{D_1O_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1} = \left|\overrightarrow{D_1O_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{B_1O_1}\right| \cdot \cos \widehat{\overrightarrow{D_1O_1}\ \overrightarrow{B_1O_1}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 180° = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) = -\frac{a^2}{2}$

ж) $\overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B} = \left|\overrightarrow{BO_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{C_1B}\right| \cdot \cos \widehat{\overrightarrow{BO_1}\ \overrightarrow{C_1B}} = a\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 150° = a^2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}a^2$

Свойства скалярного произведения векторов:

1. $\vec{a}^2 \geq 0$; $\vec{a}^2 \neq 0$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон)

3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон)

4. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (сочетательный закон)

Скалярное произведение векторов **в координатах**

$\vec{a}\,\{x_1; y_1; z_1\}$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}$$

$\vec{b}\,\{x_2; y_2; z_2\}$

$\boldsymbol{\vec{a}\,\{4; 3; -2\}}$ $\boldsymbol{\vec{b}\,\{-2; -4; 3\}}$ $\boldsymbol{\vec{c}\,\{2; -6; 1\}}$

Вычислите:

$\vec{a}\cdot\vec{c}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\vec{b}\cdot\vec{c}$

$\vec{a}\cdot\vec{a}$

$\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \boldsymbol{\cos\alpha}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

$$\boldsymbol{\cos\alpha} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\boldsymbol{\cos\alpha} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой: $\boldsymbol{\cos\alpha} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$.

Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой: $\boldsymbol{\cos\alpha} = \dfrac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.

$\cos\alpha > 0$	$\cos\alpha = 0$	$\cos\alpha < 0$
α - острый	α- прямой	α - тупой

Задача 1. Пользуясь координатами векторов $\vec{a}\,\{5; -2; 8\}$, $\vec{b}\,\{4; -1; 6\}$, $\vec{c}\,\{2; 3; -5\}$, выяснить, каким является угол между парами векторов: острым, прямым или тупым.

а) $\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}$ б) $\widehat{\vec{b}\ \vec{c}}$ в) $\widehat{\vec{a}\ \vec{c}}$

Задача 2. Найти величину угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

а) $\vec{a}\,\{\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\}$, $\vec{b}\,\{-3; -3; 0\}$

$$\cos\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = \frac{\sqrt{2}\cdot(-3)+\sqrt{2}\cdot(-3)+2\cdot 0}{\sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2+2^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+0^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = 135^\circ$$

б) $\vec{a}\,\{0; 5; 0\}$, $\vec{b}\,\{0; -\sqrt{3}; 1\}$

в) $\vec{a}\,\{-2{,}5; 2{,}5; 0\}$, $\vec{b}\,\{-5; 5; 5\sqrt{2}\}$

г) $\vec{a}\,\{-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; -2\}$, $\vec{b}\,\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -1\right\}$